Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Ильин, О применимости двух теорем теории колец и модулей, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 536–544

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:55:39

О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей

С. Н. Ильин

Исследуются вопросы о распространении критерия инъективности Бэра и теоремы о вложении произвольного модуля над кольцом в инъективный модуль на случай полуколец. Доказано, что полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра и любой S -полумодуль вложим в инъективный полумодуль тогда и только тогда, когда S – кольцо.

Библиография: 5 названий.

Согласно [1] под *полукольцом* понимается алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0)$ такая, что

- 1) $(S, +, 0)$ – коммутативный моноид;
- 2) $(S, \cdot)$ – полугруппа;
- 3) $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ для всех $x, y, z \in S$;
- 4) $0x = x0 = 0$ для всех $x \in S$.

В случае, когда $(S, \cdot, 1)$ – моноид, говорят, что S – *полукольцо с единицей*. Ниже, если это не оговорено особо, все полукольца предполагаются содержащими единицу. Очевидно, каждое ассоциативное кольцо является полукольцом. В дальнейшем, для краткости, полукольца, не являющиеся кольцами, будем называть *чистыми* полукольцами. Чистое полукольцо S , для которого $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ – коммутативная группа, называется *полуполем*.

Пусть S – полукольцо. Коммутативный моноид $(M, +, 0_M)$ называется *правым S -полумодулем*, если для любых $m \in M$ и $s \in S$ определено произведение $ms \in M$, причем для всех $m, m' \in M$, $s, s' \in S$ верно

- 1) $m(ss') = (ms)s'$;
- 2) $(m + m')s = ms + m's$;
- 3) $m(s + s') = ms + ms'$;
- 4) $m1 = m$;
- 5) $0_M s = 0_M = m0$.

Ниже все полумодули считаются правыми. Очевидно, в случае, когда S – кольцо, каждый S -полумодуль является модулем.

Пусть M, M' – S -полумодули. Отображение $\varphi: M \rightarrow M'$ называется *S -гомоморфизмом*, если $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$ и $\varphi(ms) = \varphi(m)s$ для всех $m, m' \in M$, $s \in S$. Полумодуль M называется *инъективным*, если для любого S -полумодуля A и любого подполумодуля $A' \subseteq A$ всякий S -гомоморфизм $\varphi: A' \rightarrow M$ можно продолжить до S -гомоморфизма $\tilde{\varphi}: A \rightarrow M$.

В теории колец и модулей хорошо известны следующие результаты (см., например, [2; с. 18–19]).

ТЕОРЕМА А. *Любой модуль над кольцом R можно изоморфно вложить в инъективный R -модуль.*

ТЕОРЕМА В (Критерий Бэра). *Пусть M – модуль над кольцом R . Если для любого правого идеала $I \subseteq R$ всякий R -гомоморфизм $\varphi: I \rightarrow M$ можно продолжить до R -гомоморфизма $\bar{\varphi}: R \rightarrow M$, то M инъективен.*

Утверждение теоремы А в случае полуколец перестает быть верным, поскольку, например, над полукольцом $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения ни один ненулевой полумодуль нельзя вложить в инъективный полумодуль. Это немедленно вытекает из следующего результата (см. [1; предложение 17.21]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если аддитивно-сократимое полукольцо S без делителей нуля не содержит ненулевых аддитивно-обратимых элементов, то единственным инъективным S -полумодулем является $\{0\}$.*

С другой стороны, аналог теоремы А справедлив для достаточно широкого класса полуколец. Так в [3] показано, что любой полумодуль над аддитивно-идемпотентным полукольцом можно вложить в инъективный полумодуль. Обобщение этого результата на случай аддитивно-регулярных полуколец было получено в [4].

Перейдем теперь к утверждению теоремы В. Предварительно дадим несколько определений.

