Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Равномерные оценки осциллирующего интеграла и объема с фазой А.Н. Варченко, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 688–692

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:18:13

УДК 517.5

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ИНТЕГРАЛА И ОБЪЕМА С ФАЗОЙ А.Н. ВАРЧЕНКО

В. Н. Карпушкин

В работе получены равномерные оценки осциллирующего интеграла и объема с возмущенной фазой А. Н. Варченко, вытекающие из формулировок общих теорем (возмущение произвольное). Оценки оказываются близки к точным. Также получены точные оценки, выведенные на основе рассуждений, аналогичных доказательствам общих теорем (возмущение частичное).

Библиография: 10 названий.

Получены равномерные оценки сверху осциллирующих интегралов по возмущению фазы Варченко:

$$B_p(x, \mu) = B_p(x_1, x_2, x_3, \mu) = (x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + \mu x_1^2) + x_1^p + x_2^p + x_3^p,$$

где $p \geq 9$, p – целое число, $\mu \in \mathbb{R}$.

Пусть $\beta_p(\mu)$ – показатель осцилляции фазы $B_p(x, \mu)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^3$. В работе [1] показано, что осциллирующий интеграл с фазой $B_p(x, \mu)$ имеет в 0 показатель осцилляции со следующими свойствами: $\beta_p(\mu) = -3/4$ при $\mu > 0$, $\beta_p(0) = -5/8$ и $\beta_p(\mu) > -1/2 + \gamma_p$ при $\mu < 0$, где $\gamma_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow +\infty$. Из теоремы 1 следует, что предел $\beta_p(\mu)$ при $\mu < 0$, $p \rightarrow +\infty$ существует и равен $-1/2$.

Фаза Варченко дает единственный, известный с 1976 года контрпример к гипотезе В. И. Арнольда о полунепрерывности показателя осцилляции, а следовательно, и к гипотезе о равномерных оценках осциллирующих интегралов с индивидуальным показателем осцилляции в $\mathbb{R}^3$ (см. [1], [2]).

Данная работа представляет аргумент в пользу уточненной гипотезы Арнольда о равномерных оценках осциллирующих интегралов с максимальным показателем осцилляции среди всех фаз, примыкающих к исходной фазе, в частности, $B_\infty(x, 0)$.

Получены равномерные оценки осциллирующего интеграла с большим параметром $\tau \geq 2$ с возмущенной фазой $B_p(x, \mu)$, $-\infty < \mu < +\infty$, $9 \leq p \leq +\infty$, величиной $C\tau^{-1/2}$, вытекающие из формулировок общих теорем (возмущение произвольное). Точные равномерные оценки величиной $C\tau^{-5/8}$ для фазы $B_p(x, 0)$ выведены на основе рассуждений, аналогичных доказательствам общих теорем (возмущение частичное). В работе получены оценки величиной $C\tau^{-3/4}$ для случая, когда фаза есть $B_p(x, 0)$, амплитуда обращается в нуль в начале координат (возмущение частичное). Соответствующие оценки получены и для объемов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов NWO–РФФИ № 047.008.005 и INTAS № 00-259.

Формулировка результатов. Пусть $I(\tau, Q, \varphi)$ есть интеграл по $\mathbb{R}^3$ от $\varphi \exp(i\tau Q)$, осциллирующий с фазой Q , амплитудой φ и большим положительным параметром τ . Пусть $V(\delta, Q, b, \varphi, A)$ есть интеграл по $A_\delta(b)$ от φ , где A – окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^3$, $A_\delta(b) = \{x \in A : b - \delta \leq Q(x) \leq b + \delta\}$, δ – малый положительный параметр, b – произвольное вещественное число; $V(\delta, Q, b, \varphi, A)$ – объем с фазой Q , амплитудой φ и малым параметром $0 < \delta \leq 1/2$.

Пусть $B_\infty(x_1, x_2, x_3, \mu) = (x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + \mu x_1^2)^2$, $\mu \in \mathbb{R}$. Положим $f_p(x_1, x_2, x_3) = B_p(x_1, x_2, x_3, 0)$, где $9 \leq p \leq +\infty$.

