Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Грушин, Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера в тонких замкнутых трубках, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 503–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:58:47

Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера в тонких замкнутых трубках

В. В. Грушин

В работе получено асимптотическое разложение собственных значений оператора Шрёдингера с учетом магнитного поля с нулевыми условиями Дирихле в замкнутых трубках, т.е. в замкнутых изогнутых цилиндрах с внутренним кручением при равномерном сжатии поперечных сечений по малому параметру, характеризующему поперечные размеры трубки. Предложен метод сведения задачи о нахождении собственных значений к решению неявного уравнения.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. Изучению связанных состояний, возникающих в трубках, т.е. при различных возмущениях бесконечных цилиндров (и бесконечных полосок в двумерном случае), называемых также квантовыми волноводами, посвящено большое количество работ (нужно отметить, что ранее подобные вопросы рассматривались в связи с теорией волноводов и резонаторов). В работах Маслова [1], [2], Маслова и Воробьева [3] была построена асимптотика собственных функций и квазистационарных собственных значений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых. Было показано, что, подбирая нужным образом искривленность полоски и длину участка, где происходит искривление, можно добиться, чтобы существовало лишь одно собственное значение, т.е. резонатор имел лишь одну поперечную моду. Аналогичные вопросы исследовались для областей, ограниченных эквидистантными поверхностями. В работах Белова, Доброхотова, Сеницына [4], Белова, Доброхотова, Сеницына, Тудоровского [5], Белова, Доброхотова, Тудоровского [6], [7], Белова, Доброхотова, Маслова, Тудоровского [8], с помощью канонического оператора Маслова построены быстроосциллирующие решения уравнения Шрёдингера и асимптотические собственные значения в тонких трубках. Изучению связанных состояний в трубках посвящены работы Дюкло и Экснера [9], Экснера и Чеба [10], Экснера [11], Булла, Гезтези, Саймона [12], Экснера и Вугалтера [13], Борисова, Экснера, Гадыльшина и Крейсирика [14], Грушина [15]–[18], Гадыльшина [19]. В работах [10]–[11] было доказано существование собственного значения для слабо изогнутых волноводов, а в [9] была подсчитана его асимптотика по малому параметру. В [9] также рассматривалась асимптотика собственных значений в тонких трубках без внутреннего кручения. В [12] в двумерном случае рассматривались локальные деформации бесконечной полоски типа локальных растяжений в поперечных направлениях в не критической ситуации. В двумерном случае в [13] было

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00968).

показано, что в критической ситуации собственное значение может как возникать, так и не возникать. В случае, когда собственное значение все же возникает, его асимптотика была построена в [14], [19]. В [15] были исследованы вопросы возникновения собственного значения и его асимптотики при возмущении волновода малым локализованным дифференциальным оператором второго порядка. В качестве примера на применение полученных общих формул рассматривались и деформации типа локальных растяжений в поперечных направлениях в некритическом случае, а в [17] дополнительно исследовался критический случай. В [16] рассматривались возмущения, связанные со слабым изгибанием и внутренним кручением волновода. В [18] изучалось асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках с внутренним кручением.

В данной статье рассматривается асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера с нулевыми условиями Дирихле с учетом магнитного поля в замкнутой изогнутой трубке с внутренним кручением (точное определение см. в п. 2) при равномерном сжатии поперечных сечений. Основной результат состоит в получении асимптотической формулы для собственных значений по малому параметру, характеризующему поперечные размеры трубки (формула (2.4)). Для получения асимптотической формулы применяется метод, состоящий в сведении задачи о нахождении собственных значений к решению некоторого неявного уравнения (см. предложение 2), являющийся модификацией метода, использовавшегося в [18].

2. Формулировка основного результата. Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется гладкая несамопересекающаяся замкнутая кривая Γ , заданная уравнением $x = X(s)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, где s – длина дуги (со знаком) кривой Γ , отсчитанная от фиксированной точки $x_0 \in \Gamma$, $X(s)$ – периодическая функция с периодом l (т.е. длина кривой равна l). В дальнейшем будет удобно считать, что $s \in S_l^1$, где S_l^1 – окружность длины l . Через $\mathbf{e}_1(s)$ будем обозначать единичный касательный вектор $\mathbf{e}_1 = \dot{X}(s)$ (точка здесь и далее означает производную по s). Как и в [4], будем предполагать, что в точках кривой Γ заданы векторы $\mathbf{e}_2(s)$, $\mathbf{e}_3(s)$ класса C^∞ , причем $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ образуют правый ортонормированный репер.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (q_2, q_3) имеется связная ограниченная область M с бесконечно гладкой границей ∂M . Введем в окрестности кривой Γ систему координат (s, q_2, q_3) , так что

$$x = X(s) + \varepsilon q_2 \mathbf{e}_2 + \varepsilon q_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.1)$$

Трубкой будем называть область $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^3$, которая получается как образ тора $\Omega = S_l^1 \times M$ при отображении (2.1). Здесь малый параметр ε введен для того, чтобы иметь возможность рассматривать “тонкие” трубки.

Будем предполагать, что отображение (2.1) в $\tilde{\Omega}$ есть диффеоморфизм, что заведомо выполняется при достаточно малых ε . Таким образом, (s, q_2, q_3) представляют собой криволинейные координаты в $\tilde{\Omega}_\varepsilon$.

Сформулируем основной результат статьи. В трубке $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ рассмотрим оператор Шрёдингера

$$\begin{aligned} H &= (-i\partial_x - \mathbf{A})^2 + V + V_{\text{int}} \\ &= (-i\partial_{x_1} - A_1)^2 + (-i\partial_{x_2} - A_2)^2 + (-i\partial_{x_3} - A_3)^2 + V + V_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Потенциал $V(x, \varepsilon)$ и компоненты $A_j(x, \varepsilon)$ вектор-потенциала $\mathbf{A}(x, \varepsilon)$ будем считать гладкими (класса C^∞) вещественными функциями, когда x находится в окрестности

кривой Γ и $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$, вещественный потенциал V_{int} имеет вид $w(q_2, q_3)/\varepsilon^2$, $w \in C^\infty(\bar{M})$, а H будем рассматривать как самосопряженный оператор с существенной областью определения, состоящей из гладких (класса C^∞) функций ψ в $\bar{\Omega}_\varepsilon$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле. Из общей теории эллиптических краевых задач следует, что областью определения оператора H является пространство $\mathcal{H}_D^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, состоящее из функций соболевского пространства $\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле, т.е. обращающихся в нуль на границе области $\bar{\Omega}_\varepsilon$ (соответствующее рассуждение приведено в [15], см. также [20; гл. 2, п. 8.4]). Напомним, что $u \in \mathcal{H}^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, если функция u и ее обобщенные производные до второго порядка включительно принадлежат $L_2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ (см., например, [21]).

Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы получить асимптотическую формулу для поведения собственных значений оператора H при $\varepsilon \rightarrow +0$. Особую роль в этой формуле играет некоторый одномерный оператор Шрёдингера T_0 , который, следуя терминологии из [7], будем называть *редуцированным оператором* (в [22] аналогичный оператор называется эффективным гамильтонианом). Чтобы определить этот оператор, обозначим через $\nu_0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_n \leq \dots$ собственные значения оператора $-\Delta_D^M + w$, ($-\Delta_D^M$ – оператор Лапласа в области M), а через $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ – соответствующую полную ортонормированную систему собственных функций оператора $-\Delta_D^M + w$. Функции χ_n можно выбрать вещественными. Хорошо известно, что основное собственное значение ν_0 невырождено и χ_0 можно выбрать положительной в M (см., например, [23]). Введем оператор проекции момента на первую ось $L = -i(q_2 \partial_{q_3} - q_3 \partial_{q_2})$ и обозначим через $(L^2)_{00}$ среднее значение L^2 в состоянии χ_0 , т.е. $(L^2)_{00} = (L^2 \chi_0, \chi_0)_M$, где $(\cdot, \cdot)_M$ – скалярное произведение в $L_2(M)$. Аналогичное обозначение будет использоваться и для других операторов.

Положим $\mathcal{A}_1^0(s) = \mathbf{A}(X(s), 0) \cdot \mathbf{e}_1(s)$, $\mathcal{V}^0(s) = V(X(s), 0)$, $\zeta = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3$, $\gamma(s)$ – кривизна кривой Γ и рассмотрим одномерный оператор Шрёдингера

$$T_0 = (-i\partial_s - \mathcal{A}_1^0(s))^2 - \frac{\gamma^2(s)}{4} + \zeta^2(s)(L^2)_{00} + \mathcal{V}^0(s) \quad (2.3)$$

с областью определения $\mathcal{H}_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$ (пространство l -периодических функций, локально принадлежащих $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$). Пространство $\mathcal{H}_{\text{per}}^2(\mathbb{R})$ будем обозначать также $\mathcal{H}^2(S_l^1)$.

Пусть μ_k , $k = 1, \dots$, – собственные значения оператора T_0 , а $\Phi_k(s)$ – соответствующие нормированные собственные функции. Спектр оператора T_0 дискретный с собственными значениями не более, чем второй кратности, он обозначается через $\sigma(T_0)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $W \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область на комплексной плоскости и $\bar{W}$ не содержит точек из $\sigma(T_0)$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в $W + \nu_0/\varepsilon^2$ нет собственных значений оператора H .*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть μ_k – некоторое простое собственное значение редуцированного оператора T_0 и W_k – такая ограниченная область, содержащая μ_k , что $\bar{W}_k$ не содержит других точек из $\sigma(T_0)$. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение $\lambda_k(\varepsilon)$ оператора H , принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$. Это собственное значение невырождено и $\mu_k(\varepsilon) = \lambda_k(\varepsilon) - \nu_0/\varepsilon^2$ имеет предел μ_k при $\varepsilon \rightarrow +0$. Если положить $\mu_k(0) = \mu_k$, то $\mu_k(\varepsilon) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$.*

Доказательство теорем 1 и 2 будет дано в пп. 3–7.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для собственного значения $\lambda_k(\varepsilon)$ из теоремы 2 при $\varepsilon \rightarrow +0$ имеет место асимптотическое разложение

$$\lambda_k(\varepsilon) \sim \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} + \mu_k + \sum_{n=1}^{\infty} d_{k,n} \varepsilon^n. \quad (2.4)$$

Действительно, (2.4) следует из формулы Тейлора, поскольку в силу теоремы 2 функция $\mu_k(\varepsilon)$ бесконечно дифференцируема при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$. Коэффициент $d_{k,1}$ будет вычислен в конце п. 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве теорем 1 и 2 используется не конкретный вид операторов b и b' из (3.5), а только их свойства: это симметрические операторы второго порядка, причем b не содержит производной ∂_s^2 и $b_{00} = 0$. Явный вид этих операторов нужен лишь при вычислении конкретных значений коэффициентов в разложении (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случай кратного собственного значения оператора T_0 обсуждается в п. 8.

В заключение этого пункта приведем пример, в котором все собственные значения оператора T_0 простые.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим оператор $H = -\Delta + x_1$, а в качестве кривой Γ – окружность радиуса R на координатной плоскости (x_1, x_2) с центром в начале координат. В таком случае $X(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R), 0)$, трубка $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ представляет собой внутренность тора, а редуцированный оператор (2.3) имеет вид

$$T_0 = -\partial_s^2 - \frac{1}{4R^2} + R \cos\left(\frac{s}{R}\right).$$

Собственные функции этого оператора являются периодическими решениями уравнения Матье с периодом $2\pi R$, а решения уравнения Матье с заданным периодом могут образовывать не более, чем одномерное пространство (см. [23; гл. 13, пример 1 к теореме 13.90]), следовательно, все собственные значения оператора T_0 простые.

3. Оператор H в координатах, связанных с трубкой. В этом пункте мы получим выражение для оператора H в координатах (2.1). Сначала перейдем от x к координатам $y = (y_1, y_2, y_3)$, так что $x = X(y_1) + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3$, причем $y_1 = s$. Положим

$$h = 1 + y_2(\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_1) + y_3(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1), \quad L = -i(y_2 \partial_{y_3} - y_3 \partial_{y_2}), \quad \zeta = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (3.1)$$

В координатах (y_1, y_2, y_3) оператор H приобретает вид

$$\begin{aligned} H = & h^{-1}((-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta \mathcal{M}_1)h^{-1}(-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta \mathcal{M}_1) \\ & + (-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2)h(-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2) + (-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3)h(-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3)) \\ & + \mathcal{V} + \frac{1}{\varepsilon^2} w\left(\frac{y_2}{\varepsilon}, \frac{y_3}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mathcal{M}_1 = y_2 \mathcal{A}_3 - y_3 \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A} = J^*(y)A(x(y), \varepsilon)$, J^* – транспонированная матрица Якоби, $dx = J dy$, $\mathcal{V} = V(x(y), \varepsilon)$. Эта формула аналогична известному выражению оператора Лапласа в криволинейной системе координат через метрический тензор

(ср. [4]–[7], [22]). Подсчет метрики в координатах (y_1, y_2, y_3) приводит к простому выражению для компонент соответствующих метрических тензоров

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & -\zeta y_3 & +\zeta y_2 \\ -\zeta y_3 & 1 & 0 \\ +\zeta y_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 & -g_{12} & -g_{13} \\ -g_{12} & g + g_{12}^2 & g_{12}g_{13} \\ -g_{13} & g_{12}g_{13} & g + g_{13}^2 \end{pmatrix},$$

где $g = h^2$, $g_{11} = g + g_{12}^2 + g_{13}^2$, причем $g = \det(g_{ij})$ и h является якобианом при переходе к координатам (y_1, y_2, y_3) . С учетом равенства $\partial_y \cdot (hJ^{-1}) = 0$, которое проверяется непосредственным дифференцированием, получаем

$$\begin{aligned} (-i\partial_x - A) \cdot (-i\partial_x - A) &= J^{*-1}(-i\partial_y - J^*A) \cdot J^{*-1}(-i\partial_y - J^*A) \\ &= \frac{1}{h}(-i\partial_y - J^*A) \cdot hJ^{-1}J^{*-1}(-i\partial_y - J^*A) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i,j=1}^3 (-i\partial_{y_i} - \mathcal{A}_i) h g^{ij} (-i\partial_{y_j} - \mathcal{A}_j), \end{aligned}$$

откуда после несложных преобразований и получается формула (3.2).

Если $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – репер Френэ, то $\zeta = \kappa$, где κ – кручение кривой Γ , а в общем случае $\zeta = \kappa + \phi$, где ϕ – угол поворота базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ относительно репера Френэ. Величину $\zeta(s)$ будем называть *внутренним кручением трубки*. Формула (3.2) при $A \equiv 0$ использовалась в [16], [18].

