Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Егорова, Критические неоднопорожжденные тотально канонические классы Фиттинга конечных групп, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 520–527

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:22:28

Критические неоднопорожденные totally канонические классы Фиттинга конечных групп

В. Е. Егорова

Пусть $\mathfrak{J}$ – класс всех конечных простых групп,

$$f: \mathfrak{J} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}.$$

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = KR(f) = (G : O^{A, A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G))$ называется каноническим классом Фиттинга со спутником f . Неоднопорожденный totally канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется критическим неоднопорожденным, если все собственные totally канонические подклассы Фиттинга из $\mathfrak{F}$ являются однопорожденными.

В работе получено полное описание строения критических неоднопорожденных totally канонических классов Фиттинга конечных групп.

Библиография: 11 названий.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс алгебр. При исследовании свойств $\mathfrak{X}$ -алгебр существенную роль играют критические $\mathfrak{X}$ -алгебры, т.е. $\mathfrak{X}$ -алгебры, не обладающие некоторым свойством θ , все собственные $\mathfrak{X}$ -подалгебры которых этим свойством обладают. В работе [1] исследованы неоднопорожденные totally локальные формации конечных групп, все собственные totally локальные подформации которых однопорождены. Установлено, что каждая такая формация совпадает с классом всех конечных π -групп, где $\pi = \{p, q\}$ для некоторых различных простых чисел p и q . В [2] и [3] подобный результат установлен для критических totally локальных классов Фиттинга конечных групп. В классе конечных разрешимых групп понятия локальных и канонических классов Фиттинга (формаций) совпадают [4], однако в неразрешимом случае – это различные понятия. В работе [5] были изучены критические неоднопорожденные totally канонические формации конечных групп.

Цель настоящей работы – установить строение критических неоднопорожденных totally канонических классов Фиттинга конечных групп.

В работе применяются в основном стандартные обозначения и определения, их можно найти в работах [4], [6]–[10]; приведем некоторые из них. Обозначим через $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{J}$ класс всех конечных групп и класс всех конечных простых групп соответственно. Пусть Ω – непустой подкласс из $\mathfrak{J}$. Обозначим через $\delta(\Omega)$ мощность множества всех попарно неизоморфных групп из Ω . Полагаем $\delta(\emptyset) = 0$. Пусть $G \in \mathfrak{J}$. Обозначим через $K(G)$ класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G . Если $K(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω -группой. Обозначим через $\mathfrak{E}_\Omega$ класс всех Ω -групп; полагаем, что $1 \in \mathfrak{E}_\Omega$. Пусть A – простая группа. Обозначим через

$\mathfrak{N}_A$ класс Фиттинга, порожденный группой A . Если $A \cong Z_p$, то $\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_p$ – класс всех конечных p -групп. Если A – простая неабелева группа, то $\mathfrak{N}_A$ состоит лишь из единичных групп и конечных прямых произведений групп, изоморфных группе A . Отметим, что $\mathfrak{N}_A$ является формацией Фиттинга. Обозначим

$$\mathfrak{N}_\Omega = \bigtimes_{A \in \Omega} \mathfrak{N}_A = (B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n : B_i \in \mathfrak{N}_A)$$

для некоторого $A \in \Omega$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}_{(A)}$ – класс всех групп, у которых каждый композиционный фактор изоморфен группе A и $\mathfrak{D}_\Omega = \bigtimes_{A \in \Omega} \mathfrak{E}_A$. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах из их области определения. Функция

$$f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$$

называется ΩR -функцией; функция

$$g: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$$

называется R -функцией. Класс Фиттинга

$$\Omega R(f, \varphi) = (G : O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$$

называется Ω -расслоенным классом Фиттинга с Ω -спутником f и с направлением φ . Класс Фиттинга

$$R(g, \varphi) = (G : G^{\varphi(A)} \in g(A) \text{ для всех } A \in K(G))$$

называется расслоенным классом Фиттинга со спутником g и с направлением φ . Отметим, что $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $A \in \mathcal{I}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ называется Ω -каноническим или, коротко, ΩK -классом Фиттинга, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $A \in \mathcal{I}$, и обозначается

$$\mathfrak{F} = \Omega K R(f) = (G : G/O^\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } O^{A, A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G)),$$