Пусть $C^k(A)$ – пространство k раз ($k \geq 0$) непрерывно дифференцируемых функций φ таких, что замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^3, \varphi(x) \neq 0\}$ (носитель функции φ) принадлежит открытому множеству A . Пусть $(\varphi)_k$ – норма элемента $\varphi \in C_0^k(A)$:

$$(\varphi)_k = \sup_{0 \leq |m| \leq k, x \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^{|m|} \varphi}{\partial x^m} \right|.$$

ТЕОРЕМА 1. Существует константа $K > 0$ такая, что для всех $D \subset C^3$ (окрестность точки $0 \in C^3$) найдутся $\varepsilon_D > 0$, $A_D \subset D \cap \mathbb{R}^3$ (окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^3$) и для всех $\tau \geq 2$, $0 < \delta \leq 1/2$, $9 \leq p \leq +\infty$ имеем

- 1) $|I(\tau, f_p + F, \varphi)| \leq K\tau^{-1/2}(\varphi)_1$ для всех $F \in V_D(\varepsilon_D)$; $\varphi \in C_0^1(A_D)$;
- 2) $|V(\delta, f_p + F, b, \varphi, A_D)| \leq K\delta^{1/2}(\varphi)_0$ для всех $F \in V_D(\varepsilon_D)$; $\varphi \in C_0^0(A_D)$, $b \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Показатель осцилляции осциллирующего интеграла и показатель убывания объема (см. [1], [2]) с фазой $B_p(x, \mu)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^3$ при $\mu < 0$ равен $-1/2 + l(p)$, где $l(p) > \gamma(p)$, $\gamma(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow +\infty$ (см. [1], [2]). Из теоремы 1 следует, что $l(p) \leq 0$, поэтому $\gamma(p) < 0$, существует предел $\lim_{p \rightarrow +\infty} l(p)$ и он равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Максимальный показатель осцилляции для всех фаз, примыкающих к фазе $B_\infty(x, 0)$ в $0 \in \mathbb{R}^3$, равен $-1/2$ с кратностью 0. Это следует из того, что показатель осцилляции в $0 \in \mathbb{R}^3$ фаз $B_\infty(x, \mu)$ при $\mu < 0$ равен $-1/2$ (см. [1]–[3]) и из теоремы 1. Показатель осцилляции в $0 \in \mathbb{R}^3$ для фаз $B_\infty(x, \mu)$ при $\mu > 0$ равен $-3/4$ с кратностью 0 (см. [1]–[3]), при $\mu = 0$ равен $-5/8$ с кратностью 0 (см. [1]–[3]). Теорема 1 и фаза $B_\infty(x, 0)$ дают пример, когда гипотеза Арнольда о равномерных оценках с индивидуальным показателем осцилляции неверна, но верна более слабая его гипотеза.

ТЕОРЕМА 2. Для всех окрестностей $D \subset C^3$ точки $0 \in C^3$ найдутся константы $K_D > 0$ и $\varepsilon_D > 0$, $A_D \subset \mathbb{R}^3 \cap D$ (окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^3$) и для всех $\tau \geq 2$, $0 < \delta \leq 1/2$, $9 \leq p \leq +\infty$ имеем

- 1) $|I(\tau, f_p + F, \varphi)| \leq K_D\tau^{-7/12}(\varphi)_2$ для всех $F \in V_D(\varepsilon_D)$, $\varphi \in C_0^2(A_D)$;
- 2) $|V(\delta, f_p + F, b, \varphi, A_D)| \leq K_D\delta^{7/12}(\varphi)_0$ для всех $F \in V_D(\varepsilon_D)$, $\varphi \in C_0^1(A_D)$, $b \in \mathbb{R}$ и таких, что $\varphi(x_1, 0, 0) = 0$ для всех $x_1 \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 1 работы [4] следуют аналоги равномерных оценок осциллирующих интегралов и объемов для теорем 1, 2 с фазой $B_p(x, \mu)$ (вместо f_p), где $9 \leq p \leq +\infty$, $-\infty < \mu < +\infty$.

