Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Т. Ишмухаметов, О вложении счетных порядков в тьюринговые степени, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 682–687

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:13:14

УДК 510.17

О ВЛОЖЕНИИ СЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ В ТЬЮРИНГОВЫЕ СТЕПЕНИ

Ш.Т. Ишмухаметов

В классических работах Лермана, Лахлана и Лебеуфа разрабатывается метод вложения, позволяющий для различных частично упорядоченных структур строить изоморфные им начальные сегменты тьюринговых степеней. Мы проанализируем этот метод и докажем, что под каждой равномерной в $0'$ убывающей цепочкой степеней найдется ненулевая степень. Это накладывает ограничения на использование метода вложения.

Библиография: 10 названий.

Проблема строения начальных сегментов тьюринговых степеней $\mathbf{D}$ является одной из наиболее важных проблем в теории рекурсивных функций. Первоначальная конструкция минимальной степени Спектора [1] была упрощена и переложена на современный язык деревьев Шенфильдом [2]. Титтемейер [3] построил начальный сегмент $\mathbf{D}$, изоморфный трехэлементной цепи, а Хьюджил [4] показал, что всякий счетный линейный порядок изоморфен некоторому начальному сегменту степеней. В работах Лермана [5], [6] то же было доказано для конечных решеток. Из последнего результата следует, в частности, что теория тьюринговых степеней неразрешима. Наконец, в работе Лахлана и Лебеуфа [7] было доказано, что произвольная счетная верхняя полурешетка с наименьшим элементом изоморфна начальному сегменту $\mathbf{D}$. Все достижения, полученные в этом направлении, были собраны вместе в монографии Лермана [8], где также описаны локальные (ниже $0'$) варианты этих теорем. В этой статье мы представляем новый результат, характеризующий метод вложения и накладывающий определенные ограничения на его применение.

Определения всех используемых в статье понятий и обозначений можно найти в книге Соара [9]. Через $\{\Phi_i, i \in \omega\}$ будем обозначать фиксированную геделевскую нумерацию всех частично рекурсивных функционалов. Множества мы будем отождествлять с их характеристическими функциями и для произвольного множества A через $A \upharpoonright s$ обозначать начальный сегмент характеристической функции A длины s .

Проанализируем метод вложения на примере произвольной бесконечной (счетной) структуры L . Требуется построить начальный сегмент тьюринговых степеней, изоморфный L . Суть метода состоит в том, что непосредственно для каждого ненулевого элемента a структуры L строится методом деревьев множество C_a , тьюринговая степень которого и становится образом требуемого изоморфизма. Первым шагом в решении

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00733.

этой задачи является получение подходящего представления L , под которым понимается произвольное отображение множества натуральных чисел ω на множество $|L|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{a}$ – степень. Структура $\langle L, \leq_L \rangle$ называется $\mathbf{a}$ -представимой, если существует представление ν , при котором предикат

$$R(i, j) \equiv \nu(i) \leq_L \nu(j)$$

является рекурсивным в $\mathbf{a}$. Степень $\mathbf{a} = \deg_T A$ называется *сложностью представления* ν . Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то представление называется *рекурсивным*.

Ясно, что если $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ и структура L $\mathbf{a}$ -представима, то L также $\mathbf{b}$ -представима. Задача состоит в том, чтобы найти представление L , имеющее, по-возможности, меньшую сложность, желательно рекурсивную. Существуют, однако, естественные структуры, не имеющие рекурсивных представлений. Рассмотрим, для примера, структуру $L = \mathbf{D}$ ($\leq \mathbf{a}$), являющуюся главным идеалом полурешетки $\mathbf{D}$. В общем виде эта структура $\mathbf{a}'''$ -представима, и согласно результату Р. Шора для $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ эта структура не может иметь представлений степени ниже $\mathbf{0}^{(4)}$.