Теперь перейдем от H к оператору $\tilde{H} = h^{1/2} H h^{-1/2}$, который запишем в координатах (y_1, y_2, y_3) . Представив $\tilde{H}$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \left(-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta \mathcal{M}_1 + \frac{((-i\partial_{y_1} - \zeta L)h)}{2h} \right) \\ &\quad \times h^{-2} \left(-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta \mathcal{M}_1 - \frac{((-i\partial_{y_1} - \zeta L)h)}{2h} \right) \\ &\quad + \left(-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2 - \frac{(i\partial_{y_2}h)}{2h} \right) \left(-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2 + \frac{(i\partial_{y_2}h)}{2h} \right) \\ &\quad + \left(-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3 - \frac{(i\partial_{y_3}h)}{2h} \right) \left(-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3 + \frac{(i\partial_{y_3}h)}{2h} \right) + \mathcal{V} + \frac{1}{\varepsilon^2} w \left(\frac{y_2}{\varepsilon}, \frac{y_3}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

и используя соотношение $(\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_1)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1)^2 = (\dot{\mathbf{e}}_1, \dot{\mathbf{e}}_1)^2 = \gamma^2$, где $\gamma(s)$ – кривизна кривой Γ , после несложных вычислений получаем формулу

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= (-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta \mathcal{M}_1) \frac{1}{h^2} (-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta \mathcal{M}_1) \\ &\quad + (-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2)^2 + (-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3)^2 - \frac{\gamma^2}{4h^2} - \frac{((i\partial_{y_1} + \zeta L)^2 h)}{2h^3} + \frac{5}{4} \frac{((i\partial_{y_1} + \zeta L)h)^2}{h^4} \\ &\quad + \mathcal{V} + \frac{1}{\varepsilon^2} w \left(\frac{y_2}{\varepsilon}, \frac{y_3}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Отметим, что формула (3.3) при $\zeta(s) \equiv 0$ и $A \equiv 0$ имеется в [9], а при $A \equiv 0$ – в [18]. Перейдем от (y_1, y_2, y_3) к координатам $(q_1, q_2, q_3) = (y_1, \varepsilon^{-1}y_2, \varepsilon^{-1}y_3)$. Представим

$\mathcal{A}_j(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)$ и $\mathcal{V}(y_1, y_2, y_3, \varepsilon)$ в виде

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^0(q_1) + \varepsilon V^1(q_1, q_2, q_3, \varepsilon),$$

$$\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j^0(q_1) + \varepsilon \mathcal{A}_j^1(q_1) + \varepsilon \mathcal{A}_j^2(q_1) q_2 + \varepsilon \mathcal{A}_j^3(q_1) q_3 + \varepsilon^2 \mathcal{A}_j^4(q_1, q_2, q_3, \varepsilon), \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь $\mathcal{V}^0(q_1) = V(X(q_1), 0)$, $\mathcal{A}_j^0(q_1) = A(X(q_1), 0) \cdot \mathbf{e}_j$. Действительно, обозначив через $\mathbf{e}'_j$ координатные орты в системе координат (y_1, y_2, y_3) , получаем

$$\mathcal{A}_j^0(y_1) = \mathcal{A}(y_1, 0, 0, 0) \cdot \mathbf{e}'_j = J^* A(X(y_1, 0)) \cdot \mathbf{e}'_j = A(X(y_1, 0)) \cdot \mathbf{e}_j.$$

Ясно, что для достаточно малых ε оператор $\tilde{H}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varepsilon = & (-i\partial_{q_1} - \mathcal{A}_1^0(q_1) - \zeta L)^2 + \mathcal{V}^0(q_1) + \frac{1}{\varepsilon^2} w(q_2, q_3) - \frac{\gamma^2(q_1)}{4} \\ & + \sum_{j=2}^3 (-i\varepsilon^{-1} \partial_{q_j} - \mathcal{A}_j^0(q_1) - \varepsilon \mathcal{A}_j^1(q_1) - \varepsilon \mathcal{A}_j^2(q_1) q_2 - \varepsilon \mathcal{A}_j^3(q_1) q_3)^2 + \varepsilon \tilde{b}(q, -i\partial_q, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $\tilde{b}$ – дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми по (q, ε) коэффициентами в $\bar{\Omega} \times [0, \varepsilon_0)$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$. Чтобы еще упростить $\tilde{H}_\varepsilon$, перейдем к оператору $H' = \tilde{h}^{-1} \tilde{H}_\varepsilon \tilde{h}$, где

$$\tilde{h} = \exp \left(i\varepsilon \left((\mathcal{A}_2^0(q_1) + \varepsilon \mathcal{A}_2^1(q_1)) q_2 + \varepsilon \mathcal{A}_2^2(q_1) \frac{q_2^2}{2} + (\mathcal{A}_3^0(q_1) + \varepsilon \mathcal{A}_3^1(q_1)) q_3 + \varepsilon \mathcal{A}_3^3(q_1) \frac{q_3^2}{2} \right) \right).$$

В результате получим оператор

$$\begin{aligned} H'_\varepsilon = & (-i\partial_{q_1} - \mathcal{A}_1^0(q_1))^2 - \varepsilon^{-2} (\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w(q_2, q_3)) - 2\{-i\partial_{q_1} - \mathcal{A}_1^0(q_1), \zeta\}L \\ & + \zeta^2 L^2 + L_1 + \mathcal{V}^0(q_1) - \frac{1}{4} \gamma^2(q_1) + \varepsilon b'(q, -i\partial_q, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $L_1 = 2i(\mathcal{A}_2^3(q_1) q_3 \partial_{q_2} + \mathcal{A}_3^2(q_1) q_2 \partial_{q_3})$, $\{C, D\} = (CD + DC)/2$ – симметризация операторов. Заменяя q_1 на s и обозначив $b = L_1 - 2\{-i\partial_s - \mathcal{A}_1^0(s), \zeta\}L$, запишем оператор H'_ε в виде

$$H'_\varepsilon = T_0 - \varepsilon^{-2} (\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w(q_2, q_3)) + b + \varepsilon b'(s, q_2, q_3, -i\partial_s, -i\partial_{q_2}, -i\partial_{q_3}, \varepsilon). \quad (3.5)$$

Именно эта формула и будет использоваться в дальнейшем. Отметим, что $b_{00} = 0$ в силу антисимметричности операторов $q_3 \partial_{q_2}$ и $q_2 \partial_{q_3}$ относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_M$.

Так как H'_ε унитарно эквивалентен исходному оператору H , то собственные значения этих операторов совпадают. Переход от оператора H к H'_ε равносильен переходу от координат x к координатам (s, q_2, q_3) и замене функции ψ в уравнении $H\psi = \lambda\psi$ на $h^{-1/2} \tilde{h}u$.