Теорема 1 и фазы $B_\infty(x, \mu)$, $\mu < 0$, дают пример, когда верна гипотеза Арнольда о равномерных оценках с индивидуальным показателем осцилляции (см. замечание 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Показатель $-7/12$ есть самый большой показатель осцилляции в $0 \in \mathbb{R}^2$ среди всех особенностей, примыкающих к $(x^2 + y^2)^2$ в $\mathbb{R}^2$ с показателем осцилляции меньше $-1/2$ (см. [5]).

Пусть $F \in V_D(\varepsilon)$; тогда $F = \sum_m a_m x^m$ в некоторой окрестности $0 \in C^3$; $\sum_m a_m x^m$ – ряд Маклорена функции F в системе координат x_1, x_2, x_3 . Обозначим множество $\{m; a_m \neq 0\}$ через $\text{supp } F$. В следующих теоремах 3, 4 рассматриваются только такие элементы F множества $V_D(\varepsilon)$ (возмущения), что для любого $m \in \text{supp } F$ либо $(m, \alpha) \geq 1$, либо $|m| \leq 1$, либо $m \in \{(2, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 0, 1)\}$, где $\alpha = (1/8, 1/4, 1/4)$. Обозначим соответствующее подмножество множества $V_D(\varepsilon)$ через $W_D(\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 3. Существует константа $K > 0$ такая, что для всех окрестностей $D \subset C^3$ точки $0 \in C^3$ найдутся $\varepsilon_D > 0$ и $A_D \subset D \cap \mathbb{R}^3$ (окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^3$) и для всех $\tau \geq 2$, $0 < \delta \leq 1/2$, $9 \leq p \leq +\infty$ имеем

- 1) $|I(\tau, f_p + F, \varphi)| \leq K\tau^{-5/8}(\varphi)_1$ для всех $F \in W_D(\varepsilon_D)$, $\varphi \in C_0^1(A_D)$;
- 2) $|V(\delta, f_p + F, b, \varphi, A_D)| \leq K\delta^{5/8}(\varphi)_0$ для всех $F \in W_D(\varepsilon_D)$, $b \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^0(A_D)$.

ТЕОРЕМА 4. Для любой окрестности D точки $0 \in C^3$ существуют константы $K_D > 0$, $\varepsilon_D > 0$ и окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^3$ – $A_D \subset D \cap \mathbb{R}^3$ такие, что для всех $\tau \geq 2$, $0 < \delta \leq 1/2$, $9 \leq p \leq +\infty$ имеем

- 1) $|I(\tau, f_p + F, \varphi)| \leq K_D\tau^{-3/4}(\varphi)_2$ для всех $F \in W_D(\varepsilon_D)$, $\varphi \in C_0^2(A_D)$ и таких, что $\varphi(0) = 0$;
- 2) $|V(\delta, f_p + F, b, \varphi, A_D)| \leq K_D\delta^{3/4}(\varphi)_1$ для всех $F \in W_D(\varepsilon_D)$, $b \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^1(A_D)$ и таких, что $\varphi(0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В теоремах 2.1, 2.2, 2.3 работы [6] константу $C_D > 0$ в равномерных оценках можно выбрать одинаковой для всех D .

Это следует из доказательства леммы 1 работы [4]. По этой же причине в теоремах 1, 3 данной работы константа K не зависит от D -окрестности точки 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В теореме 1 в случае, когда $p < +\infty$ можно считать, что фаза $f_p + F$ есть C^∞ -деформация Q фазы f_p , имеющая конечномерную базу $R, Q(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^l) \rightarrow R$, $Q(x, 0) = f_p(x)$.