а f называется Ω -спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f – R -функция. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = K R(f) = (G : O^{A, A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G))$$

называется каноническим классом Фиттинга со спутником f [4]. 0-кратно каноническим считается всякий класс Фиттинга. При $n \geq 1$ класс Фиттинга называется n -кратно каноническим, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один спутник, все значения которого являются $(n-1)$ -кратно каноническими классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется тотально каноническим, если он n -кратно канонический для всех натуральных n .

ЛЕММА 1 [5; лемма 1]. Выполнены равенства

- а) $\mathfrak{E}_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_A)^n$;
- б) $\mathfrak{E}_\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_\Omega)^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_\Omega)^n$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда тотально Ω -расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ΩR_∞ -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \Omega R_\infty((O^\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi), \\ f(A) &= \Omega R_\infty((G^{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi) \quad \text{для всех } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X}) \end{aligned}$$

и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как класс $\mathfrak{E}$ является тотально Ω -расслоенным классом Фиттинга с направлением φ , где $\varphi \leq \varphi_0$, и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и, значит, множество L всех тотально Ω -расслоенных спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ непусто. Пусть f_1 – пересечение всех элементов из L . По лемме 12 [4] $\mathfrak{F} = \Omega R_\infty(f_1, \varphi)$. Применяя лемму 12 [4] и индукцию по n , нетрудно доказать, что пересечение тотально Ω -расслоенных классов Фиттинга является тотально Ω -расслоенным классом Фиттинга. Следовательно, f_1 – тотальный Ω -расслоенный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, причем f_1 является единственным минимальным тотальным Ω -расслоенным спутником формации $\mathfrak{F}$ в силу своего строения и $\mathfrak{F} = \Omega R_\infty(f_1, \varphi)$.

Пусть f – ΩR -функция, описанная в формулировке леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из $K(M) \subseteq K(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Это означает, что $M \in \Omega R(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$. Поскольку спутник f является тотально Ω -расслоенным с направлением φ , то класс Фиттинга $\Omega R(f, \varphi)$ – тотально Ω -расслоенный класс Фиттинга с направлением φ и ввиду $\mathfrak{F} = \Omega R_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$.

Покажем, что $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{F}$, что $A \in \Omega \cap K(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(A)} \in f_1(A)$ и $f_1(A) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap K(G)$, то $G^{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Пусть $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{X})) \setminus K(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и поэтому $G^{\varphi(A)} = 1 \in f_1(A)$. Таким образом,

$$f(A) = \Omega R_\infty((G^{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi) \subseteq f_1(A).$$

Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем

$$f(\Omega') = \Omega R_\infty((O^\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi) \subseteq f_1(\Omega').$$

Если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \emptyset \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$ и $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \Omega R(f_1, \varphi)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, и, значит, $f \in L$. Поскольку f_1 – единственный минимальный тотальный Ω -расслоенный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то из $f \leq f_1$ следует, что $f = f_1$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда тотально Ω -канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega K R_\infty(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным тотально Ω -каноническим спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \Omega K R_\infty(O^\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \\ f(A) &= \Omega K R_\infty(O^{A, A'}(G) : G \in \mathfrak{X}) \quad \text{для всех } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X}) \end{aligned}$$

и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп и $\mathfrak{F} = \Omega R_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ – тотально Ω -расслоенный класс Фиттинга с направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда $K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{X})$.

