Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Боголюбский, О распределении точек альтернанса
наилучших рациональных аппроксимаций, *Матем. за-
метки*, 2008, том 83, выпуск 4, 493–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:45:45

О распределении точек альтернанса наилучших рациональных аппроксимаций

А. И. Боголюбский

Исследуется сходимость считающих мер множеств точек альтернанса наилучших рациональных аппроксимаций к равновесной мере отрезка $[0, 1]$. Показано, что для любой наперед заданной неубывающей последовательности степеней знаменателей существует функция, аналитическая на $[0, 1]$, и последовательность степеней числителей такие, что соответствующая последовательность мер не сходится к равновесной мере отрезка.

Библиография: 21 название.

1. Введение

Основным объектом исследования в настоящей работе являются наилучшие рациональные (чебышёвские) аппроксимации. Напомним их определение в действительном случае (подробнее см., например, [1]). Обозначим через $\mathcal{P}_n$ класс полиномов с действительными коэффициентами степени не выше n , а через $\mathcal{R}_{n,m}$ – класс рациональных функций вида $r = p/q$, $p \in \mathcal{P}_n$, $q \in \mathcal{P}_m$, $q \not\equiv 0$. Рассмотрим произвольный компакт $E \subseteq \mathbb{R}$ и заданную на нем действительнозначную функцию $f \in C(E)$. Тогда для каждой пары неотрицательных целых чисел (n, m) существует функция $r_{n,m}^* \in \mathcal{R}_{n,m}$, которая является наилучшей рациональной аппроксимацией f на E в том смысле, что

$$\|f - r_{n,m}^*\| \leq \|f - r\|, \quad r \in \mathcal{R}_{n,m}$$

(здесь $\|\cdot\|$ – равномерная норма на E). Если $E = [\alpha, \beta]$ – отрезок действительной прямой, то аппроксимация $r_{n,m}^*$ единственна. Изучением именно такой ситуации мы ограничимся в дальнейшем. При всех возможных индексах (n, m) функции $r_{n,m}^*$ объединяются в таблицу Чебышёва, аналогичную таблице Паде.

Если

$$r_{n,m}^* = \frac{p_n^*}{q_m^*},$$

где p_n^* и q_m^* не имеют общих множителей, то

$$d_{n,m} := \min\{n - \deg p_n^*, m - \deg q_m^*\}$$

– дефект рациональной функции $r_{n,m}^*$ в классе $\mathcal{R}_{n,m}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4466.2006.1).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЁВА (см. [1]). Существует набор из $m + n + 2 - d_{n,m}$ точек $x_k^{(n,m)}$,

$$\alpha \leq x_1^{(n,m)} < \dots < x_{m+n+2-d_{n,m}}^{(n,m)} \leq \beta,$$

таких, что

$$\lambda_{n,m}(-1)^k(f - r_{n,m}^*)(x_k^{(n,m)}) = \|f - r_{n,m}^*\|, \quad k = 1, \dots, m + n + 2 - d_{n,m},$$

где $\lambda_{n,m}$ – фиксированное число, равное 1 или -1 . Обратно, если такой набор существует для некоторой $r_{n,m}^* \in \mathcal{R}_{n-d,m-d}$, $d = d_{n,m}$, то $r_{n,m}^*$ – наилучшая рациональная аппроксимация функции f в классе $\mathcal{R}_{n,m}$.

Множество таких точек, называемых точками альтернанса, в общем случае не единственно. Для каждой пары (n, m) обозначим через

$$\mathcal{A}_{n,m} = \mathcal{A}_{n,m}(f) := \{x_k^{(n,m)}\}_{k=1}^{m+n+2-d_{n,m}}$$

произвольное, но фиксированное множество точек альтернанса аппроксимации $r_{n,m}^*$ функции f .

Возникает естественный вопрос о том, каково асимптотическое распределение точек альтернанса непрерывной функции f на отрезке $[\alpha, \beta]$. Всегда ли оно сходно с распределением точек альтернанса классических полиномов Чебышёва, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке $[\alpha, \beta]$, т.е. является равномерным относительно равновесной меры отрезка? Перечислим некоторые ранее опубликованные результаты, касающиеся асимптотического распределения точек альтернанса.