4. Доказательство теоремы 1. Для построения резольвенты оператора H'_ε запишем уравнение

$$\varepsilon^2 (H'_\varepsilon - \lambda)u = f \quad (4.1)$$

(H'_ε определяется формулой (3.4) или формулой (3.5)) в матричном виде, используя разложение пространства $L_2(M)$ в прямую сумму $L_2(M) = [\chi_0] \oplus [\chi_0]^\perp$, где $[\chi_0] -$

подпространство, натянутое на вектор χ_0 , а $[\chi_0]^\perp$ – его ортогональное дополнение. Через P_0 и P_1 будем обозначать проекторы на эти подпространства. Так как функции из $C^\infty(\bar{\Omega})$, обращающиеся в нуль на $\partial\Omega$, плотны в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, то функции для дальнейших оценок можно брать из $C^\infty(\bar{\Omega})$, после чего полученные оценки распространять на все пространство $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ с помощью операции замыкания. Разложив функцию $u(s, q') \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ($u(s, q') = 0$ на $\partial\Omega$) при каждом s в ряд по ортонормированной системе $\{\chi_n\}$, получим

$$u(s, q') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) \chi_n(q'), \quad C_n(s) = (u(s, q'), \chi_n(q'))_M.$$

Здесь и далее $q' = (q_2, q_3)$. Пусть $\mathcal{L}_0$ – подпространство в $L_2(\Omega)$, состоящее из функций $v(s) \chi_0(q')$, где $v(s) \in L_2(S_l^1)$, а $\mathcal{L}_0^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_0$; соответственно, функция u раскладывается в сумму $u = u_0 + u_1$. Ясно, что

$$u_0(s, q') = C_0(s) \chi_0(q'), \quad u_1(s, q') = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s) \chi_n(q'), \quad (4.2)$$

причем

$$u_0(s, q') = P_0 u(s, q'), \quad u_1(s, q') = P_1 u(s, q') = u(s, q') - P_0 u(s, q')$$

при каждом s . Аналогичным образом функция f раскладывается в сумму $f = f_0 + f_1$.

Как следует из теории эллиптических краевых задач (см., например, [20], [21]), оператор $-\Delta_D^\Omega + w(q') - \nu_0 + 1$ осуществляет изоморфизм между $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, следовательно,

$$\left(\int_{\Omega} |(\Delta - w(q') + \nu_0 - 1)u|^2 ds dq' \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^l |\ddot{C}_n(s) - (\nu_n - \nu_0 + 1)C_n(s)|^2 ds \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

есть эквивалентная норма в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$.

Положим

$$\mu = \lambda - \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} \quad (4.4)$$

и введем обозначения

$$b_{00}C_0 = (b(C_0\chi_0), \chi_0)_M, \quad b_{01}u_1 = (bu_1, \chi_0)_M, \quad b_{10}C_0 = P_1 b(C_0\chi_0), \quad b_{11}u_1 = P_1 bu_1,$$

где b определено в (3.5). Аналогичные обозначения будем использовать и для других операторов. Подставив разложение $u = u_0 + u_1$ в (4.1), применив при каждом s проекторы P_0 и P_1 и перейдя от $C_0(s)$ к $v_0(s) = \varepsilon^2 C_0(s)$, получим систему

$$\begin{aligned} (T_0 - \mu)v_0 + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_0(s), \\ -\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 - (\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1 + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0 \\ &+ \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1 = f_1(s, q'), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_{00} &= b'_{00}, \quad B_{01} = \varepsilon b_{01} + \varepsilon^2 b'_{01}, \quad B_{10}^0 = b_{10}, \quad B_{10} = b'_{10}, \\ B_{11} &= \varepsilon \left(2\{i\partial_s, \mathcal{A}_1^0\} + (\mathcal{A}_1^0(s))^2 - \frac{\gamma^2(s)}{4} + \zeta^2(s)(L^2)_{00} + \mathcal{V}^0(s) \right) - \varepsilon\mu + \varepsilon b_{11} + \varepsilon^2 b'_{11}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

При выводе системы (4.5) использовалось соотношение $b_{00} = 0$.

Левые части системы (4.5) определяют непрерывный оператор

$$A: \mathcal{H}^2(S_l^1) \times \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \rightarrow L_2(S_l^1) \times \mathcal{L}_0^\perp,$$

и для доказательства существования резольвенты оператора H'_ε при заданных ε и λ достаточно установить, что A является изоморфизмом. Оператор A представляется в виде суммы $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 определяется из (4.5), если все B_{ij} положить равными нулю, а B определяется матричными элементами $B_{i,j}$. Если $\mu \notin \sigma(T_0)$ ($\sigma(T_0)$ – спектр оператора T_0), то решение системы (4.5) без операторов B_{ij} можно получить в явном виде с помощью разложения (4.2) и разложения коэффициентов $C_n(s)$ из (4.2) в ряд Фурье

$$C_n(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{nk} \frac{1}{\sqrt{l}} e^{2\pi i k s / l}.$$

В результате получим, что оператор A_0^{-1} определяется формулами

$$v_0 = (T_0 - \mu)^{-1} f_0, \quad C_{nk} = \frac{(f_1 - B_{10}^0 v_0)_{nk}}{\varepsilon^2 \xi_k^2 + \nu_n - \nu_0'}, \quad (4.7)$$

где $\xi_k = 2\pi k / l$, а $(f_1 - B_{10}^0 v_0)_{nk}$ – коэффициенты соответствующего разложения для $f_1 - B_{10}^0 v_0$.

Из известного равенства $\|(T_0 - \mu)^{-1}\| = \text{dist}(\mu, \sigma(T_0))$, справедливого для любых самосопряженных операторов (см., например, [23; гл. 6 п. 1, пример 2]), при $\mu \in W$, для v_0 следует оценка $\|v_0\| \leq c \|f_0\|$ с константой c , не зависящей от $f_0 \in L_2(S_l^1)$. Из стандартного неравенства $\|v_0\|_2 \leq c(\|T_0 v_0\| + \|v_0\|)$ при $\mu \in W$ теперь получается оценка

$$\|v_0\|_2 \leq c \|f_0\|, \quad (4.8)$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{H}^2(S_l^1)$, а через c здесь и далее каждый раз обозначается новая константа. Из (4.7), (4.8) и того, что (4.3) является эквивалентной нормой в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, получаем, что оператор A_0 при $\mu \in W$ для $\varepsilon > 0$ является изоморфизмом.

При $\mu \in W$, где W определено в формулировке теоремы 1, будем рассматривать εB как возмущение, и будем строить A^{-1} в виде ряда Неймана

$$A^{-1} = A_0^{-1} + A_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon B A_0^{-1})^n. \quad (4.9)$$

Ясно, что теорема 1 будет доказана, если мы установим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что норма оператора BA_0^{-1} равномерно ограничена при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\mu \in W$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем используются только некоторые свойства операторов B_{10}^0 , $B_{i,j}$, $i, j = 0, 1$, а не их конкретный вид. Так B_{00}, B_{10}^0, B_{10} – это дифференциальные операторы второго порядка, т.е. суммы $1, \partial_s, \partial_s^2$, умноженных на некоторые коэффициенты. Коэффициенты B_{00} являются обычными функциями от (s, ε) , коэффициенты B_{10}^0 и B_{10} – функциями со значениями в $\mathcal{H}_D^2(M) \cap [\chi_0]^\perp$. А B_{01} и B_{11} – это ε -дифференциальные операторы, т.е. суммы $1, \varepsilon \partial_s, \varepsilon^2 \partial_s^2$, умноженных на коэффициенты, но эти коэффициенты представляют собой функции от (s, μ, ε) со значениями в пространстве линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{H}_D^2(M) \cap [\chi_0]^\perp$.

или в пространстве линейных непрерывных операторов в $\mathcal{H}_D^2(M) \cap [\chi_0]^\perp$ соответственно. При некотором $\varepsilon_0 > 0$ все эти коэффициенты бесконечно дифференцируемым образом зависят от (s, μ, ε) при всех $s \in S_l^1$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$.