ЛЕММА 3. Пусть f – внутренний Ω -спутник ΩK -класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает внутренним Ω -спутником h таким, что

$$h(\Omega') = \mathfrak{F} \quad \text{и} \quad h(A) = h(A)\mathfrak{E}_A = f(A)\mathfrak{E}_A \quad \text{для любого } A \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega KR(f)$, где f – внутренний Ω -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. По лемме 11 [4] у класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует спутник g такой, что $g(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $g(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$. Тогда по лемме 16 [11] $\mathfrak{F}$ обладает спутником h из заключения леммы. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть f – внутренний Ω -спутник ΩK_∞ -класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает внутренним тотально Ω -каноническим спутником h таким, что $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и

$$h(A) = h(A)\mathfrak{E}_A = f(A)\mathfrak{E}_A \quad \text{для всех } A \in \Omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Канонический спутник h класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega KR(f)$ назовем приведенным, если $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = m(A)\mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \Omega$, где m – минимальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 4 [11; следствие 17]. Пусть m и h – внутренние Ω -спутники ΩK_n -классов Фиттинга (соответственно ΩK_∞ -классов Фиттинга) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является ΩK_n -классом Фиттинга (соответственно ΩK_∞ -классом Фиттинга) с внутренним Ω -спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = \mathfrak{M} \diamond (A)$ для всех $A \in K(\mathfrak{H}) \cap \Omega$ и $f(A) = m(A)$ для всех $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H})$.

ЛЕММА 5. Тотально канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ однопорожден тогда и только тогда, когда $\delta(K(\mathfrak{F})) \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ и $\mathfrak{F}$ имеет такой минимальный тотально канонический спутник f , что $f(A)$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга для любого $A \in K(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = KR_\infty(G)$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга и f – минимальный тотально канонический спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда по следствию 2.1 $f(A) = KR_\infty(O^{A, A'}(G))$ для любого $A \in K(\mathfrak{F})$ и $f(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{F})$. По следствию 2.2 $K(\mathfrak{F}) = K(G)$ и, значит, $\delta(K(\mathfrak{F})) \in \mathbb{N}_0$ и $f(A)$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга для любого $A \in K(\mathfrak{F})$.

Достаточность. Пусть $\delta(K(\mathfrak{F})) \in \mathbb{N}_0$ и $\mathfrak{F}$ имеет минимальный тотально канонический спутник f такой, что $f(A)$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга для любого $A \in K(\mathfrak{F})$. Пусть $K(\mathfrak{F}) = (A_1) \cup (A_2) \cup \dots \cup (A_r)$ и $f(A_i) = KR_\infty(B_i)$, $i \in \{1, \dots, r\}$. Пусть $C_i = O^{A_i}(B_i) \setminus A_i$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $H = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_r$ и $\mathfrak{H} = KF_\infty(H)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. По следствию 3.1 $\mathfrak{H}$ обладает приведенным тотально Ω -каноническим спутником h . Тогда $C_i \in \mathfrak{H}$ для любого $i \in \{1, \dots, r\}$. Так как $C_i = [K_i]A_i$, где K_i – база сплетения, то по следствию 3.1 $C_i \in f(A_i)\mathfrak{E}_{A_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть m – минимальный тотально канонический спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда по следствию 2.1 $O^{A_i, (A_i)'}(H) \in m(A_i)$. В силу

$$O^{A_i, (A_i)'}(H) = H^{\mathfrak{E}(A_i)\mathfrak{E}(A_i)'} = (H^{\mathfrak{E}(A_i)'})^{\mathfrak{E}(A_i)} = H^{\mathfrak{E}_{A_i}} = C_1^{\mathfrak{E}_{A_i}} \times \dots \times C_i^{\mathfrak{E}_{A_i}} \times \dots \times C_r^{\mathfrak{E}_{A_i}}$$

и нормальной наследственности $m(A_i)$ получаем $C_i^{\mathfrak{E}_{A_i}} \in m(A_i)$. Тогда $O^{A_i}(B_i) \in m(A_i)$. Значит, по следствию 3.1 $B_i \in m(A_i)\mathfrak{E}_{A_i} = h(A_i)$. Таким образом, $f(A_i) = KR_\infty(B_i) \subseteq h(A_i)$ для любого $i = \{1, \dots, r\}$. Так как $f \leq h$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Из $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, и, значит, $\mathfrak{F}$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть Ω – непустой класс простых групп и $\delta(\Omega) \in \mathbb{N}$. Тогда для любого натурального n всякий тотально канонический подкласс класса Фиттинга $(\mathfrak{D}_\Omega)^n$ является однопорожденным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = (\mathfrak{D}_\Omega)^n$, $\mathfrak{H}$ – тотально канонический подкласс класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, f и h являются минимальными тотально каноническими спутниками $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Доказательство проведем индукцией по n .