Обозначим через $\nu_{n,m}$ нормированную считающую меру множества $\mathcal{A}_{n,m}$:

$$\nu_{n,m}([a, b]) := \frac{\#\{x_k^{(n,m)} : a \leq x_k^{(n,m)} \leq b\}}{m + n + 2 - d_{n,m}}. \quad (1.1)$$

Для случая наилучших полиномиальных аппроксимаций Кадец [2] показал, что существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\nu_{n,0} \xrightarrow{*} \mu, \quad n \in \Lambda, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где μ – равновесная мера отрезка $[\alpha, \beta]$.

Соответствующий результат для общего случая рациональных аппроксимаций доказали Борвейн, Гротманн, Кроо и Сафф [3]: если

$$m_n \leq m_{n+1} \leq m_n + 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = 0,$$

то существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\nu_{n,m_n} \xrightarrow{*} \mu, \quad n \in \Lambda, \quad n \rightarrow \infty.$$

Этот результат был уточнен в работе Кроо и Пехерсторфера [4]: если $m_n < n$, то существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\frac{N_{n,m_n}(\alpha, \beta)}{n - m_n} \geq \mu([\alpha, \beta]) - c \sqrt{\frac{\log n}{n - m_n}}, \quad n \in \Lambda, \quad (1.3)$$

где $N_{n,m_n}(\alpha, \beta)$ – количество точек $\mathcal{A}_{n,m}$, принадлежащих отрезку $[\alpha, \beta]$, а c – не зависящая от f и n константа.

В [5] рассматривается проблема приближения непрерывной функции тригонометрическими рациональными дробями и изучается возможность формулировки результатов, аналогичных теореме Кадеца, при разных видах стремления целочисленной точки (n, m) к бесконечности.

Работы [6], [7] посвящены анализу связи распределения точек $\mathcal{A}_{n,m}$ и расположения полюсов чебышёвской аппроксимации $r_{n,m}^*$.

Во всех упоминавшихся результатах утверждения о поведении мер (1.1) делаются лишь для некоторой подпоследовательности степеней числителей $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Является ли это обстоятельство существенным? Будут ли эти утверждения справедливы при всех $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$? В следующих двух разделах работы мы покажем, что ответ на этот вопрос отрицателен, а в заключительном разделе обсудим ряд обобщений этой задачи и связанных с ней вопросов.

2. Основная теорема и сопутствующие результаты

Лоренц предъявил [8] для случая наилучших *полиномиальных* аппроксимаций (т.е. $m_k = 0$, см. ниже) пример функции, для которой распределение точек $\mathcal{A}_{n,0}$ “патологически” отличается от μ -равномерного для бесконечной последовательности индексов $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$. В настоящей работе мы, развивая идею построения контрпримера Лоренца, обобщим его на случай последовательности наилучших *рациональных* аппроксимаций с произвольными степенями знаменателя.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для любой неубывающей последовательности $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ (степеней знаменателей) существуют функция f , аналитическая на отрезке $[0, 1]$, и последовательность $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ (степеней числителей) такие, что множества точек альтернанса наилучших рациональных аппроксимаций типа $[n_k/m_k]$ при k разной четности находятся в ε -окрестности разных концов отрезка $[0, 1]$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n_k, m_k}(f) &\subset [0, \varepsilon], & \text{если } k = 2l, \\ \mathcal{A}_{n_k, m_k}(f) &\subset [1 - \varepsilon, 1], & \text{если } k = 2l + 1. \end{aligned}$$

Чтобы проиллюстрировать разнообразие структуры множеств точек альтернанса аппроксимаций из таблицы Чебышёва той же функции f отметим, в соответствии с результатом [3], следующий факт. Если последовательность $\{m_k\}$ дополнительно удовлетворяет условиям

$$m_k \leq m_{k+1} \leq m_k + 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{k} = 0,$$

то существует подпоследовательность $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ такая, что предельное распределение точек множества $\mathcal{A}_{k_j, m_{k_j}}(f)$ является равномерным относительно равновесной меры отрезка $[0, 1]$.