Полумодуль M над полукольцом S называется *инъективным по Бэру*, если для любого правого идеала $I \subseteq S$ всякий S -гомоморфизм $\varphi: I \rightarrow M$ можно продолжить до S -гомоморфизма $\bar{\varphi}: S \rightarrow M$. Критерий Бэра теперь можно переформулировать следующим образом: *если R – кольцо, то любой инъективный по Бэру R -модуль является инъективным*. Будем говорить, что полукольцо S *удовлетворяет критерию Бэра*, если все инъективные по Бэру S -полумодули инъективны. В частности, любое кольцо удовлетворяет критерию Бэра.

Нетрудно видеть, что не все чистые полукольца удовлетворяют критерию Бэра. Примером может служить полуполе $(\mathbb{Q}_+, +, \cdot)$ неотрицательных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения. В самом деле, $\mathbb{Q}_+$ имеет только два идеала – нулевой и само полуполе $\mathbb{Q}_+$, поэтому любой $\mathbb{Q}_+$ -полумодуль тривиальным образом является инъективным по Бэру, однако, в силу предложения 1 инъективным среди них будет только нулевой полумодуль.

Тем не менее, как показывает следующая теорема, существует немало чистых полуколец, удовлетворяющих критерию Бэра.

ТЕОРЕМА 1. *Любую коммутативную полугруппу можно вложить в аддитивный моноид полукольца, удовлетворяющего критерию Бэра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(M, +)$ – коммутативная полугруппа. Добавив при необходимости к M нейтральный элемент 0, можно считать, что $(M, +, 0)$ – коммутативный моноид. Присоединим к моноиду $M \oplus \langle a \rangle$, где $\langle a \rangle$ – бесконечная циклическая группа, “бесконечно удаленный” элемент $b \notin M \oplus \langle a \rangle$, положив $x + b = b$ для всех $x \in X = (M \oplus \langle a \rangle) \cup \{b\}$. Превратим коммутативный моноид $(X, +, 0)$

в полукольцо $(X, +, \cdot, 0)$ без единицы, положив $xy = 0$ для всех $x, y \in X$. Наконец, обозначим через T расширение Дорроха полукольца X при помощи полукольца натуральных чисел $\mathbb{N}$ (т.е. $T = X \times \mathbb{N}$, где $(x, n) + (x', n') = (x + x', n + n')$, $(x, n)(x', n') = (xx' + nx' + n'x, nn')$ для всех $x, x' \in X$, $n, n' \in \mathbb{N}$). Легко видеть, что T – полукольцо с единицей $(0, 1)$ и что отображение $x \mapsto (x, 0)$ есть изоморфное вложение полукольца X в T . Следовательно, исходная полугруппа $(M, +)$ изоморфно вкладывается в моноид $(T, +, 0)$. Покажем, что полукольцо T удовлетворяет критерию Бэра. (Ниже для упрощения записи отождествляем элементы $x \in X$ и $(x, 0) \in T$, а вместо $(0, n)$ пишем просто n , тогда произвольный элемент $(x, n) \in T$ принимает вид $(x, n) = (x, 0) + (0, n) = x + n$.)

Пусть M – инъективный по Бэру T -полумодуль. Очевидно, множество Mb является подполумодулем в M , причем в силу равенства $b + b = b$ сложение в Mb идемпотентно.

Обозначим через I множество $\{ka : k \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно видеть, что I – идеал в T . Действительно, если $k_1a, k_2a \in I$, то $k_1a + k_2a = (k_1 + k_2)a \in I$; кроме того, представив произвольный элемент $t \in T$ в виде $t = x + n$, где $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, с учетом $a, x \in X$ и $ax = 0$ имеем $(ka)t = ka(x + n) = kax + kna = kna \in I$.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство $Mb = \{0_M\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный элемент $m \in M$ и рассмотрим отображение $\varphi: I \rightarrow M$, действующее по правилу:

$$\varphi(ka) = \begin{cases} mb, & k > 0, \\ 0_M, & k = 0. \end{cases}$$

Фактически, в силу идемпотентности сложения в Mb верно $\varphi(ka) = kmb$. Ясно, что $\varphi(k_1a + k_2a) = \varphi(k_1a) + \varphi(k_2a)$. Кроме того, для любого $t \in T$ имеем $t = x + n$, где $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, следовательно, с учетом $ax = bx = 0$ получаем

$$\varphi(kat) = \varphi(ka(x + n)) = \varphi(kna) = knmb = kmb(x + n) = \varphi(ka)(x + n) = \varphi(ka)t.$$