Предположим теперь, что для рассматриваемой структуры L уже найдено подходящее представление ν . Рассмотрим другой аспект этой проблемы. Методом вложения определяется изоморфизм τ структуры L на некоторый начальный сегмент степеней $\mathbf{D}$. Фактически строится некоторая система множеств $S = \{C_a : a \in L\}$. Напомним, что для произвольных множеств A и B выполняется $A \leq_T B$ (A сводится по Тьюрингу к B) тогда и только тогда, когда найдется частично рекурсивный функционал Φ такой, что $A = \Phi(B)$ (мы отождествляем множества A и B с их характеристическими функциями). Определим *функцию сводимости* $\text{Red}(i, j)$ следующим образом: если $a = \nu(i)$ и $b = \nu(j)$ – элементы L такие, что $a \leq_L b$, то $\text{Red}(i, j)$ равно некоторому числу m такому, что $C_a = \Phi_m(C_b)$, иначе $\text{Red}(i, j) \uparrow$ (не определено). Неформально говоря, эта функция по паре a, b , $a \leq_L b$, находит какой-нибудь алгоритм, сводящий множество C_a к множеству C_b . В действительности же, подобная функция должна строиться одновременно с системой множеств S , поскольку требование изоморфизма означает выполнение условия

$$a \leq_L b \leftrightarrow C_a \leq_T C_b.$$

Спрашивается, какую сложность должна иметь функция Red ? Кажется естественным предположение о том, что степень Red должна быть не выше степени представления структуры L . Например, если L – рекурсивно представимая структура, то кажется возможным подобрать рекурсивную систему сводящих алгоритмов. Ниже мы покажем, однако, что это не так и существуют рекурсивно представимые структуры, не имеющие вложений в тьюринговые степени с рекурсивной системой сводящих алгоритмов.

1. Об убывающих цепочках степеней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathbf{a}$ – степень, а $P = \{c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots\}$ – невозрастающая последовательность тьюринговых степеней. Назовем последовательность P *униформной* в $\mathbf{a}$, если существует функция f , рекурсивная в $\mathbf{a}$, такая, что для некоторого $C_0 \in c_0$ выполняется условие $(\forall n) C_{n+1} = \Phi_{f(n)}(C_n) \in c_{n+1}$. Если функция f рекурсивна, то назовем последовательность P *просто униформной*.

В нашей основной теореме мы установим ограничение на вложение в $\mathbf{D}$ структур, содержащих бесконечные убывающие цепи.

ТЕОРЕМА 1. $P = \{c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots > 0\}$ – *униформная в $0'$ последовательность степеней. Найдется ненулевая степень c , находящаяся ниже каждой степени c_n , $n \in \omega$.*

Доказательству основной теоремы мы предположим несколько вспомогательных утверждений. Пусть $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots$ – геделевская нумерация всех частично рекурсивных функций. Строками будем называть элементы множества $\{0, 1\}^{<\omega}$, т.е. конечные цепочки, состоящие из нулей и единиц. Пусть $\langle e, x \rangle$ – номер пары (e, x) в канторовской нумерации всех пар натуральных чисел. Определим нумерацию троек натуральных чисел $\langle e, x, y \rangle$, полагая $\langle e, x, y \rangle = \langle e, \langle x, y \rangle \rangle$. Определим множества R_e для $e \in \omega$, полагая для $e \in \omega$ $R_e = \{\langle e, x \rangle : x \in \omega\}$.

ЛЕММА 1. Пусть e – произвольное число. Существует рекурсивный функционал Φ такой, что для всех множеств B функция $\Phi(B)$ всюду определена, и если B – *нерекурсивно* множество, то $\Phi(B)$ *конечно* (как множество) и найдется $x \in R_e$ такое, что $\Phi(B; x) \neq \{e\}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить функционал Φ по шагам, как рекурсивно перечислимое множество пар строк $\langle \sigma, \tau \rangle$ такое, что

- 1) $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle \in \Phi \wedge \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle \in \Phi \wedge \sigma_1 \subset \sigma_2 \rightarrow \tau_1 \subset \tau_2$;
- 2) $\langle \sigma, \tau_1 \rangle \in \Phi \wedge \langle \sigma, \tau_2 \rangle \in \Phi \rightarrow \tau_1 = \tau_2$.

Для этого на произвольном шаге $s > 0$ для каждой строки σ длины $|\sigma| = s$ мы определим конечное множество $W(\sigma)$, кодирующее некоторым образом начальные сегменты строки σ и добавим к Φ пару $\langle \sigma, \rho \rangle$, где $\rho = W(\sigma) \upharpoonright (s+1)$.