Изложим необходимые нам для доказательства теоремы 1 определения и ранее известные результаты.

Рациональным оператором Чебышёва на компакте E (всюду далее предполагается, что $E = [0, 1]$) называется нелинейный оператор $T_{n,m}^E: C(E) \rightarrow \mathcal{R}_{n,m} \cap C(E)$, сопоставляющий функции ее наилучшую аппроксимацию:

$$T_{n,m}^E: f \rightarrow r_{n,m}^*(f, E).$$

Функция f называется *нормальной точкой* оператора $T_{n,m} = T_{n,m}^{[0,1]}$ в функциональном пространстве $C[0, 1]$ (или просто $[n/m]$ -нормальной), если дефект $d_{n,m}(f) = 0$.

ТЕОРЕМА 2 (о сильной единственности, см. [9]). Пусть f – нормальная точка оператора $T_{n,m}$, $r^* = T_{n,m}f$. Тогда существует константа $\gamma = \gamma(f) > 0$ такая, что для любой $r \in \mathcal{R}_{n,m}$ выполняется неравенство

$$\|f - r\| \geq \|f - r^*\| + \gamma\|r - r^*\|. \quad (2.1)$$

Мы будем пользоваться также и некоторыми результатами из теории θ -неполных полиномов. Отметим, что одним из первых такие объекты начал изучать Лоренц [10]. Будем называть полином P_n степени не выше n θ -неполным, где $\theta > 0$, если он имеет вид¹

$$P_n(x) = \sum_{k=\lceil n\theta \rceil}^n a_k x^k.$$

Нижнюю границу расположения максимума $|P_n(x)|$ на отрезке $[0, 1]$ дает следующая

ТЕОРЕМА 3 (см. [11]). Если P_n – θ -неполный полином, $0 < \xi \leq 1$ и $|P_n(\xi)| = \|P_n\|_{C[0,1]}$, то

$$\xi > \left(\frac{\lceil n\theta \rceil}{n} \right)^2.$$

Оставаясь ограниченными по норме на $[0, 1]$, θ -неполные полиномы с возрастанием степени равномерно убывают на левом конце отрезка. Точнее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4 (см. [12]). Пусть $0 < \sigma < \theta^2$. Если семейство θ -неполных полиномов $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ равномерно ограничено на отрезке $[\theta^2, 1]$:

$$|P_n(x)| < \text{const}, \quad x \in [\theta^2, 1], \quad n = 0, 1, \dots,$$

то

$$|P_n(x)| \Rightarrow 0, \quad x \in [0, \sigma], \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь сформулируем и докажем две используемые в дальнейшем леммы.

ЛЕММА 1 (о локальной липшицевости оператора Чебышёва). Если f – нормальная точка оператора $T = T_{n,m}$, то в ней выполняется локальное условие Липшица первого порядка, т.е. существует константа $M = M(n, m, f) > 0$ такая, что

$$\|Tg - Tf\| \leq M\|g - f\|, \quad g \in C[0, 1]. \quad (2.2)$$

Это утверждение было доказано Фройдом для случая полиномиальной аппроксимации (см. [13]); мы приведем аналогичное доказательство для рационального случая. Заметим, что в [14] локальная липшицевость (как и аналог теоремы 2) доказана для общей ситуации нелинейных наилучших приближений.

¹Здесь $\lceil x \rceil$ – “потолок” x , т.е. наименьшее целое число, большее или равное x . В [10] как нижняя граница суммирования используется целая часть $n\theta$. Нам с технической точки зрения будет удобно использовать в этом качестве именно $\lceil n\theta \rceil$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Воспользуемся теоремой 2 для функции f , взяв в (2.1) $r = Tg$. Согласно неравенству треугольника, а также определяющему свойству наилучших аппроксимаций, имеем

$$\begin{aligned} \gamma \|Tg - Tf\| &\leq \|f - Tg\| - \|f - Tf\| \leq \|f - g\| + \|g - Tg\| - \|f - Tf\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - Tf\| - \|f - Tf\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - f\| + \|f - Tf\| - \|f - Tf\| \\ &\leq 2\|g - f\|. \end{aligned}$$

Очевидно, (2.2) выполняется с $M = 2/\gamma$.