Ввиду указанной структуры операторов B_{ij} естественно воспользоваться нормами с параметром, аналогичным использовавшимся в [24]. Введем в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ норму, зависящую от параметра ε :

$$\|u\|_{2,\varepsilon} = \|\varepsilon^2 \partial_s^2 u\| + \sum_{j=2}^3 (\|\varepsilon \partial_s \partial_{q_j} u\| + \|\partial_{q_j} u\|) + \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \|\partial_{q_i} \partial_{q_j} u\| + \|\varepsilon \partial_s u\| + \|u\|, \quad (4.10)$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$, а $\|\cdot\|_{2,1}$ – это обычная норма в $\mathcal{H}^2(\Omega)$.

С некоторой константой c выполняется оценка

$$\|u_1\|_{2,\varepsilon} \leq c \|\varepsilon^2 \partial_s^2 + \partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0\| u_1\| \quad (4.11)$$

для всех $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon \partial_s \partial_{q_j} u_1\|^2 + \|\varepsilon \partial_s u_1\|^2 \\ &= (\varepsilon \partial_s \partial_{q_j} u_1, \varepsilon \partial_s \partial_{q_j} u_1) + (\varepsilon \partial_s u_1, \varepsilon \partial_s u_1) = (\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1, \partial_{q_j}^2 u_1) - (\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1, u_1) \\ &\leq (\|\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1\|^2 + \|\partial_{q_j}^2 u_1\|^2 + \|u_1\|^2) \leq c^2 \left(\|\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1\|^2 + \int_0^l \|u_1\|_{\mathcal{H}^2(M)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

а остальные слагаемые в (4.10) оцениваются через $(\int_0^l \|u_1\|_{\mathcal{H}^2(M)}^2 ds)^{1/2}$. Напомним, что c каждый раз означает новую константу. С помощью обычной эллиптической оценки

$$\|u_1\|_{\mathcal{H}^2(M)} \leq c \|(\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0) u_1\|_{L_2(M)}$$

теперь получаем

$$\|u_1\|_{2,\varepsilon}^2 \leq c^2 (\|\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1\|^2 + \|(\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0) u_1\|^2). \quad (4.12)$$

Разложив $u_1(s, q')$ в ряд по ортонормированной системе $l^{-1/2} \chi_n(q') \exp(2\pi i ks/l)$ и обозначив, как и прежде, коэффициенты этого разложения через C_{nk} , с помощью равенства Парсеваля получим, что

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1\|^2 + \|(\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0) u_1\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon^4 \xi_k^4 + (\nu_n - \nu_0)^2) |C_{nk}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon^2 \xi_k^2 + \nu_n - \nu_0)^2 |C_{nk}|^2 \\ &= \|\varepsilon^2 \partial_s^2 + \partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0\| u_1\|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) получаем оценку (4.11).

Из (4.7), (4.8), (4.11) ясно, что для решений системы $A_0(v_0, u_1) = (f_0, f_1)$ с некоторой константой c_1 выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \leq c_1 (\|f_0\| + \|f_1\|) \quad (4.14)$$

для всех $v_0 \in \mathcal{H}^2(S_l^1)$, $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$, $\mu \in W$, $\varepsilon > 0$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{H}^2(S_l^1)$.

В силу отмеченных выше свойств операторов B_{ij} при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка

$$\|B(v_0, u_1)\| \leq c_2(\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}). \quad (4.15)$$

Так как $(v_0, u_1) = A_0^{-1}(f_0, f_1)$, то из (4.14) и (4.15) теперь получаем, что

$$\|BA_0^{-1}(f_0, f_1)\| \leq c_3(\|f_0\| + \|f_1\|),$$

где $c_3 = c_1 c_2$. Тем самым, утверждение леммы доказано.

5. Сведение задачи о нахождении собственных значений оператора H к неявному уравнению. Пусть μ_k и W_k выбраны так, как указано в формулировке теоремы 2. Рассмотрим задачу: по заданным (f_0, f_1, d) найти решение (v_0, u_1, g) системы

$$\begin{aligned} (T_0 - \mu)v_0 + g\Phi_k + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_0(s), \\ -\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 - (\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1 + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0 \\ + \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1 &= f_1(s, q'), \quad (v_0, \Phi_k) = d, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $B_{i,j}$, $i, j = 0, 1$, определяются формулами (4.6), $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(S_l^1)$, а d и g – числа. Подобные задачи рассматривались в [25] в связи с исследованием гипоеллиптичности некоторых операторов. Через A теперь обозначим соответствующий оператор

$$A: \mathcal{H}^2(S_l^1) \times \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C} \rightarrow L_2(S_l^1) \times \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ оператор A при всех $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ является изоморфизмом и с некоторой константой c выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} + |g| \leq c(\|f_0\| + \|f_1\| + |d|). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем A в виде $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 – оператор, отвечающий системе (5.1) без слагаемых с $B_{i,j}$, $i, j = 0, 1$. Обратный оператор к A_0 задается явными формулами. Если $T_0 - \mu$ рассматривать как оператор из $\mathcal{H}^2(S_l^1) \cap [\Phi_k]^\perp$, в $[\Phi_k]^\perp$, то для $\mu \in W_k$ он имеет обратный оператор, который будем называть редуцированной резольвентой и обозначать $\hat{R}_k(\mu)$. Формулы для обращения оператора A_0 имеют вид

$$v_0 = \hat{R}_k(\mu)(f_0 - (f_0, \Phi_k)\Phi_k) + d\Phi_k, \quad g = (\mu - \mu_k)d + (f_0, \Phi_k), \quad (5.3)$$

а u_1 определяется формулой из (4.7). Как и в п. 4, отсюда получаем, что A_0 при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon$ является изоморфизмом и для решений системы $A_0(v_0, u_1, g) = (f_0, f_1, d)$ с некоторой константой c_1 выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} + |g| \leq c_1(\|f_0\| + \|f_1\| + |d|), \quad (5.4)$$

аналогичная оценке (4.14). Вместо (4.15) теперь получаем

$$\|B_{00}v_0 + B_{01}u_1\| + \|B_{10}v_0 + B_{11}u_1\| \leq c_2(\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}) \quad (5.5)$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым ε_0 . Отсюда получаем, что для решений системы (5.1) при $\mu \in W_k$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка (5.2).

Будем обозначать g из системы (5.1) через $g(\mu, \varepsilon, f_0, f_1, d)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Число λ , принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где W_k и ε_0 указаны в предложении 1, тогда и только тогда является собственным значением оператора H_ε , когда

$$G(\mu, \varepsilon) = 0, \quad (5.6)$$

где μ связано с λ формулой (4.4), $G(\mu, \varepsilon) = g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$. При вещественных μ функция $G(\mu, \varepsilon)$ вещественна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что λ является собственным значением оператора H'_ε тогда и только тогда, когда система (5.1) при $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ имеет такое решение, что

$$\|u_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \neq 0 \quad \text{и} \quad g(\mu, \varepsilon, 0, 0, d) = 0.$$

При этом число d должно быть отличным от нуля, поскольку из равенств $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 0$ в силу изоморфности оператора A должно следовать, что $u_0 = 0$, $u_1 = 0$. В силу линейности задачи $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, d) = g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)d$, и мы получаем, что собственные значения оператора H'_ε определяются уравнением (5.6). Вещественность функции $G(\mu, \varepsilon)$ при вещественных μ (даже в более общей ситуации) доказывается в п. 8. Тем самым, предложение 2 доказано.