Пусть $n = 1$ и $\Omega_1 = K(\mathfrak{H})$. Тогда по следствию 2.1 $f(A) = (1)$ для любого $A \in \Omega$ и $f(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$, $\mathfrak{F} = KR(G) = KR_\infty(G)$, где $G = \times_{A \in \Omega} A \in \mathfrak{E}$. Аналогично, $h(A) = (1)$ для любого $A \in \Omega_1$ и $h(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega_1$, причем $\mathfrak{H} = KR(H) = KR_\infty(H)$, где $H = \times_{A \in \Omega_1} A \in \mathfrak{E}$.

Пусть утверждение верно для $(\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}$. Так как $\mathfrak{F} = (\mathfrak{D}_\Omega)^n = (\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}\mathfrak{D}_\Omega$, то по лемме 4 $\mathfrak{F}$ имеет такой спутник f_1 , что $f_1(A) = (\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}(1)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Отметим, что f_1 является тотально каноническим спутником $\mathfrak{F}$. Тогда

$$h(A) \subseteq f(A) \subseteq f_1(A) = (\mathfrak{D}_\Omega)^{n-1}, \quad A \in \Omega.$$

По предположению индукции $h(A)$ и $f(A)$ являются однопорожденными тотально каноническими классами Фиттинга для любого $A \in \Omega$. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ являются однопорожденными тотально каноническими классами Фиттинга. Лемма доказана.

Применяя лемму 12 [4] и следствие 10.1 [4], индукцией по n нетрудно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 7. Пусть $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ – произвольная цепь n -кратно Ω -расслоенных классов Фиттинга с направлением $\varphi \geq \varphi_0$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является n -кратно Ω -расслоенным классом Фиттинга с направлением φ .

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ – произвольная цепь тотально Ω -расслоенных классов Фиттинга с направлением $\varphi \geq \varphi_0$. Тогда $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является тотально Ω -расслоенным классом Фиттинга с направлением φ .

ЛЕММА 8. Класс $\mathfrak{E}_\Omega$ при $1 < \delta(\Omega) < \infty$ является тотально каноническим классом Фиттинга, но не является однопорожденным тотально каноническим классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 $\mathfrak{E}_\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_\Omega^n$. Так как по лемме 6 $\mathfrak{D}_\Omega$ и $(\mathfrak{D}_\Omega)^n$ являются тотально каноническими классами Фиттинга для любого $n \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{E}_\Omega$ как объединение цепи $(1) \subset \mathfrak{D}_\Omega \subset (\mathfrak{D}_\Omega)^2 \subset \dots \subset (\mathfrak{D}_\Omega)^n \subset \dots$ является тотально каноническим классом Фиттинга.

Допустим, что $\mathfrak{E}_\Omega$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга. Тогда найдется такая $G \in \mathfrak{G}\mathfrak{E}_\omega$, что $\mathfrak{E}_\Omega = KR_\infty(G)$. Так как $\mathfrak{E}_\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_\Omega)^n$,