ЛЕММА 2. Пусть $\theta > 0$ фиксировано. Тогда для любого $n > 0$ и любого полинома Q , положительного и невозрастающего на отрезке $[0, 1]$, существует рациональная функция

$$S_{(n)}(x) = \frac{F_n(x)}{Q(x)}$$

такая, что $F_n - \theta$ -неполный полином степени n , $\|S_{(n)}\| = 1$ и при $x \in [\theta^2, 1]$ функция $S_{(n)}$ имеет по меньшей мере $\lceil n(1 - \theta) \rceil$ точек наибольшего уклонения от нуля, в которых принимает значения с чередующимися знаками, равные по абсолютной величине 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Введем обозначения

$$k = \lceil n\theta \rceil, \quad w(x) = \frac{x^k}{Q(x)}.$$

Поскольку любые функции из набора

$$\{w(x)x^j\}_{j=0}^{n-k}$$

образуют систему Чебышёва (см. [15]), существует полином $P \in \mathcal{P}_{n-k}$, наименее уклоняющийся от нуля с весом $w(x)$ на отрезке $[\theta^2, 1]$:

$$\|w(x)P(x)\|_{C[\theta^2, 1]} < \|w(x)p(x)\|_{C[\theta^2, 1]}, \quad p \in \mathcal{P}_{n-k}, \quad p \neq P.$$

При этом существует “альтернансное” множество из $n - k + 1 \geq \lceil n(1 - \theta) \rceil$ точек

$$\{x_j\}_{j=1}^{n-k+1} \subset [\theta^2, 1]$$

таких, что $|S_0(x_j)| = \|S_0\|_{[\theta^2, 1]}$ и $S_0(x_{j+1}) = -S_0(x_j)$, где $S_0(x) := w(x)P(x)$.

Очевидно, $\|Q\|_{C[\theta^2, 1]} \leq \|Q\|_{C[0, \theta^2]}$. В силу этого обстоятельства и утверждения теоремы 3, примененной к числителю S_0 , имеем: если для некоторого числа $\xi \in [0, 1]$ справедливо равенство $S_0(\xi) = \|S_0\|_{C[0, 1]}$, то

$$\xi > \left(\frac{k}{n}\right)^2 \geq \theta^2.$$

Значит,

$$\|S_0\|_{C[0, 1]} = \|S_0\|_{C[\theta^2, 1]},$$

и искомую функцию можно определить, нормировав S_0 :

$$S_{(n)}(x) := \frac{S_0(x)}{\|S_0\|_{C[0, 1]}}.$$

3. Доказательство основной теоремы

Опишем конструктивный процесс построения искомой функции.

Зафиксируем некоторую последовательность положительных и невозрастающих на отрезке $x \in [0, 1]$ полиномов $\{Q_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ таких, что

$$\deg Q_0 = m_0, \quad \deg Q_k = m_k - m_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Кроме этого, определим последовательности $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 1, \quad \sqrt[3]{1 - \varepsilon} < \theta_k < 1, \quad (3.1)$$

$$a_j > 0, \quad \sum_{j=k}^{\infty} a_j \leq 2a_k, \quad a_{j+1} = o(a_j), \quad j \rightarrow \infty; \quad (3.2)$$

в дальнейшем мы наложим на $\{a_k\}$ дополнительные ограничения.

Введем следующее обозначение. Пусть задана функция $S_k(x)$, $x \in [0, 1]$. Тогда функцию Π_k определим так:

$$\Pi_k(x) := \begin{cases} S_k(1-x), & \text{если } k = 2l, \\ S_k(x), & \text{если } k = 2l + 1. \end{cases}$$

На нулевом шаге нашей процедуры, ведущей к построению f , определим

$$S_0(x) := \frac{1}{Q_0(x)}, \quad g_0(x) := S_0(x), \quad n_0 := 0.$$

Далее опишем $(k+1)$ -й шаг. До его выполнения должны быть определены функции $S_0, \dots, S_k$, $g_0, \dots, g_k$ и числа $n_0, \dots, n_k$.