Таким образом, отображение φ является T -гомоморфизмом. Поскольку M инъективен по Бэру, существует T -гомоморфизм $\bar{\varphi}: T \rightarrow M$, продолжающий φ . Следовательно,

$$0_M = \bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(a + (-a)) = \varphi(a) + \bar{\varphi}(-a) = mb + \bar{\varphi}(-a),$$

тем самым, элемент $mb \in Mb$ является аддитивно обратимым, что с учетом идемпотентности сложения в Mb возможно только при $mb = 0_M$. В силу произвольности элемента $m \in M$ заключаем, что $Mb = \{0_M\}$.

ЛЕММА 2. *Для любого $x \in X$ имеет место равенство $Mx = \{0_M\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом равенства $x + b = b$ и леммы 1 имеем $0_M = mb = m(x + b) = mx + mb = mx + 0_M = mx$ для любых $m \in M$, $x \in X$.

ЛЕММА 3. *Имеет место равенство $M = \{0_M\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный элемент $m \in M$ и рассмотрим отображение $\varphi: I \rightarrow M$, действующее по правилу $\varphi(ka) = km$. Очевидно, $\varphi(k_1a + k_2a) = \varphi(k_1a) + \varphi(k_2a)$; кроме того, ввиду леммы 2 при любом $x \in X$ имеем $mx = 0_M$,

поэтому, представив произвольный элемент $t \in T$ в виде $t = x + n$, где $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\varphi(kat) = \varphi(ka(x + n)) = \varphi(kna) = knm = km(x + n) = \varphi(ka)t,$$

так что φ есть T -гомоморфизм, обладающий в силу инъективности по Бэру полумодуля M продолжением $\bar{\varphi}: T \rightarrow M$. Тогда с учетом леммы 2

$$m = \varphi(a) = \bar{\varphi}(1 \cdot a) = \bar{\varphi}(1)a \in Ma = \{0_M\},$$

откуда в силу произвольности элемента $m \in M$ вытекает $M = \{0_M\}$.

Итак, единственным инъективным по Бэру T -полумодулем является нулевой полумодуль, который, очевидно, инъективен. Следовательно, T удовлетворяет критерию Бэра.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенное в доказательстве теоремы 1 полукольцо T обладает только нулевым инъективным по Бэру полумодулем. Это означает, что утверждение теоремы А не имеет места для полуколец даже в ослабленном виде, если вложимость в инъективный полумодуль заменить на вложимость в инъективный по Бэру полумодуль.

Таким образом, утверждения теорем А и В нельзя перенести на полукольца общего вида, хотя аналог каждой из этих теорем в отдельности может быть справедливым для некоторых классов чистых полуколец. Однако, как будет показано ниже, чистых полуколец, на которые можно было бы перенести обе теоремы одновременно, не существует.

Пусть S и R – полукольца (возможно, без единицы). Гомоморфизм аддитивных моноидов $(S, +)$ и $(R, +)$ (т.е. отображение $\varphi: S \rightarrow R$ такое, что $\varphi(0_S) = 0_R$ и $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для всех $a, b \in S$) будем называть *аддитивным гомоморфизмом*.

Непосредственно проверяется

ЛЕММА 4. Множество $\text{Hom}(S, R)$ всех аддитивных гомоморфизмов, действующих из S в R , с поточечной операцией сложения и умножением на элементы из S , определенным по правилу $(\varphi s)(t) = \varphi(st)$ для всех $\varphi \in \text{Hom}(S, R)$ и всех $s, t \in S$, является S -полумодулем.