Если множество B *нерекурсивно*, то, кодируя в $\Phi(B)$ начальные сегменты B , мы тем самым увеличиваем сложность $\Phi(B)$, делаем его *нерекурсивным*, причем когда будет найден аргумент $x \in R_e$ такой, что $W(B)(x) \neq \{e\}(x)$, кодирование прекращается и множество $W(B)$ останется конечным.

Опишем инструкции произвольного шага $s+1$, предполагая, что для всех строк σ длины $|\sigma| \leq s$ множества $W(\sigma)$ уже определены (для цепочки λ нулевой длины множество $W(\lambda)$ по определению равно пустому множеству).

1. Пусть $\tilde{\sigma}$ – произвольная цепочка длины $s+1$, а σ – ее начальный сегмент длины s . Для произвольного $t \leq s$ определим функцию длины $l(\sigma, t)$:

$$l(\sigma, t) = \max\{z : (\forall x < z, x \in R_e) \ W(\sigma \upharpoonright t)(x) = \{e\}_t(x)\}.$$

Назовем шаг $s+1$ (e, σ) -*экспансиональным*, если $l(\sigma, s) > \max_{t < s} l(\sigma, t)$.

2. Определим теперь $W(\tilde{\sigma})$ равным $W(\sigma)$, если шаг $s+1$ не является e -экспансиональным, иначе определим $W(\tilde{\sigma})$ равным объединению $W(\sigma)$ с числом $\langle e, s, k \rangle$, где k – код строки σ в некоторой фиксированной геделевской нумерации всех строк. Заметим, что в силу определения нумерации троек для всех e, s и k выполняется $\langle e, s, k \rangle > s$ и элемент, добавленный на шаге $s+1$ в $W(\sigma)$, превышает s .

3. Добавим к функционалу Φ всевозможные пары $\langle \sigma, \rho \rangle$, где $|\sigma| = s+1$, а $\rho = W(\sigma) \upharpoonright (s+1)$.

Описание конструкции окончено. Докажем некоторые ее свойства.

1. Множество $W(\sigma)$ определено для всех σ и является подмножеством R_e .

Следует из конструкции и определения нумерации троек натуральных чисел.

2. Функционал Φ определен корректно, т.е. для произвольных строк σ_1 и σ_2 , если $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ и $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle \in \Phi$, $\langle \sigma_2, \tau_2 \rangle \in \Phi$, то $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Следует из того, что для строк $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ выполняется $W(\sigma_1) \subseteq W(\sigma_2)$, причем элементы, принадлежащие разности $W(\sigma_2) - W(\sigma_1)$ (если таковые найдутся), превышают длину σ_1 .

3. Пусть B – нерекурсивное множество. Тогда множество $\Phi(B)$ конечно и $(\exists x \in R_e) \Phi(B; x) \neq \{e\}(x)$.

Предположим, что утверждение неверно и для всех $x \in R_e$ $\Phi(B; x) = \{e\}(x)$. В силу того, что $\Phi(B)$ является подмножеством R_e , множество $\Phi(B)$ является рекурсивным. Для произвольного s обозначим через σ_s начальный интервал $\Phi(B)$ длины s . Ясно, что в силу предположения множество $\text{Exp}(e) = \{s : \text{шаг } s + 1 \text{ } (e, \sigma_s)\text{-экспансиональный}\}$ является бесконечным и рекурсивным. Тогда бесконечно и множество $\Phi(B)$, поскольку на каждом (e, σ_s) -шаге $s + 1$ в $W(\sigma_s)$ добавляется новый элемент $z \neq 0$, который на шаге $z + 1$ попадет в множество $\Phi(B)$. Но, зная элементы множества $\Phi(B)$, мы можем восстановить начальные сегменты B произвольной длины, и B окажется рекурсивным в противоречие с условием леммы.

Этим завершается доказательство леммы.

Заметим, что поскольку инструкции для функционала Φ эффективно зависят от e , то справедливо более сильное утверждение.