Для некоторого достаточно большого числа $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ имеем

- i) $n_k + m_k + 2 \leq (1 - \theta_k)N_{k+1}$;
- ii) существующая по лемме 2 рациональная функция $S_{k+1}(x) := S_{(N_{k+1})}(x)$ со знаменателем $Q_{k+1}(x)$ в силу утверждения теоремы 4, примененной к ее числителю, удовлетворяет неравенству

$$|S_{(N_{k+1})}(x)| < \frac{1}{k+1}, \quad x \in [0, \theta_k^3]. \quad (3.3)$$

Используя найденную в ii) функцию S_{k+1} , определим остальные объекты:

$$g_{k+1}(x) := g_k(x) + a_{k+1}\Pi_{k+1}(x), \quad (3.4)$$

$$n_{k+1} := \max\{\deg \text{num}(g_k) + \deg \text{den}(\Pi_{k+1}), \deg \text{num}(\Pi_{k+1}) + \deg \text{den}(g_k)\} \quad (3.5)$$

(здесь $\text{num}(r)$ – числитель рациональной функции r , $\text{den}(r)$ – ее знаменатель).

Наложим на a_{k+1} дополнительное ограничение: потребуем, чтобы при сложении рациональных функций (3.4) не было вырождения старшего коэффициента в числителе:

$$\deg \text{num}(g_{k+1}) = n_{k+1}. \quad (3.6)$$

Кроме того, несколько более жесткое, чем (3.6), ограничение будет введено в (3.8).

Итак, при помощи описанной процедуры числа n_k и функции Π_k определяются для всех $k \geq 0$. Определим функцию f как сумму сходящегося в силу (3.2) ряда:

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Pi_j(x)$$

и покажем, что для нее выполняется утверждение теоремы 1.

Введем обозначения

$$f_k(x) := g_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j \Pi_j(x), \quad R_k(x) := T_{n_k, m_k} f(x), \quad R_k^*(x) := T_{n_k, m_k} f_k(x).$$

Заметим, что $R_k^*(x) = g_k(x)$ в силу теоремы Чебышёва, поскольку $g_k(x)$ имеет соответствующие степени числителя и знаменателя, а уклонение $f_k(x) - g_k(x) = a_{k+1} \Pi_{k+1}(x)$, как следует из условия i) выбора N_{k+1} , обладает на отрезке $[0, 1]$ необходимым альтернансом (т.е. необходимым количеством точек в $\mathcal{A}$).

Имеем

$$\|f_k - R_k^*\| = \|a_{k+1} \Pi_{k+1}(x)\| = a_{k+1}.$$

Кроме того,

$$\|f - f_k\| \leq \sum_{j=k+2}^{\infty} a_j \leq 2a_{k+2}.$$

Стало быть, по лемме 1 и в силу достигнутой за счет (3.5) $[n_k/m_k]$ -нормальности f_k , получаем²

$$\|R - R_k^*\| \leq 2M_k a_{k+2}. \quad (3.7)$$

При этом константа M_k определяется только функцией f_k и значениями n_k, m_k . Таким образом, из всех $\{a_j\}$ она зависит лишь от $a_1, \dots, a_{k+1}$, и свобода в выборе a_{k+2} дает нам возможность потребовать, чтобы правая часть (3.7) была достаточно мала:

$$M_k a_{k+2} = o(a_{k+1}). \quad (3.8)$$

Далее, запишем

$$f - R_k = (f - f_k) + (f_k - R_k^*) + (R_k^* - R_k) = a_{k+1} \Pi_{k+1} + h,$$

где

$$\|h\| \leq 2(M_k + 1)a_{k+2}.$$

Таким образом,

$$\|f - R_k\| = a_{k+1}(1 + o(1)).$$

²Отметим, что аналогичное рассуждение у Лоренца [8] содержит некоторую неточность. А именно, вместо того, чтобы рассматривать последовательность констант M_k , он вводит одну "глобальную" константу M , не учитывая при этом два обстоятельства: 1) лемма 1 каждый раз применяется к разным функциям f_k ; 2) более того, каждый раз утверждается локальная липшицевость нового оператора T_{n_k, m_k} . Подобное упрощение было бы допустимо, если бы M_k были ограничены в совокупности. Однако это не так. Для сравнения приведем результат, доказанный Геленом в [16] и описывающий поведение липшицевых констант операторов полиномиальных аппроксимаций: *если f не является полиномом, то $\lim_{n \rightarrow \infty} M(T_{n,0}, f) = \infty$.*