Обозначим через $\mathbb{B}$ двухэлементное полуполе. Сформулируем важное для дальнейших рассуждений свойство полуколец:

для любого правого идеала I полукольца S и всякого аддитивного гомоморфизма $\varphi: I \rightarrow \mathbb{B}$ справедлива импликация

$$a, a + b \in I, \quad \varphi(a + b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(a) = 0. \quad (*)$$

Легко видеть, что построенное в доказательстве теоремы 1 полукольцо T не обладает свойством (*). Действительно, для идеала $I = \{ka : k \in \mathbb{N}\}$ и аддитивного гомоморфизма φ , действующего из I в $\mathbb{B}$ по правилу

$$\varphi(ka) = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}$$

имеем $a, a + (-a) = 0 \in I$, $\varphi(a + (-a)) = 0$, но $\varphi(a) = 1 \neq 0$.

С другой стороны, многие известные классы полуколец обладают свойством (*). К ним относятся все аддитивно-регулярные полукольца (в том числе, кольца и аддитивно-идемпотентные полукольца), а также полукольца, в которых множество $\{1, 1 + 1, \dots\}$ конечно (в частности, конечные и локально-конечные полукольца). Это вытекает из доказываемого ниже предложения 2 и того, что все перечисленные классы полуколец содержатся в классе аддитивно π -регулярных полуколец (т.е. полуколец, в которых для любого элемента a уравнение $ka + x + ka = ka$ разрешимо при некотором натуральном $k \geq 1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Любое аддитивно π -регулярное полукольцо обладает свойством (*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – аддитивно π -регулярное полукольцо. Следовательно, при $a = 1$ для некоторого $x \in S$ и подходящего натурального k имеем $k \cdot 1 + x + k \cdot 1 = k \cdot 1$.

Пусть $I \subseteq S$ – правый идеал, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{B}$ – аддитивный гомоморфизм, $a, a + b \in I$ и $\varphi(a + b) = 0$. Тогда

$$k(a + b) = a(k \cdot 1) + kb = a(k \cdot 1 + x + k \cdot 1) + kb = ka + ax + ka + kb = ka + ax + k(a + b),$$

следовательно, с учетом $ka, ax, k(a + b) \in I$ и $\varphi(a + b) = 0$ получаем

$$0 = k\varphi(a + b) = \varphi(k(a + b)) = \varphi(ka + ax + k(a + b)) = \varphi(ka) + \varphi(ax).$$

Последнее равенство ввиду идемпотентности сложения в $\mathbb{B}$ означает, что $k\varphi(a) = \varphi(ka) = 0$, откуда $\varphi(a) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть S – полукольцо, обладающее свойством (*). Если S удовлетворяет критерию Бэра, то S – кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив, что S – чистое полукольцо, построим инъективный по Бэру S -полумодуль, не являющийся инъективным, этим теорема будет доказана.

Пусть C – произвольное непустое множество. Обозначим через $\mathbb{B}^C$ полукольцо, состоящее из всех функций, действующих из C в $\mathbb{B}$, с поточечно определенными операциями сложения и умножения.

Аддитивные моноиды полуколец $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^C$, рассматриваемые как $\mathbb{B}$ -полумодули, являются инъективными (см. [1; пример 17.22, предложение 17.23]). Слегка изменив доказательства этих результатов, получаем две следующих леммы.

ЛЕММА 5. *Для любого правого идеала $I \subseteq S$ и всякого аддитивного гомоморфизма $\varphi: I \rightarrow \mathbb{B}$ существует аддитивный гомоморфизм $\bar{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{B}$, продолжающий φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $s \in S$ полагаем $\bar{\varphi}(s) = 0$, если существует $x \in S$ такой, что $s + x \in I$ и $\varphi(s + x) = 0$, в противном случае – $\bar{\varphi}(s) = 1$.