то $G \in (\mathfrak{D}_\Omega)^r$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mathfrak{E}_\Omega = KF_\infty(G) \subseteq (\mathfrak{D}_\Omega)^r$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{E}_\Omega$ не является однопорожжденным totally каноническим классом Фиттинга. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Если $\mathfrak{F}$ – totally канонический класс Фиттинга, все собственные totally канонические подклассы Фиттинга которого однопорожждены, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$ и $\delta(\Omega) \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$. Допустим, что $\delta(\Omega) \notin \mathbb{N}_0$. Пусть $A \in \Omega$ и $\Omega_1 = \Omega \setminus (A)$. Тогда $\delta(\Omega_1) \notin \mathbb{N}_0$, причем $\mathfrak{D}_{\Omega_1} \subset \mathfrak{D}_\Omega \subseteq \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{D}_{\Omega_1}$ является однопорожжденным totally каноническим классом Фиттинга, что противоречит лемме 5. Следовательно, $\delta(\Omega) \in \mathbb{N}_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ – totally канонический класс Фиттинга и h – приведенный totally канонический спутник $\mathfrak{F}$. Если $\Omega = K(\mathfrak{F})$ и $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3.1 $\mathfrak{F}$ обладает приведенным totally каноническим спутником h , причем $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = h(A)\mathfrak{E}_A$ для всех $A \in \Omega$. По условию $\mathfrak{F} = h(A)$ для любого $A \in \Omega$. Так как $K(\mathfrak{F}) = \Omega$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\Omega$. Пусть $G \in \mathfrak{E}_\Omega \setminus \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка с таким свойством. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $M \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{E}_\Omega$, то $G/M \cong A$ для некоторой группы $A \in \Omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{E}_A = h(A)\mathfrak{E}_A = h(A) = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Omega$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ – totally канонический класс Фиттинга из $\mathfrak{E}_\Omega$, где $\Omega = (A) \cup (B)$, h – такой внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $h(A)$ – однопорожжденный totally канонический класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожжденным totally каноническим классом Фиттинга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $h(A)$ – однопорожжденный totally канонический класс Фиттинга, то $h(A) = KR_\infty(B)$, где $B \in \mathfrak{E}_\Omega$. По лемме 1 $B \in (\mathfrak{D}_\Omega)^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{A,A'}(G) \in h(A)$ и, значит,

$$\begin{aligned} G \in h(A)\mathfrak{E}_A\mathfrak{E}_{A'} &\subseteq (\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^k\mathfrak{E}_A\mathfrak{E}_{A'} \subseteq (\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^k(\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)\mathfrak{E}_{A'} \\ &= ((\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^{k+1}\mathfrak{E}_{A'}) \cap \mathfrak{E}_\Omega = ((\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^{k+1}\mathfrak{E}_{A'}) \cap ((\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^{k+1}\mathfrak{E}_\Omega) \\ &= (\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^{k+1}(\mathfrak{E}_{A'} \cap \mathfrak{E}_\Omega) \subseteq (\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^{k+2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{E}_A \times \mathfrak{E}_B)^{k+2} = (\mathfrak{D}_\Omega)^{k+2}.$$

Тогда по лемме 6 $\mathfrak{F}$ является однопорожжденным totally каноническим классом Фиттинга. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ – неоднопорожденный totally канонический класс Фиттинга, $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Если $\delta(\Omega) \geq 3$, то $\mathfrak{F}$ содержит, по крайней мере, один собственный неоднопорожденный totally канонический класс Фиттинга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Допустим, что все собственные totally канонические классы Фиттинга в $\mathfrak{F}$ однопорожждены. Тогда по лемме 9 $\delta(\Omega) \in \mathbb{N}_0$. Пусть $n = \delta(\Omega) \geq 3$, $\Omega = (A_1) \cup (A_2) \cup \dots \cup (A_n)$ и $\Omega_s = \Omega \setminus (A_s)$, $s = 1, 2, \dots, n$. Тогда