ЛЕММА 2. *Существует общерекурсивная функция h такая, что для всех множеств A и $e \in \omega$ функционал $\Phi_{h(e)}(A)$ всюду определен и содержится как множество в R_e , причем если A нерекурсивно, то $\Phi_{h(e)}(A)$ конечен (как множество) и $(\exists x \in R_e) \Phi_{h(e)}(A; x) \neq \{e\}(x)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $P = \{c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots\}$ – равномерная последовательность степеней. Найдется ненулевая степень c , находящаяся ниже каждой степени c_n , $n \in \omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция f и множества C_n , $n \in \omega$, такие же, как в определении равномерной последовательности, а функция h взята из последней леммы. Определим множество $C = \bigcup_{n \in \omega} \Phi_{h(n)}(C_n)$. Очевидно, C нерекурсивно. Покажем, что $C \leq_T C_n$ для любого n . Действительно, для любого $e \in \omega$ множество $\Phi_{h(e)}(C_e)$ конечно. Пусть $\langle e, z \rangle$ – произвольное число такое, что $e > n$. Чтобы узнать $\langle e, z \rangle \in C$, надо узнать $\langle e, z \rangle \in C_e$, а поскольку C_e равномерно рекурсивно в C_n , то последний вопрос можно переадресовать оракулу C_n . Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $P = \{c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots\}$ – последовательность степеней. Если P равномерна в $0'$, то P просто равномерна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f \leq 0'$ такая же, как в определении 2, т.е. найдется цепочка множеств $\{C_n\}$, $n \in \omega$, такая, что для всех n $C_n \in c_n$ и $C_{n+1} = \Phi_{f(n)}(C_n)$. Существует двухместная общерекурсивная функция $f(s, x)$ такая, что для всех n $f(n) = \lim_s f(s, n)$. Пусть $m(n) = \mu t [t \geq m(n-1) \wedge (\forall s \geq t) f(s, n) = f(n)]$ – модуль функции $f(s, n)$ (по определению $m(-1)$ равно 0).

По последовательности $\{C_n\}$, $n \in \omega$, и функции f мы будем строить равномерную последовательность множеств $\{\tilde{C}_n\}$, $n \in \omega$, такую, что каждое $\tilde{C}_n \in c_n$. Определим $\tilde{C}_0 = C_0$.

Предполагая оракул C_0 заданным, определим для произвольных s и x аппроксимацию $C_1^s(x)$ значения $C_1(x)$. Для этого найдем наименьшее число $t \geq \max\{s, x\}$ такое, что $\Phi_{f(t,0),t}(C_0; x) \downarrow$, и определим $C_1^s(x) = \Phi_{f(t,0),t}(C_0; x)$.

В силу определения для любых x и $s \geq m(0)$ значение $C_1^s(x)$ совпадает со значением $C_1(x)$.

Определим множество $\tilde{C}_1$, полагая $\tilde{C}_1(\langle x, s \rangle)$ равным по определению $C_1^s(x)$.

Очевидно, что для всех $x \geq m(0)$ столбец $\tilde{C}_1^{(x)}$ целиком состоит из значений $C_1(x)$, а столбцы $\tilde{C}_1^{(x)}$ для $x < s_0$ могут содержать лишь конечное число элементов, отличных от $C_1(x)$. Поэтому множества C_1 и $\tilde{C}_1$ T -эквивалентны.

Пусть теперь $n \geq 1$ — произвольное число. Предположим, что множество $\tilde{C}_n$ уже построено, причем для всех $s \geq m(n)$ и произвольных x $\tilde{C}_n(x, s) = C_n(x)$, а для $x \geq m(n)$ столбцы $\tilde{C}_n^{(x)}$ полностью состоят из одного значения $C_n(x)$.

1. Для каждого $s \in \omega$ определим функцию C_n^s , полагая ее значение $C_n^s(x)$ в произвольной точке x равным $\tilde{C}_n(x, s)$. В силу индукционного предположения для $s \geq m(n)$ функции C_n^s совпадают с характеристической функцией множества C_n .

2. Определим множество $\tilde{C}_{n+1}$, вычисляя значение $\tilde{C}_{n+1}(\langle x, s \rangle)$ следующим образом: находим наименьшее $t \geq \max\{s, x\}$ такое, что $\Phi_{f(s,n),t}(C_n^t; x) \downarrow$, и полагаем

$$\tilde{C}_{n+1}(x, s) = \Phi_{f(s,n),t}(C_n^t; x).$$

Нетрудно доказать, что множество $\tilde{C}_{n+1}$ удовлетворяет индукционному предположению, сформулированному выше, поэтому можно продолжить процедуру определения последовательности $\{\tilde{C}_n\}$ индуктивно. Пусть последовательность $\{\tilde{C}_n\}$ уже построена. В силу своей структуры каждое $\tilde{C}_n$ T -эквивалентно C_n . Кроме того, алгоритм, сводящий $\tilde{C}_{n+1}$ к $\tilde{C}_n$, определяется эффективно по номеру n .