Нам понадобится также утверждение о гладкости решений системы (5.1). Введем пространство $\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)$, состоящее из функций u , для которых $\partial_s^j u \in \mathcal{H}_D^2(\Omega)$, $j = 0, \dots, m$, и при $\varepsilon > 0$ определим норму, зависящую от ε , в этом пространстве:

$$\|u\|_{(2,m),\varepsilon} = \sum_{j=0}^m \|\partial_s^j u\|_{2,\varepsilon}.$$

При $\varepsilon = 1$ получаем обычную норму. Аналогичным образом определим пространство $\mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega)$, состоящее из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{(0,m)} = \sum_{j=0}^m \|\partial_s^j f\|,$$

так что $\mathcal{H}^{(0,0)}(\Omega) = L_2(\Omega)$. Оператор A можно рассматривать как отображение

$$A: \mathcal{H}^{2+m}(S_l^1) \times \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}^m(S_l^1) \times \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C}. \quad (5.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого целого $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_m > 0$ и c_m , что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ оператор A в (5.7) является изоморфизмом, а если имеется решение системы (5.1)

$$v_0 \in \mathcal{H}^2(S_l^1), \quad u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp, \quad f_0 \in \mathcal{H}^m(S_l^1), \quad f_1 \in \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp,$$

то

$$v_0 \in \mathcal{H}^{2+m}(S_l^1), \quad u_1 \in \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \quad (5.8)$$

и выполняется оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_m(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|). \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как при доказательстве предложения 1, из явных формул обращения оператора A_0 для решений системы $A_0(v_0, u_1, g) = (f_0, f_1, d)$ получается оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_1(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|), \quad (5.10)$$

аналогичная (5.4), а вместо (5.5) получаем

$$\|B_{00}v_0 + B_{01}u_1\|_m + \|B_{10}v_0 + B_{11}u_1\|_{(0,m)} \leq c_2(\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon}) \quad (5.11)$$

с другими константами c_1 и c_2 , зависящими от m . Отсюда получаем, что ряд Неймана (4.9) для наших операторов A_0 и B при $\mu \in W_k$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ с некоторым $\varepsilon_m > 0$ будет сходиться, если BA_0^{-1} рассматривать как оператор в $\mathcal{H}^m(S_l^1) \times \mathcal{H}_D^{(0,m)} \cap \mathcal{L}_0^\perp$. В результате мы получаем включения (5.8), а оценка (5.9) непосредственно вытекает из неравенств (5.10) и (5.11); тем самым, предложение 3 доказано.

6. Доказательство теоремы 2. Докажем, что функция $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ для $\mu \in W_k$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ и, если доопределить ее при $\varepsilon = 0$ этим пределом, то эта функция принадлежит $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0])$ и при этом будет аналитической по параметру μ , а для этого достаточно показать, что она имеет ограниченные частные производные в $W_k \times (0, \varepsilon'_0)$, где ε'_0 – любое, $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$.

При $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого ε_0 оператор A аналитически зависит от параметров μ и ε и в силу предложения 1 обратим, следовательно, v_0, u_1 (как функции со значениями в пространствах $\mathcal{H}^2(S_l^1)$ и $\mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$) и g также аналитически зависят от этих параметров. Аналогичным образом, в силу предложения 3 они, как элементы пространств из левой части (5.7), аналитически зависят от μ и ε (при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$). Обозначим

$$v_0^{(n_1, n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} v_0, \quad u_1^{(n_1, n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} u_1, \quad g^{(n_1, n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} g.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых целых $n \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_{n,m} \geq 0$ и константы $c_{n,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n)}$ для решений системы (5.1) выполняются оценки

$$\|v_0^{(0,n)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,n)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(0,n)}| \leq c_{m,n}(\|f_0\|_{m+n} + \|f_1\|_{(0,m+n)} + |d|). \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать (6.1) по индукции. В силу предложения 3 неравенство (6.1) выполнено при $n = 0$. Предположим, что (6.1) выполнено при всех m для $n \leq j-1$, и докажем, что (6.1) будет выполнено при всех m для $n = j$. Дифференцируя (6.1) по ε , получим

$$\begin{aligned} & (T_0 - \mu)v_0^{(0,j)} + g^{(0,j)}\Phi_k \\ & + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon \partial_s, \varepsilon)u_1^{(0,j)} = F_0(s), \\ & (-\varepsilon^2 \partial_s^2 - \partial_{q_2}^2 - \partial_{q_3}^2 + w - \nu_0)u_1^{(0,j)} + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0^{(0,j)} \\ & + \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon \partial_s, \varepsilon)u_1^{(0,j)} = F_1(s, q'), \quad (v_0^{(0,j)}, \Phi_k) = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь F_0 состоит из суммы слагаемых $-C_j^i(\partial_\varepsilon^{j-i}(\varepsilon B_{00}))v_0^{(0,i)}$ и $-C_j^i(\partial_\varepsilon^{j-i}(\varepsilon B_{01}))u_1^{(0,i)}$, где $i \leq j-1$. Используя структуру операторов B_{ij} , $i, j = 0, 1$, и предположение индукции, получаем

$$\|F_0\|_m \leq c \sum_{i=0}^{j-1} (\|v_0^{(0,i)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,i)}\|_{(2,m+j-i-1),\varepsilon}) \leq c(\|f_0\|_{m+j-1} + \|f_1\|_{(0,m+j-1)} + |d|),$$

а F_1 состоит из слагаемых, которые оцениваются аналогичным образом, и еще двух слагаемых $2C_j^1 \varepsilon \partial_s^2 u_1^{(0,j-1)}$ и $2C_j^2 \partial_s^2 u_1^{(0,j-2)}$, которые оцениваются так:

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon \partial_s^2 u_1^{(0,j-1)}\|_{(0,m)} + \|\partial_s^2 u_1^{(0,j-2)}\|_{(0,m)} \\ & \leq \|\varepsilon \partial u_1^{(0,j-1)}\|_{(0,m+1)} + \|u_1^{(0,j-2)}\|_{(0,2+m)} \\ & \leq \|u_1^{(0,j-1)}\|_{(2,m+1),\varepsilon} + \|u_1^{(0,j-2)}\|_{(2,m+2),\varepsilon} \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\|F_0\|_m + \|F_1\|_{(0,m)} \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|).$$

Теперь (6.1) следует из предложения 3, примененного к системе (6.2), и предложение 4 доказано.

С помощью индукции по n_1 аналогичным образом устанавливается оценка производных, содержащих дифференцирования по μ , при этом оценка (6.1) является началом индукции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых целых $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие константы $c_{n_1,n_2,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n_2,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n_2}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n_2)}$ для решений системы (5.1) выполняются оценки

$$\|v_0^{(n_1,n_2)}\|_{2+m} + \|u_1^{(n_1,n_2)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(n_1,n_2)}| \leq c_{n_1,n_1,m}(\|f_0\|_{m+n_2} + \|f_1\|_{(0,m+n_2)} + |d|). \quad (6.3)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Функция $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ для $\mu \in W_k$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ и, если доопределить ее при $\varepsilon = 0$ этим пределом, то эта функция принадлежит $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$ и при этом будет аналитической по параметру μ .