Пусть k нечетно. Тогда при $x \in [0, \theta_k^3]$ из (3.3) имеем

$$|f(x) - R_k(x)| \leq 2(M_k + 1)a_{k+2} + \frac{a_{k+1}}{k+1} = o(a_{k+1}).$$

Таким образом, при нечетных k все точки альтернанса x , где $|f(x) - R_k(x)| = \|f - R_k\|$, лежат на отрезке $[\theta_k^3, 1]$. Аналогично, при четных k они лежат на отрезке $[0, (1 - \theta_k)^3]$.

Поскольку θ_k выбирались с учетом условия (3.1), теорема 1 доказана.

4. Заключение

Итак, мы показали, что для любой неубывающей последовательности $\{m_k\}$ при некотором выборе f и $\{n_k\}$ слабая сходимость $\nu_{n_k, m_k} \xrightarrow{*} \mu$ гарантированно нарушается. Опишем некоторые связанные с этим результатом задачи. Заметим, что все утверждения, доказательства которых содержат ссылку на логику работы Лоренца [8], нужно рассматривать с учетом замечания к формуле (3.7).

4.1. О природе “патологических” подпоследовательностей. Какими характерными свойствами обладают последовательности степеней числителей n_k , для которых отсутствует слабая сходимость распределения точек $\mathcal{A}_{n_k, m_k}$ к равновесной мере? Кроо [17] установил, что необходимым свойством таких $\{n_k\}$ в полиномиальном случае ($m_k = 0$) является неравенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1.$$

Для общего случая рациональных аппроксимаций аналогичное утверждение несправедливо. К примеру, в работе [3] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in C[-1, 1]$ такая, что $\mathcal{A}_{n, n+1} \subset [-1, -1 + \varepsilon]$ для любого $n = 1, 2, \dots$.

4.2. О функциях с равномерным предельным распределением точек $\mathcal{A}_{n, m}$. Интересным представляется вопрос об описании класса функций, для которых сходимость

$$\nu_{n, m_n} \xrightarrow{*} \mu, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

имеет место при $n \in \mathbb{N}$. Для случая полиномиальных аппроксимаций ($m_n = 0$) Лоренц в [8] делает утверждение, что достаточным условием выполнения (4.1) является следующая характеристика убывания величины наилучшей аппроксимации функции f :

$$E_{n+1}(f) \leq (1 - \varepsilon_n)E_n(f), \quad \log\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right) = o(n),$$

где $E_n(f) = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|$. Он, однако, замечает, что дать более явное описание таких f затруднительно. Для случая общих рациональных аппроксимаций проблема остается открытой.

4.3. Выбор компакта. Представляют безусловный интерес и постановки подобных задач для произвольного компакта $E \in \mathbb{C}$. В [18] строится контрпример лоренцевского типа для полиномиальной аппроксимации на компакте со связным и регулярным дополнением. В [19] для компакта со связным дополнением и поло-

жительной логарифмической емкостью в полиномиальном случае рассматривается проблема пункта 4.1 (при этом изучается слабая сходимость считающих мер множеств Фекете, некоторым образом выбранных в экстремальных множествах $\mathcal{A}_{n,0}$).