Если $\bar{\varphi}(s_1) = \bar{\varphi}(s_2) = 0$, то найдутся такие $x_1, x_2 \in S$, что

$$s_1 + x_1, s_2 + x_2 \in I \quad \text{и} \quad \varphi(s_1 + x_1) = \varphi(s_2 + x_2) = 0.$$

Тогда $(s_1 + s_2) + (x_1 + x_2) = (s_1 + x_1) + (s_2 + x_2) \in I$ и

$$\varphi(s_1 + s_2 + x_1 + x_2) = \varphi(s_1 + x_1) + \varphi(s_2 + x_2) = 0;$$

следовательно, $\bar{\varphi}(s_1 + s_2) = 0$. Обратно, если $\bar{\varphi}(s_1 + s_2) = 0$, то для некоторого $x \in S$ имеем $s_1 + s_2 + x \in I$ и $\varphi(s_1 + s_2 + x) = 0$, откуда $\bar{\varphi}(s_1) = 0$ и, аналогично, $\bar{\varphi}(s_2) = 0$. Таким образом, $\bar{\varphi}(s_1 + s_2) = 0$ равносильно $\bar{\varphi}(s_1) = \bar{\varphi}(s_2) = 0$. А поскольку $\bar{\varphi}(s_i) \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$, $i = 1, 2$, то равенство $\bar{\varphi}(s_1 + s_2) = 1$ равносильно $\bar{\varphi}(s_1) = 1$ или $\bar{\varphi}(s_2) = 1$. В любом случае $\bar{\varphi}(s_1 + s_2) = \bar{\varphi}(s_1) + \bar{\varphi}(s_2)$, следовательно, $\bar{\varphi}$ – аддитивный гомоморфизм.

Докажем, что $\bar{\varphi}$ является продолжением φ . Пусть $a \in I$. Если $\varphi(a) = 0$, то, очевидно, $\bar{\varphi}(a) = 0$. Обратно, если $\bar{\varphi}(a) = 0$, то для некоторого $x \in S$ имеем $a + x \in I$ и $\varphi(a + x) = 0$, что ввиду (*) влечет $\varphi(a) = 0$. Тем самым, $\varphi(a) = 0$ равносильно $\bar{\varphi}(a) = 0$, значит, $\varphi(a) = 1$ равносильно $\bar{\varphi}(a) = 1$, в итоге, $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$.

ЛЕММА 6. *Утверждение леммы 5 остается верным, если заменить в нем $\mathbb{B}$ на $\mathbb{B}^C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \subseteq S$ – правый идеал и $\varphi: I \rightarrow \mathbb{B}^C$ – аддитивный гомоморфизм. Тогда для каждого $c \in C$ отображение $\varphi_c: I \rightarrow \mathbb{B}$, действующее по правилу $\varphi_c(x) = \varphi(x)(c)$ для всех $x \in I$, тоже является аддитивным гомоморфизмом, обладающим согласно лемме 5 продолжением $\bar{\varphi}_c: S \rightarrow \mathbb{B}$. Нетрудно видеть, что отображение $\bar{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{B}^C$, определенное правилом $\bar{\varphi}(s)(c) = \bar{\varphi}_c(s)$ для всех $s \in S$, $c \in C$, есть аддитивный гомоморфизм, продолжающий φ .

Хорошо известно, что полукольцо $(\mathbb{B}^C, +, \cdot)$ изоморфно полной булевой алгебре (булевой решетке) всех подмножеств множества C , сложение и умножение элементов которой совпадает с их теоретико-множественным объединением и пересечением соответственно. Удобно вести дальнейшие рассуждения, обращаясь с полукольцом $\mathbb{B}^C$ именно как с булевой алгеброй подмножеств.

Обозначим через $\mathfrak{m}$ мощность бесконечного множества, не меньшую, чем мощность множества S (для определенности можно считать, что если S конечно, то $\mathfrak{m}$ – мощность счетного множества, в противном случае $\mathfrak{m}$ есть мощность самого множества S). Фиксируем множество D , содержащее множество S и имеющее мощность, строго большую $\mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$ $\mathfrak{m}$ -полную обобщенную булеву алгебру (или согласно [5] алгебру Ершова), состоящую из всех подмножеств множества D , мощность которых не превосходит $\mathfrak{m}$. Вполне очевидно, что $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$ – подполукольцо (без единицы) полукольца $\mathbb{B}^D$, в частности, $(\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}, +)$ – подмоноид моноида $(\mathbb{B}^D, +)$.