по лемме 8 $\mathfrak{E}_{\Omega_s}$ – неоднопорожденный тотально канонический класс Фиттинга и, значит, $\mathfrak{E}_{\Omega_s} \not\subseteq \mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}_{\Omega}$. Поэтому $\mathfrak{E}_{\Omega_s} \cap \mathfrak{F}$ – однопорожденный тотально канонический подкласс Фиттинга в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{E}_{\Omega_s} \cap \mathfrak{F} = KF_{\infty}(H_s)$. Из $H_s \in \mathfrak{E}_{\Omega_s}$ по лемме 1 следует, что $H \in (\mathfrak{D}_{\Omega_s})^{k_s}$ для некоторого $k_s \in \mathbb{N}$ и, значит,

$$\mathfrak{E}_{\Omega_s} \cap \mathfrak{F} = KF_{\infty}(H_s) \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega_s})^{k_s} \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^{k_s}.$$

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Если $\delta(K(G)) < n$, то $G \in \mathfrak{E}_{\Omega_s} \cap \mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^{k_s}$ для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $\delta(K(G)) = n$. Так как $\mathfrak{E}_{\Omega} \neq \mathfrak{F}$, то по лемме 10 существует $A \in \Omega$ такая, что $h(A) \subset \mathfrak{F}$, где h – приведенный тотально канонический спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $h(A)$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга и, значит,

$$h(A) = KF_{\infty}(B) \subset \mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}_{\Omega}.$$

По лемме 1 $B \in (\mathfrak{D}_{\Omega})^r$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$ и, значит, $h(A) \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^r$. Тогда $O^{A, A'}(G) \in h(A)$ и, значит,

$$\begin{aligned} G \in h(A) \mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_{A'} &\subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^r \mathfrak{E}_A \mathfrak{E}_{A'} \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^r \mathfrak{D}_{\Omega} \mathfrak{E}_{A'} \subseteq ((\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} \mathfrak{E}_{A'}) \cap \mathfrak{E}_{\Omega} \\ &= ((\mathfrak{D}_{\Omega}^{r+1} \mathfrak{E}_{A'}) \cap ((\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} \mathfrak{E}_{\Omega})) = (\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} (\mathfrak{E}_{A'} \cap \mathfrak{E}_{\Omega}) = (\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} \mathfrak{E}_{\Delta}, \end{aligned}$$

где $\Delta = \Omega \setminus (A)$. Поэтому

$$G \in \mathfrak{F} \cap ((\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} \mathfrak{E}_{\Delta}) \subseteq ((\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} \mathfrak{F}) \cap ((\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} \mathfrak{E}_{\Delta}) = (\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_{\Delta}).$$

Так как $\delta(\Delta) = n - 1$, то по доказанному выше $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_{\Delta} \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^{k_s}$ для некоторого $s = 1, 2, \dots, n$ и

$$G \in (\mathfrak{D}_{\Omega})^{r+1} (\mathfrak{D}_{\Omega})^{k_s} = (\mathfrak{D}_{\Omega})^{k_s+r+1}.$$

Пусть

$$m = \max\{k_1 + r + 1, k_2 + r + 1, \dots, k_n + r + 1\}.$$

Тогда $G \in (\mathfrak{D}_{\Omega})^m$ для любого $G \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{D}_{\Omega})^m$. По лемме 6 $\mathfrak{F}$ является однопорожденным тотально каноническим классом Фиттинга. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}$ содержит собственный неоднопорожденный тотально канонический подкласс Фиттинга. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – неоднопорожденный тотально канонический класс Фиттинга. Все собственные тотально канонические подклассы Фиттинга в $\mathfrak{F}$ однопорождены тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\Omega}$ с $\delta(\Omega) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – критический неоднопорожденный тотально канонический класс Фиттинга и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 12 $\delta(\Omega) \leq 2$. Если $\delta(\Omega) = 0$, то $\mathfrak{F} = (1)$ является однопорожденным тотально каноническим классом Фиттинга. Если $\delta(\Omega) = 1$ и $\Omega = (A)$, то $\mathfrak{F} = KR_{\infty}(A) = \mathfrak{E}_A$ – однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга.