Действительно, как уже отмечалось выше, для этого достаточно установить ограниченность производных от $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ на $[0, \varepsilon'_0)$, где $0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_0$. Но это следует из установленной ранее аналитичности функции $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и оценок (6.3).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если v_0 и u_1 для $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ рассматривать как функции со значениями в $\mathcal{H}^2(S_l^1)$ и $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, то они имеют пределы при $\varepsilon \rightarrow +0$. Доопределив их этими пределами при $\varepsilon = 0$, получим функции из $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$, и при этом они будут аналитическими по параметру μ .

Это утверждение устанавливается таким же образом, как и предыдущее, если заметить, что норма функций в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ равномерно по ε оценивается через норму в $\mathcal{H}_D^{2,2}(\Omega)$.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 2. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, в первом и третьем уравнениях системы (5.1), получим

$$(T_0 - \mu)v_0 + G(\mu, 0)\Phi_k = 0, \quad (v_0, \Phi_k) = 1,$$

следовательно, $v_0 = \Phi_k$ и $G(\mu, 0) = \mu - \mu_k$. Поэтому $\partial_\mu G(\mu, 0) = 1 \neq 0$ и утверждение теоремы 2 теперь вытекает из предложения 2 и теоремы о неявной функции.

7. Вычисление коэффициентов асимптотического разложения (2.4). Исходя из предложения 2, собственное значение $\mu_k(\varepsilon)$, существование которого установлено в теореме 2, можно получить путем решения системы (5.1) с $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$, если в качестве μ взять $\mu_k(\varepsilon)$, удовлетворяющее уравнению (5.6). Так как в силу следствия 3 соответствующие $\mu_k(\varepsilon)$, $v_0(s, \varepsilon)$, $u_1(s, q', \varepsilon)$ бесконечно дифференцируемы при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, то их можно разложить в асимптотические ряды Тейлора

$$v_0(s, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} v_0^{(0,n)}(s, 0), \quad u_1(s, q', \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_1^{(0,n)}(s, q', 0). \quad (7.1)$$

После этого можно действовать по стандартной схеме теории возмущений: ряды (2.4) (с учетом (4.4)), (7.1) подставить в уравнения (5.1) с $g = 0$, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ и, приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получать рекуррентные соотношения для определения коэффициентов разложений (2.4), (7.1) (при этом, естественно, коэффициенты операторов B_{ij} также нужно разложить в асимптотические ряды по ε).

Таким способом получаем соотношения

$$\begin{aligned} (T_0 - \mu_k)v_0(s, 0) &= 0, & (v_0(s, 0), \Phi_k(s)) &= 1, \\ (T_0 - \mu_k)v_0^{(0,1)}(s, 0) - d_{k,1}v_0(s, 0) + b'_{00}(s, \partial_s, 0)v_0(s, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

откуда следует, что $v_0(s, 0) = \Phi_k(s)$, а условием разрешимости второго уравнения является равенство

$$d_{k,1} = (b'_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k(s), \Phi_k(s)), \quad (7.3)$$

которое и определяет коэффициент $d_{k,1}$.

Очевидно, что формулы (7.2) и (7.3) совпадают с формулами стандартной теории возмущений для оператора

$$T_0 + \varepsilon b'_{00}(s, \partial_s, 0), \quad (7.4)$$

который получается, если в правой части первого уравнения в (4.5) (без μ) пренебречь членами порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Отсюда следует, что $\mu_k(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ с точностью до $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ совпадает с собственным значением оператора (7.4), которое находится вблизи μ_k .

8. Случай кратного собственного значения оператора T_0 . Пусть μ_k – кратное собственное значение оператора T_0 и Φ_k^1 , Φ_k^2 – ортонормированные собственные функции, отвечающие этому собственному значению. Обозначим через $\hat{\beta}$ матрицу

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} (b'_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k^1, \Phi_k^1) & (b'_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k^2, \Phi_k^1) \\ (b'_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k^1, \Phi_k^2) & (b'_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k^2, \Phi_k^2) \end{pmatrix}$$

и предположим, что вековое уравнение $\det(\hat{\beta} - \eta I) = 0$, где I – единичная матрица, имеет простые корни η_1 , η_2 (т.е. в первом порядке теории возмущений происходит расщепление собственных значений оператора (7.4)). В таком случае будет выполнено утверждение, аналогичное теореме 2 и следствиям предложения 5, но в $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет существовать не одно собственное значение, а два – $\lambda_k^1(\varepsilon)$ и $\lambda_k^2(\varepsilon)$, причем они невырождены и $\mu_k^{1,2}(\varepsilon)$ вместе с отвечающими им функциями v_0 и u_1 бесконечно дифференцируемы по ε при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_k^{1,2}(0) = \mu_k$.

Доказательство этого утверждения можно получить по той же схеме, что и доказательство теоремы 2, поэтому мы отметим только некоторые изменения, которые нужно внести в рассуждения п. 6.

В системе 5.1 и далее под g , Φ_k и d следует понимать векторные величины

$$g = (g_1, g_2), \quad \Phi_k = (\Phi_k^1, \Phi_k^2), \quad d = (d_1, d_2),$$

а под их произведением, например, $d\Phi_k$ – сумму произведений их компонент. Доказательства предложений 3–5 и следствий к предложению 5 переносятся на этот случай без изменений, а в формулировке предложения 2 функция $G(\mu, \varepsilon)$ определяется как

$$G(\mu, \varepsilon) = \det \hat{g}(\mu, \varepsilon), \quad (8.1)$$

матрица $\hat{g}$ определяется следующим образом: если в системе (5.1) $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$, то в силу линейности

$$g(\mu, \varepsilon, 0, 0, d) = \hat{g}(\mu, \varepsilon)d, \quad (8.2)$$

где $\hat{g}(\mu, \varepsilon)$ – матрица с элементами $\hat{g}_{ij}(\mu, \varepsilon)$, $i, j = 1, 2$.

При вещественных μ функция $G(\mu, \varepsilon)$ вещественна. Это следует из того, что при вещественных μ матрица $\hat{g}(\mu, \varepsilon)$ эрмитова. Чтобы это показать, заметим, что система (5.1) с $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$ эквивалентна соотношениям

$$\varepsilon^2(H'_\varepsilon - \lambda)u = -g_1\Phi_k^1\chi_0 - g_2\Phi_k^2\chi_0, \quad \varepsilon^2(u, \Phi_k^1\chi_0) = d_1, \quad \varepsilon^2(u, \Phi_k^2\chi_0) = d_2, \quad (8.3)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Заменяя $\varepsilon^2(H'_\varepsilon - \lambda)u$ в равенстве $(u, \varepsilon^2(H'_\varepsilon - \lambda)u) = (\varepsilon^2(H'_\varepsilon - \lambda)u, u)$ на правую часть в (8.3) и пользуясь соотношениями (8.2), (8.3), получаем

$$(\hat{g}_{11}d_1 + \hat{g}_{12}d_2)d_1 + (\hat{g}_{21}d_1 + \hat{g}_{22}d_2)d_2 = (\hat{g}_{11}d_1 + \hat{g}_{12}d_2)\bar{d}_1 + (\hat{g}_{21}d_1 + \hat{g}_{22}d_2)\bar{d}_2.$$

Ввиду произвольности чисел d_1, d_2 отсюда следует, что матрица $\hat{g}$ эрмитова.