ЛЕММА 7. *Утверждение леммы 5 остается верным, если заменить в нем $\mathbb{B}$ на $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \subseteq S$ – правый идеал и $\varphi: I \rightarrow \mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$ – аддитивный гомоморфизм. Для любого $x \in I$ имеем $\varphi(x) \in \mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$. Очевидно, мощность множества I не превосходит $\mathfrak{m}$, поэтому с учетом $\mathfrak{m}$ -полноты $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$ множество $C = \sum_{x \in I} \varphi(x)$ снова принадлежит $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$. Ясно, что $\varphi(x) \subseteq C$ при любом $x \in I$, т.е. фактически аддитивный гомоморфизм φ действует из I в $\mathbb{B}^C$. Тогда согласно лемме 6 для φ существует продолжение $\bar{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{B}^C$, которое в силу включения $\mathbb{B}^C \subset \mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$ одновременно является искомым аддитивным гомоморфизмом из S в $\mathbb{E}_{\mathfrak{m}}$.

Обозначим через R идеал, состоящий из всех аддитивно-обратимых элементов полукольца S . Поскольку по предположению S – чистое полукольцо, то $R \subset S$.

ЛЕММА 8. Пусть A – аддитивно-идемпотентное полукольцо, $a \in A$. Тогда отображение $\varphi_a: S \rightarrow A$, где

$$\varphi_a(s) = \begin{cases} a, & s \notin R, \\ 0, & s \in R, \end{cases} \quad \text{для всех } s \in S,$$

является аддитивным гомоморфизмом, т.е. $\varphi_a \in \text{Hom}(S, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $0 \in R$, то $\varphi(0) = 0$. Ясно, что $s_1 + s_2 \in R \Leftrightarrow s_1, s_2 \in R$, поэтому $\varphi_a(s_1 + s_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi_a(s_1) = \varphi_a(s_2) = 0$. Следовательно,

$$\varphi_a(s_1 + s_2) = a \Leftrightarrow \varphi_a(s_1) = a \text{ или } \varphi_a(s_2) = a.$$

В силу идемпотентности сложения в A в любом случае верно $\varphi_a(s_1 + s_2) = \varphi_a(s_1) + \varphi_a(s_2)$, так что φ_a – аддитивный гомоморфизм.

Воспользовавшись леммой 4, превратим множество $M = \text{Hom}(S, \mathbb{E}_m)$ в S -полумодуль. В силу леммы 8 для любого непустого множества $C \in \mathbb{E}_m$ ненулевое отображение $\varphi_C: S \rightarrow \mathbb{E}_m$ является аддитивным гомоморфизмом, т.е. лежит в M , поэтому полумодуль M ненулевой. Покажем, что M инъективен по Бэру, но не инъективен.

ЛЕММА 9. Полумодуль M инъективен по Бэру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \subseteq S$ – правый идеал и $\chi: I \rightarrow M$ – S -гомоморфизм. Легко видеть, что отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{E}_m$, где $\varphi(x) = \chi(x)(1)$ для всех $x \in I$, есть аддитивный гомоморфизм. Согласно лемме 7 для него существует продолжение $\bar{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{E}_m$. Построим отображение $\bar{\chi}: S \rightarrow M$, положив $\bar{\chi}(s)(t) = \bar{\varphi}(st)$ для всех $s, t \in S$. Действительно, $\bar{\chi}(s)(0) = \bar{\varphi}(s \cdot 0) = \bar{\varphi}(0) = 0$ и

$$\bar{\chi}(s)(t_1 + t_2) = \bar{\varphi}(s(t_1 + t_2)) = \bar{\varphi}(st_1 + st_2) = \bar{\varphi}(st_1) + \bar{\varphi}(st_2) = \bar{\chi}(s)(t_1) + \bar{\chi}(s)(t_2),$$

следовательно, $\bar{\chi}(s) \in M$ при любом $s \in S$.