Пусть $\delta(\Omega) = 2$ и $\Omega = (A) \cup (B)$. Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}_{\Omega}$. Пусть h – приведенный тотально канонический спутник $\mathfrak{F}$. Если $h(A) = h(B) = \mathfrak{F}$, то по лемме 10 $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\Omega}$. Получили противоречие. Пусть $h(A) \neq \mathfrak{F}$. Тогда $h(A)$ – собственный тотально канонический подкласс Фиттинга для $\mathfrak{F}$ и по условию $h(A)$ является однопорожденным тотально каноническим классом Фиттинга. Теперь по лемме 11 $\mathfrak{F}$ является однопорожденным тотально каноническим классом Фиттинга, что противоречит условию. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\Omega}$ и $\delta(\Omega) = 2$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Omega$, $\delta(\Omega) = 2$, $\Omega = (A) \cup (B)$ и $\mathfrak{H}$ – собственный totally канонический подкласс Фиттинга для $\mathfrak{F}$. По лемме 8 $\mathfrak{F}$ – неоднородный totally канонический класс Фиттинга. Допустим, что $\mathfrak{H}$ не является однородным totally каноническим классом Фиттинга. Пусть m – минимальный totally канонический спутник класса Фиттинга $\mathfrak{H}$. Тогда по лемме 3 $m(A)\mathfrak{E}_A \subseteq \mathfrak{H}$ и $m(B)\mathfrak{E}_B \subseteq \mathfrak{H}$. По лемме 11 $m(A)$ и $m(B)$ не являются однородными totally каноническими классами Фиттинга и, значит,

$$K(m(A)) = K(m(B)) = \Omega.$$

Пусть m_A – минимальный totally канонический спутник формации $m(A)$. Тогда по лемме 11 $m_A(B)$ – неоднородный totally канонический класс Фиттинга с минимальным totally каноническим спутником m_{AB} , причем $m_A(B)\mathfrak{E}_B \subseteq m(A)$ и $m_A(B)\mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A \subseteq m(A)\mathfrak{E}_A \subseteq \mathfrak{H}$, т.е. после второго шага получили $m_A(B)\mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A \subseteq \mathfrak{H}$. Продолжая этот процесс, через $2n$ шагов получим

$$m_{ABAB\dots A}(B)\mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A \cdots \mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A \subseteq \mathfrak{H},$$

где произведение $(\mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A)$ в левой части встречается множителем n раз. Отсюда следует, что $(\mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A)^n \subseteq \mathfrak{H}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. По лемме 1 $\mathfrak{E}_\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_\Omega)^n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{E}_B\mathfrak{E}_A)^n \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{H}$ – однородный totally канонический класс Фиттинга. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Сафонов, “Об одном вопросе теории totally локальных формаций конечных групп”, *Алгебра и логика*, **42:6** (2003), 727–736.
- [2] В. Г. Сафонов, “К теории totally локальных классов Фиттинга”, *Гашюцева теория классов групп и других алгебраических систем*, Тезисы докладов Межд. науч. конф., посвященной 80-летию проф. Вольфганга Гашюца, Гомель, 2000, 46–47.
- [3] О. В. Камозина, “О неоднородныхкратно Ω -верных классах Фиттинга конечных групп”, *Матем. заметки*, **79:3** (2006), 396–408.
- [4] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, “ Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп”, *Дискретная матем.*, **3** (2001), 125–144.
- [5] В. А. Ведерников, В. Е. Егорова, “Критические неоднородные totally Ω -канонические формации конечных групп”, *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, **3** (2006), 8–13.
- [6] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [7] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.
- [8] А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Беларуская навука, Минск, 1997.
- [9] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1992.
- [10] М. М. Сорокина, “О минимальных спутникахкратно Ω -расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп”, *Брянскому гос. пед. ун-ту 70 лет. Сб. науч. трудов*, БГПУ, Брянск, 2000, 199–203.
- [11] V. A. Vedernikov, “Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes”, *Algebra. Topology*, suppl. 2, Proc. Steklov Inst. Math., 2001, 217–233.

В. Е. Егорова

Московский педагогический государственный университет
E-mail: v.egorova@mail.ru

Поступило

29.12.2006

Исправленный вариант

26.06.2007