4.4. Выбор нормы. Активно изучается [17], [20], [21] и подобная проблематика, связанная с аппроксимациями в пространствах L_p , $1 \leq p < \infty$. Поскольку явления альтернанса в этой ситуации нет, исследуется распределение точек интерполяции (нулей разности $f - r_{n,m}^*$). Для случая $1 < p < \infty$ в работе [20] приводится контрпример лоренцевского типа для полиномиальной аппроксимации. Для случая $p = 1$ там же приведен аналогичный контрпример для диагональных рациональных аппроксимаций ($n_k = m_k = k$) и показано, что для полиномиальных аппроксимаций построить такой же контрпример нельзя, так как расстояние между соседними точками интерполяции порядка $O(1/(n_k - m_k))$.

Автор выражает благодарность А. И. Аптекареву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Гостехиздат, М.–Л., 1947.
- [2] М. И. Кадец, “О распределении точек максимального отклонения при аппроксимации непрерывных функций многочленами”, *УМН*, **15**:1 (1960), 199–202.
- [3] P. B. Borwein, A. Kroó, R. Grothmann, E. B. Saff, “The density of alternation points in rational approximation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **105**:4 (1989), 881–888.
- [4] A. Kroó, F. Peherstorfer, “On the asymptotic distribution of oscillation points in rational approximation”, *Anal. Math.*, **19**:3 (1993), 225–232.
- [5] А. В. Луганская, “Распределение точек альтернанса при приближении непрерывной функции рациональными дробями”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 4, 50–54.
- [6] D. Braess, D. S. Lubinsky, E. B. Saff, “Behavior of alternation points in best rational approximation”, *Acta Appl. Math.*, **33**:2–3 (1993), 195–210.
- [7] H.-P. Blatt, R. Grothmann, R. Kovacheva, “Poles and alternation points in real rational Chebyshev approximation”, *Comput. Methods Funct. Theory*, **3**:1–2 (2003), 165–177.
- [8] G. G. Lorentz, “Distribution of alternation points in uniform polynomial approximation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **92**:3 (1984), 401–403.
- [9] H.-P. Blatt, “Über rationale Tschebyscheff-Approximation mehrerer Funktionen”, *J. Approximation Theory*, **9**:2 (1973), 126–148.
- [10] G. G. Lorentz, “Approximation by incomplete polynomials (problems and results)”, *Padé and Rational Approximation* (Proc. Internat. Sympos., Univ. South Florida, Tampa, Fla., 1976), Academic Press, New York, 1977, 289–302.
- [11] E. B. Saff, R. S. Varga, “On lacunary incomplete polynomials”, *Math. Z.*, **177**:3 (1981), 297–314.
- [12] J. H. B. Kemperman, G. G. Lorentz, “Bounds for polynomials with applications”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **41**:1 (1979), 13–26.
- [13] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [14] R. B. Barrar, H. L. Loeb, “On the continuity of the nonlinear Tschebyscheff operator”, *Pacific J. Math.*, **32** (1970), 593–601.
- [15] С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной*, ч. 1, Математика в монографиях: Основная сер., **1**, ОНТИ НКТП СССР, Л.–М., 1937.

- [16] W. Gehlen, “Unboundedness of the Lipschitz constants of best polynomial approximation”, *J. Approx. Theory*, **106**:1 (2000), 110–142.
- [17] A. Kroó, “On certain orthogonal polynomials, Nikolski- and Turán-type inequalities, and interpolatory properties of best approximants”, *J. Approx. Theory*, **73**:2 (1993), 162–179.
- [18] A. Kroó, E. B. Saff, “The density of extreme points in complex polynomial approximation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103**:1 (1988), 203–209.
- [19] H.-P. Blatt, R. Grothmann, R. Kovacheva, “Sequences with equi-distributed extreme points in uniform polynomial approximation”, *J. Approx. Theory*, **126**:2 (2004), 157–170.
- [20] A. Kroó, F. Peherstorfer, “Interpolatory properties of best rational L_1 -approximations”, *Constr. Approx.*, **4**:1 (1988), 97–106.
- [21] H.-P. Blatt, R. Grothmann, R. K. Kovacheva, “Sign changes in rational L_w^1 -approximation”, *Укр. матем. журн.*, **58**:2 (2006), 283–287.

А. И. Боголюбский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: bogolubs@gmail.com

Поступило

02.05.2007

Исправленный вариант

15.10.2007