Покажем, что $\bar{\chi}$ является S -гомоморфизмом, продолжаящим χ . Для каждого $u \in S$ имеем

$$\bar{\chi}(s_1 + s_2)(u) = \bar{\varphi}((s_1 + s_2)u) = \bar{\varphi}(s_1u) + \bar{\varphi}(s_2u) = \bar{\chi}(s_1)(u) + \bar{\chi}(s_2)(u) = (\bar{\chi}(s_1) + \bar{\chi}(s_2))(u)$$

тем самым, $\bar{\chi}(s_1 + s_2) = \bar{\chi}(s_1) + \bar{\chi}(s_2)$, кроме того, с учетом определения произведения элементов полумодуля M на элементы из S (см. лемму 4)

$$(\bar{\chi}(s)t)(u) = \bar{\chi}(s)(tu) = \bar{\varphi}(stu) = \bar{\chi}(st)(u),$$

значит, $\bar{\chi}(s)t = \bar{\chi}(st)$ для всех $s, t \in S$. Следовательно, $\bar{\chi}$ – S -гомоморфизм. Наконец, если $x \in I$, то

$$\bar{\chi}(x)(u) = \bar{\varphi}(xu) = \varphi(xu) = \chi(xu)(1) = (\chi(x)u)(1) = \chi(x)(u \cdot 1) = \chi(x)(u),$$

откуда $\bar{\chi}(x) = \chi(x)$.

ЛЕММА 10. Полумодуль M не инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим S -полумодуль $M' = \text{Hom}(S, \mathbb{B}^D)$. Как уже отмечалось ранее, $(\mathbb{E}_m, +)$ является подмоноидом в $(\mathbb{B}^D, +)$, следовательно, M есть подполумодуль в M' . Покажем, что тождественный S -гомоморфизм $\chi: M \rightarrow M$ нельзя продолжить до S -гомоморфизма $\bar{\chi}: M' \rightarrow M$, тем самым будет доказана неинъективность полумодуля M .

Предположим, что продолжение $\bar{\chi}$ существует. Согласно лемме 8 отображение $\varphi_D: S \rightarrow \mathbb{B}^D$ является аддитивным гомоморфизмом, т.е. $\varphi_D \in M'$. Обозначим $\bar{\chi}(\varphi_D)$ через ψ . Фиксируем произвольный элемент $s_0 \in S \setminus R$. Так как $\psi \in M$, то $\psi(s_0) \in \mathbb{E}_m$, следовательно, мощность $\psi(s_0)$ не превосходит m , а поскольку мощность D строго больше m , найдется $x \in D \setminus \psi(s_0)$.

Положим $C = \psi(s_0) \cup \{x\}$. Ясно, что $C \in \mathbb{E}_m$, поэтому $\varphi_C \in M$. Поскольку $C, D \in \mathbb{B}^D$ и $C \subset D$, то с учетом определения отображений φ_C, φ_D и идемпотентности сложения в $\mathbb{B}^D$ имеем $\varphi_D(s) = \varphi_C(s) + \varphi_D(s) = (\varphi_C + \varphi_D)(s)$ при любом $s \in S$, т.е. $\varphi_D = \varphi_C + \varphi_D$. Применив к обеим частям последнего равенства $\bar{\chi}$, получаем

$$\psi = \bar{\chi}(\varphi_D) = \bar{\chi}(\varphi_C + \varphi_D) = \bar{\chi}(\varphi_C) + \bar{\chi}(\varphi_D) = \chi(\varphi_C) + \psi = \varphi_C + \psi.$$

Но тогда $\psi(s_0) = (\varphi_C + \psi)(s_0) = \varphi_C(s_0) + \psi(s_0) = C \cup \psi(s_0) = \psi(s_0) \cup \{x\}$, что противоречит выбору $x \notin \psi(s_0)$.