Этим завершается доказательство предложения.

Доказательство теоремы следует непосредственно из предложений 1 и 2.

2. Выводы. Пусть L обозначает структуру ω^* , т.е. линейный порядок, обратный натуральному ряду. Согласно теореме Хьюджилла [4] L изоморфна некоторому начальному сегменту степеней $\mathbf{D}$ ($\leq \mathbf{0}''$), а по теореме Лермана [8, XII.5.1] изоморфна некоторому сегменту степеней ниже $\mathbf{0}'$. Пусть $P = \{c_0 > c_1 > c_2 > \dots > \mathbf{0}\}$ — цепь степеней, являющаяся образом L в $\mathbf{D}$. Согласно нашей теореме эта последовательность не может быть равномерной в $\mathbf{0}'$, иначе найдется ненулевая степень c , находящаяся ниже всех c_n , $n \in \omega$.

Анализ доказательства Хьюджилла показывает, что конструируемая им последовательность P является равномерной в $\mathbf{0}''$. Действительно, на каждом шаге n конструкции Хьюджилла рассматривается конечный линейный подпорядок L_n структуры L и методом тотальных равномерных деревьев (см. Одифредди [10]) строится система деревьев T_k , $k < n$, являющихся поддеревьями деревьев, построенных на предыдущем шаге. Особенность конструкции такова, что построение деревьев производится $\mathbf{0}''$ -рекурсивно. На следующем шаге конструкции новые элементы подпорядка L_{n+1} , отсутствующие в L_n , кодируются уже в эти вновь определенные деревья. Значит, индексы сводящих алгоритмов, определяемых на шаге $n + 1$, зависят от индексов деревьев T_k , $k < n$, которые и определяются $\mathbf{0}''$ -рекурсивно.

Таким образом, наша теорема дает наилучший результат, характеризующий убывающие цепочки степеней, и является неверной, например, для порядков, равномерно рекурсивных в $0''$. В свою очередь, метод вложения также не может строить последовательности сводящих алгоритмов рекурсивно или с использованием оракула $0'$.

Заметим, что в монографии Одифредди [10, с. 527–528] приводится упрощенная схема доказательства теоремы Хьюджилла, дающая равномерную последовательность сводящих алгоритмов и потому являющаяся неверной и противоречащей нашей теореме.

Автор благодарен М. М. Арсланову и И. Ш. Калимуллину за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению доказательств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Spector C. On degrees of recursive unsolvability // *Ann. of Math.* 1956. V. 64. P. 581–592.
- [2] Shoenfield J. R. A theorem on minimal degrees // *J. Symbolic Logic.* 1966. V. 31. P. 539–544.
- [3] Titgemeyer D. Untersuchungen über die Struktur des Kleene-Postschen Halbverbandes des Grade der Rekursivenunlösbarkeit // *Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.* 1962. V. 8. № 1–2. P. 45–62.
- [4] Hügill D. F. Initial segments of Turing degrees // *Proc. London Math. Soc.* 1969. V. 19. P. 1–16.
- [5] Lerman M. Some nondistributive lattices as initial segments of the degrees of unsolvability // *J. Symbolic Logic.* 1969. V. 34. P. 85–98.
- [6] Lerman M. Initial segments of the degrees of unsolvability // *Ann. Math.* 1971. V. 93. P. 365–389.
- [7] Lachlan A. H., Lebeuf R. Countable initial segments of the degrees of unsolvability // *J. Symbolic Logic.* 1976. V. 41. P. 289–300.
- [8] Lerman M. *Degrees of Unsolvability, Perspectives in Mathematical Logic. Omega Series.* Berlin–Heidelberg–London–New York–Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
- [9] Соар Р. И. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань, 2000.
- [10] Odifreddi P. *Classical Recursion Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* V. 125. Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo: North-Holland, 1989.

Ульяновский государственный университет
E-mail: ishm@mci.ulsu.ru

Поступило
18.09.1999
Исправленный вариант
13.04.2001