Наиболее существенные изменения нужно произвести в конце доказательства теоремы 2. Вместо обычной теоремы о неявной функции нужно использовать следующее утверждение: *если функция $G(\mu, \varepsilon)$ класса C^∞ определена при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ в некоторой комплексной окрестности точки μ_k и аналитична по μ , причем*

$$G(\mu_k, 0) = 0, \quad G_\mu(\mu_k, 0) = 0, \quad G_\varepsilon(\mu_k, 0) = 0, \quad G_{\mu, \mu}(\mu_k, 0) \neq 0$$

и корни уравнения

$$\eta^2 G_{\mu\mu}(\mu_k, 0) + 2\eta G_{\mu, \varepsilon}(\mu_k, 0) + G_{\varepsilon, \varepsilon}(\mu_k, 0) = 0$$

различны, тогда уравнение $G(\mu, \varepsilon) = 0$ в некоторой окрестности точки $(\mu_k, 0)$ при $0 < \varepsilon$ имеет два различных корня $\mu_k^1(\varepsilon)$ и $\mu_k^2(\varepsilon)$, причем $\mu_k^{1,2}(\varepsilon) \in C^\infty$ и $\mu_k^{1,2}(0) = \mu_k$.

Это утверждение легко сводится к обычной теореме о неявной функции с помощью подстановки $\mu - \mu_k = \varepsilon z$.

После этих замечаний остается лишь проверить, что функция $G(\mu, \varepsilon)$, определенная формулами (8.1), (8.2), удовлетворяет этим условиям. Для этого достаточно вычислить первые производные от $\hat{g}$ в точке $(\mu_k, 0)$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в (5.1) для $f_0 = 0, f_1 = 0$, получаем

$$(T_0 - \mu)v_0 + g(\mu, 0, 0, 0, d)\Phi_k = 0, \quad (v_0, \Phi_k) = d,$$

следовательно, $v_0 = d\Phi_k$ и $g(\mu, 0, 0, 0, d) = (\mu - \mu_k)d$, поэтому

$$\widehat{g}(\mu, 0) = (\mu - \mu_k)I, \quad (8.4)$$

а из (6.2) получим

$$(T_0 - \mu_k)v_0^{(0,1)} + g^{(0,1)}(\mu_k, 0, 0, 0, d)\Phi_k + b'_{00}(s, \partial_s, 0)v_0 = 0.$$

Как только что было показано, $v_0 = d\Phi_k$ и, умножая это уравнение скалярно на Φ_k^1 и Φ_k^2 , получим

$$(g^{(0,1)}(\mu_k, 0, 0, 0, d)\Phi_k, \Phi_k^j) = -(b'_{00}(s, \partial_s, 0)d\Phi_k, \Phi_k^j),$$

или, учитывая (8.2), $\partial_\varepsilon \widehat{g}(\mu_k, 0) = -\widehat{\beta}$. Из (8.4) теперь вытекает, что

$$\widehat{g}(\mu, \varepsilon) = (\mu - \mu_k)I - \varepsilon \widehat{\beta} + \mathcal{O}(|\mu - \mu_k|^2 + \varepsilon^2),$$

откуда легко следуют все необходимые нам свойства функции $G(\mu, \varepsilon)$. Тем самым, сформулированное в начале этого пункта утверждение о собственных значениях $\lambda_k^{1,2}(\varepsilon)$ доказано.

Как и в п. 7, для вычисления коэффициентов $d_{k,1}^{1,2}$ соответствующих разложений для $\mu_k^{1,2}(\varepsilon)$ можно применять к оператору (7.4) обычные формулы теории возмущений кратного собственного значения.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим оператор $-\Delta + \varepsilon x_1$ в области $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$, определенной в примере 1 п. 7. Тогда $T_0 = -\partial_s^2 - 1/(4R^2)$, $b'_{00}(s, \partial_s, 0) = R \cos(s/R)$.

Легко видеть, что для первого собственного значения $-1/(4R^2)$ оператора T_0 (собственная функция $1/\sqrt{2\pi R}$) выполняется утверждение теоремы 2, а для собственного значения $15/(4R^2)$ (собственные функции $1/(\sqrt{2\pi R})e^{\pm 2is/R}$) – утверждение п. 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, “Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе”, *Докл. АН СССР*, **123**:3 (1958), 631–633.
- [2] V. P. Maslov, “Mathematical aspects of integral optics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 83–105.
- [3] В. П. Маслов, Е. М. Воробьев, “Об одномодовых открытых резонаторах”, *Докл. АН СССР*, **179**:3 (1968), 558–561.
- [4] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Сеницын, “Асимптотические решения уравнения Шрёдингера в тонких трубках”, *Тр. ин-та матем. мех. УрО РАН*, **9**:1 (2003), 1–11.
- [5] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Сеницын, Т. Я. Тудоровский, “Квазиклассическое приближение и канонический оператор Маслова для нерелятивистских уравнений квантовой механики в нанотрубках”, *Докл. РАН*, **393**:4 (2003), 460–464.
- [6] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskii, “Quantum and classical dynamics of electron in thin curved tubes with spin and external electromagnetic fields taken into account”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 109–118.
- [7] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках”, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 267–303.

- [8] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, “Обобщенный адиабатический принцип для описания динамики электрона в искривленных нанотрубках”, *УФН*, **175**:9 (2005), 1004–1010.
- [9] P. Duclos, P. Exner, “Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions”, *Rev. Math. Phys.*, **7**:1 (1995), 73–102.
- [10] P. Exner, P. Šeba, “Bound states in curved quantum waveguides”, *J. Math. Phys.*, **30**:11 (1989), 2574–2580.
- [11] P. Exner, “Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature”, *J. Math. Phys.*, **34**:1 (1993), 23–28.
- [12] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:2 (1997), 1487–1495.
- [13] P. Exner, S. A. Vugalter, “Bound states in a locally deformed waveguide: the critical value”, *Lett. Math. Phys.*, **39**:1 (1997), 59–68.
- [14] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl’shin, D. Krejčířík, “Bound states in a weakly deformed strips and layers”, *Ann. Henri Poincaré*, **2**:3 (2001), 553–572.
- [15] В. В. Грушин, “О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 360–371.
- [16] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера с поперечным потенциалом в слабо искривленных бесконечных цилиндрах”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 656–664.
- [17] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в бесконечных цилиндрах, возмущенных поперечными растяжениями”, *Матем. заметки*, **81**:3 (2007), 328–334.
- [18] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках”, *Матем. заметки* (в печати).
- [19] Р. Р. Гадыльшин, “О локальных возмущениях квантовых волноводов”, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 358–371.
- [20] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, v. 1, Travaux et Recherches Mathématiques, **18**, Dunod, Paris, 1968; рус. пер.: Ж.-Л. Лионс, Э. Маженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.
- [21] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Grundlehren Math. Wiss., **116**, Springer-verlag, Berlin, 1963; рус. пер.: Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы*, Мир, М., 1965.
- [22] Л. И. Магарилл, М. В. Энтин, “Электроны в криволинейной квантовой проволоке”, *ЖЭТФ*, **123**:4 (2003), 867–876.
- [23] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, IV. Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978; рус. пер.: М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, 4. Анализ операторов, Мир, М., 1982.
- [24] М. С. Агранович, М. И. Вишик, “Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида”, *УМН*, **19**:3 (1964), 53–161.
- [25] В. В. Грушин, “Об одном классе псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии”, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 163–195.

В. В. Грушин

Московский государственный институт электроники и математики

E-mail: pm@miem.edu.ru

Поступило

17.09.2007