Теорема полностью доказана.

Из предложения 2 и теоремы 2 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Любое аддитивно π -регулярное полукольцо, удовлетворяющее критерию Бэра, является кольцом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть S – полукольцо, не обладающее свойством (*). Тогда существует S -полумодуль, который нельзя вложить в инъективный по Бэру S -полумодуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нарушение свойства (*) для S означает, что существуют правый идеал $I \subseteq S$, аддитивный гомоморфизм $\varphi: S \rightarrow \mathbb{B}$ и элементы $a, b \in S$ такие, что $a, a + b \in I$, $\varphi(a + b) = 0$, но $\varphi(a) \neq 0$. Поскольку $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, то $\varphi(a) = 1$.

В соответствии с леммой 4 построим S -полумодуль $M = \text{Hom}(S, \mathbb{B})$ и зададим отображение $\chi: I \rightarrow M$, где $\chi(x)(s) = \varphi(xs)$ для всех $x \in I$, $s \in S$. Вполне очевидно, что $\chi(x) \in M$ и $\chi(x + y) = \chi(x) + \chi(y)$ для любых $x, y \in I$. Кроме того, для всех $x \in I$, $s, t \in S$ имеем

$$(\chi(x)s)(t) = \chi(x)(st) = \varphi(xst) = \chi(xs)(t),$$

следовательно, $\chi(x)s = \chi(xs)$. Таким образом, χ есть S -гомоморфизм. Покажем, что его нельзя продолжить до S -гомоморфизма $\bar{\chi}: S \rightarrow M$. Для этого достаточно убедиться в том, что равенство $\chi(a + b) = \chi(a) + \psi$ невозможно ни для какого $\psi \in M$.

В самом деле, если $\chi(a + b) = \chi(a) + \psi$ для некоторого $\psi \in M$, то

$$0 = \varphi(a + b) = \chi(a + b)(1) = \chi(a)(1) + \psi(1) = \varphi(a) + \psi(1) = 1 + \psi(1),$$

что противоречит очевидной неразрешимости в полуполе $\mathbb{B}$ уравнения $1 + x = 0$.

Заметим, что равенство $\chi(a + b) = \chi(a) + \psi$ не имеет места не только в M , но и в любом S -полумодуле M' , содержащем M в качестве подполумодуля, поскольку

в противном случае с учетом идемпотентности сложения в M следующая цепочка равенств

$$\chi(a + b) = \chi(a) + \psi = \chi(a) + \chi(a) + \psi = \chi(a) + \chi(a + b)$$

приводит к невозможному в M равенству $\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(a + b)$. Следовательно, построенный выше S -гомоморфизм $\chi: I \rightarrow M$, рассматриваемый как S -гомоморфизм $\chi: I \rightarrow M'$, нельзя продолжить до S -гомоморфизма $\bar{\chi}: S \rightarrow M'$. Значит, ни один S -полумодуль M' , содержащий M в качестве подполумодуля, не является инъективным по Бэру.

Из доказанных выше утверждений легко выводится основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 3. *Полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра и любой S -полумодуль можно изоморфно вложить в инъективный S -полумодуль тогда и только тогда, когда S – кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО прямого утверждения вытекает из теоремы 2 и предложения 3, обратного – из теорем А и В.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. S. Golan, *Semirings and Their Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [2] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961.
- [3] H. Wang, “Injective hulls of semimodules over additively-idempotent semirings”, *Semigroup Forum*, **48**:1 (1994), 377–379.
- [4] Y. Katsov, “Tensor products and injective envelopes of semimodules over additive regular semirings”, *Algebra Colloq.*, **4**:2 (1997), 121–131.
- [5] С. С. Гончаров, *Счетные булевы алгебры и разрешимость*, Научная книга, Новосибирск, 1996.

С. Н. Ильин

Казанский государственный университет

E-mail: Sergei.Ilyin@ksu.ru

Поступило

12.03.2007

Исправленный вариант

03.09.2007