Это следует из того, что f_p имеет конечное число Милнора в точке 0 (см. [1], [2]). Действительно, деформация Q сводится гладкой заменой переменных $x = g(y, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^l$, $g(0, \lambda) = 0$) к полиномиальной (по y). Степень полинома ограничена константой, зависящей только от p (см. [7]). Из теоремы 1 следует, что существуют константа $K > 0$ и окрестности A_x точки $0 \in \mathbb{R}^3$ и A_λ точки $0 \in \mathbb{R}^l$ такие, что $|I(\tau, Q(\cdot, \lambda), \varphi)| \leq K\tau^{-1/2}(\varphi)_1$ для всех $\tau \geq 2$, $\varphi \in C_0^1(A_x)$, $\lambda \in A_\lambda$, $|V(\delta, Q(\cdot, \lambda), b, \varphi, A_x)| \leq K\delta^{1/2}(\varphi)_0$ для всех $0 < \delta \leq 1/2$, $b \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^0(A_x)$; $\lambda \in A_\lambda$.

Доказательство результатов. Доказательство теоремы 1 следует из теоремы о равномерных оценках осциллирующих интегралов и объемов (см. [4], [6], [8]), примененных к переменным x_2, x_3 , и теоремы Фубини.

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы о равномерных оценках осциллирующих интегралов и объемов (см. [4]–[6], [8]), примененных к переменным x_2, x_3 , и теоремы Фубини.

Докажем теорему 3. Пусть $\tilde{\lambda} = \sum_{0 < (m, \alpha) < 1} a_m x^m$, где $F = \sum_m a_m x^m$, $\alpha = (1/8, 1/4, 1/4)$. Выберем параметр t_F так, что

$$\sum_{0 < (m, \alpha) < 1} |a_m| t_F^{1-(\alpha, m)} = 1$$

(если $\sum_{0 < (m, \alpha) < 1} |a_m| = 0$, то положим $t_F = +\infty$). Примем $t = \min(\tau/2, t_F)$. Сделаем квазиоднородное растяжение с параметром t : $x_i = y_i t^{-\alpha_i}$, $1 \leq i \leq 3$. Заметим, если $t = \tau/2$, то доказательство теоремы 3 следует из доказательства теоремы 1 в работе [4]. Пусть $f_\infty(y_1, y_2, y_3) = t f_\infty(x_1, x_2, x_3) = (y_1^4 + y_2^2 + y_3^2)^2$.

Рассмотрим полином $f_\infty(y_1, y_2, y_3) + \lambda(y)$, где

$$\lambda(y) = \sum_{0 < (m, \alpha) < 1} b_m y^m, \quad b_m = a_m t^{1-(\alpha, m)}.$$

Для любой точки $y \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ имеем: определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2(f_\infty + \lambda)}{\partial y_2^2}, & \frac{\partial^2(f_\infty + \lambda)}{\partial y_2 \partial y_3} \\ \frac{\partial^2(f_\infty + \lambda)}{y_3 \partial y_2}, & \frac{\partial^2(f_\infty + \lambda)}{\partial y_3^2} \end{bmatrix}$$

положителен. Это следует из работы [9], где выписан определитель этой матрицы. Поэтому теорема 3 вытекает из теоремы 1 работы [4], если доказать равномерную оценку с показателем $(-1, 1)$ в точке $0 \in \mathbb{R}^3$ (на самом деле достаточно доказать равномерную оценку сверху величиной $K\tau^{-5/8}(\varphi)_1$). Равномерно оценим осциллирующий интеграл (объем) с малым возмущением исходной фазы $f_\infty + \lambda$ величиной $K_1\tau^{-1} \ln \tau(\varphi)_1$ при $\tau \geq 2$ ($K_1\delta |\ln \delta|(\varphi)_0$ при $0 \leq \delta \leq 1/2$). В обозначениях работы [4] это есть $M(f_\infty + \lambda, 0) \leq (-1, 1)$, соответственно $V(f_\infty + \lambda, 0) \leq (-1, 1)$. Положим $b_{1,1} = b_{2,0,0}$, $b_{1,2} = b_{1,1,0}$, $b_{1,3} = b_{1,0,1}$, $b_1 = b_{1,0,0}$, $b_2 = b_{0,1,0}$, $b_3 = b_{0,0,1}$. Исследуемая фаза $f_\infty + \lambda$ имеет вид

$$(y_1^4 + y_2^2 + y_3^2)^2 + b_{1,1}y_1^2 + b_{1,2}y_1y_2 + b_{1,3}y_1y_3 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3.$$

Предположим, что $\sum_{i=1}^3 (|b_{1,i}| + |b_i|) = 1$. Иначе, т.е. когда $t = \tau/2$, теорема 3 доказана (это следует из доказательства теоремы 1 работы [4] и теоремы 3.1 работы [6]). Если $|b_1| + |b_2| + |b_3| > 0$, то теорема 3 доказана: $d(f_\infty + \lambda)|_0 \neq 0$. Если $d(f_\infty + \lambda)|_0 = 0$, то ранг $d^2(f_\infty + \lambda)$ в 0 не меньше единицы. Кроме того, ранг $d^2(f_\infty + \lambda)$ в 0 всегда больше или равен двум, когда $|b_{1,2}| + |b_{1,3}| > 0$. Если ранг $d^2(f_\infty + \lambda)$ в 0 больше или равен двум, то теорема 3 доказана.

Рассмотрим случай, когда $d(f_\infty + \lambda)|_0 = 0$ и ранг $d^2(f_\infty + \lambda)$ в 0 равен единице, т.е. $b_{1,1} \neq 0$, $b_{1,2} = b_{1,3} = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. В этом случае $b_{1,1} \in \{-1, 1\}$. Тогда 4-струя функции $f_\infty + \lambda$ в точке $0 \in \mathbb{R}^3$ равна $b_{1,1}y_1^2 + (y_2^2 + y_3^2)^2$. Отсюда легко видеть, что в точке $0 \in \mathbb{R}^3$ показатель осцилляции $f_\infty + \lambda$ равен -1 , коранг $d^2(f_\infty + \lambda)$ в 0 равен 2. Из работы [8] следует, что для $f_\infty + \lambda$ верна равномерная оценка в $0 \in \mathbb{R}^3$ осциллирующего интеграла и объема с показателем $(-1, 1)$. Теперь теорема 3 следует из теоремы 1 и леммы 1 работы [4], а также из теоремы 3.1, леммы 3.1 работы [6].

Доказательство теоремы 4 выводится из доказательства теоремы 3 данной работы, доказательства теоремы 1 работы [4] и того, что для всех $0 < r$ имеем: если $\varphi \in C_0^3(D_r)$ и $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \psi_j(x)$, где $\psi_j \in C_0^{s-1}(D_r)$, $1 \leq s$, $1 \leq j \leq n$, D_r — открытый шар радиуса r с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. На самом деле при доказательстве теоремы 3 получено $M(f_\infty + \lambda, 0) \leq (1, 0)$, т.е. осциллирующий интеграл с фазой $f_\infty + \lambda + F$ и амплитудой φ , сосредоточенной в малой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^3$, допускает равномерную по F оценку вида $K\tau^{-1}(\varphi)_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Из результатов работ [4], [6], [10] следует, что для фазы $l \in \tilde{R}_m$ (см. [4]) имеем: $V(l, 0) \leq (-1, 1)$ вместо $V(l, 0) \leq (-1, 2)$ (см. [6]).

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. №3. С. 13–38.
- [2] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984.
- [3] Карпушкин В. Н. Осциллирующие интегралы и объемы с полуквазиоднородной фазой // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. №1. С. 59–61.
- [4] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической и гиперболической фазой // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. №9. С. 3–39.
- [5] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки некоторых осциллирующих интегралов // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. №2. С. 90–101.
- [6] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки объемов // Локальные и глобальные задачи теории особенностей. Тр. МИАН. Т. 221. М.: Наука, 1998. С. 225–231.
- [7] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982.
- [8] Карпушкин В. Н. Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1984. №10. С. 150–169.
- [9] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов и объемов при частичной деформации фазы // Сб. науч. тр. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. С. 151–159.
- [10] Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с фазой серии $\tilde{R}_m$ // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №3. С. 468–469.

Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва

Поступило
25.05.2001