Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Статистический анализ MARMA-процессов первого порядка, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 552–558

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:01:06

Статистический анализ MARMA-процессов первого порядка

А. В. Лебедев

Рассматриваются процессы типа MARMA, получающиеся из классических ARMA-процессов при замене сложения на максимум. Предполагается, что инновации и значения процесса имеют стандартное распределение Фреше. Вычисляются некоторые числовые характеристики простых MARMA-процессов первого порядка. Предлагаются знаковые и ранговые статистические методы оценки параметров. Выводятся характеризационные соотношения, которые можно использовать для идентификации модели.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В последние десятилетия в прикладной теории вероятностей и статистике произошел существенный сдвиг в понимании того, что далеко не все можно описать нормальным распределением. Напротив, как выяснилось, многие явления в природе и обществе, технике и экономике требуют рассмотрения “тяжелых хвостов”. Часто дело не только в “тяжелых хвостах”, но и в структуре зависимости случайных величин, нехарактерной для гауссовских моделей. Например, экстремальные события (превышения высокого уровня) могут иметь тенденцию происходить не по одиночке, а образовывать группы (кластеры) [1; гл. 8]. Мандельброт в свое время назвал подобное явление “эффектом Иосифа” [2; гл. 9] по мотивам библейской истории, где речь шла о семи урожайных и семи неурожайных годах подряд в Древнем Египте. Заметим, что превышения высокого уровня для компонент невырожденного многомерного нормального распределения оказываются асимптотически независимы [3; с. 211], что может не вполне отражать действительность.

Между тем явление кластеризации возникает (и уже довольно хорошо изучено) в ARMA-процессах с инновациями, распределения которых имеют “тяжелые хвосты” [1; гл. 5, 7], а также в ARCH-процессах, имеющих широкое применение в эконометрике и финансовой математике.

Еще одним интересным классом процессов, позволяющим моделировать как “тяжелые хвосты”, так и экстремальные структуры зависимости, являются тах-ARMA или MARMA-процессы, введенные в [4], [5] по аналогии с ARMA путем замены сложения на максимум:

$$X_n = \phi_1 X_{n-1} \vee \cdots \vee \phi_p X_{n-p} \vee \theta_0 Z_n \vee \cdots \vee \theta_q Z_{n-q}, \quad (1)$$

где $\phi_i, \theta_j \geq 0$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq q$; инновации Z_n независимы и одинаково распределены на $\mathbb{R}_+$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00077, 07-01-00373).

MARMA-процессы оказываются удобней для анализа, чем ARMA, поскольку конечномерные распределения для них легко выписываются в явном виде. Как показано в [4] путем компьютерного моделирования, их траектории ведут себя сходным образом в случае неотрицательных инноваций с тяжелыми (степенными) хвостами.

Отмечены приложения подобных процессов и их обобщений для описания самых разных явлений: оценки полезности оборудования, очередей с приоритетами [4], обмена воды во фьордах [6], накопления тепловой солнечной энергии [7], выпадения осадков [8], финансовых рядов [9]. Процессам максимум-авторегрессии посвящены также работы [10], [11] и др.

Удобно рассматривать максимум-устойчивые MARMA-процессы, в которых все величины имеют распределение Фреше $\Phi_{\alpha,\sigma}(x) = \exp\{-(x/\sigma)^{-\alpha}\}$, $\alpha, \sigma > 0$, $x > 0$. Оно играет здесь такую же роль, как нормальное распределение в классическом случае. Для определенности далее будем полагать $\alpha = 1$, а под “стандартным” распределением Фреше будем иметь в виду $\Phi_{1,1}$. Для независимых случайных величин ξ, ξ_1, ξ_2 с таким распределением выполняется следующее свойство (максимум-устойчивости):

$$c_1\xi_1 \vee c_2\xi_2 \stackrel{d}{=} (c_1 + c_2)\xi, \quad c_{1,2} \geq 0.$$

Заметим, что структура (1) инвариантна относительно степенного преобразования (положительной степени), при этом меняются только коэффициенты.

Как отмечено в [9], на пути широкого применения MARMA-процессов стоит проблема нехватки эффективных статистических процедур для них (по оценке параметров, прогнозированию и т.п.). Понятно, что классические методы для временных рядов [12] здесь неприменимы (поскольку случайные величины не имеют конечных моментов первого и второго порядка).

В [4] предложены оценки параметров максимум-авторегрессии в виде

$$\hat{\phi}_i = \bigwedge_{m=i+1}^n \frac{X_m}{X_{m-i}}. \quad (2)$$

Для MARMA-процесса эти оценки являются сильно состоятельными. К сожалению, они очень чувствительны к предположением модели. Так, для сколь угодно близкого к (1) “зашумленного” процесса вида

$$X_n^{(\varepsilon)} = (X_n + \varepsilon\eta_n) \vee 0, \quad (3)$$

где η_n , $n \geq 1$, – независимые стандартные гауссовские величины, все оценки (2) почти наверное сходятся к нулю! Авторы работ [4], [5] планировали исследование “зашумленных” MARMA-процессов, однако в дальнейшем оставили эту тематику.

В [9] проводится оценивание параметров процессов скользящего максимума и их обобщений (так называемых M4-процессов). Предлагается подсчитать эмпирические частоты попадания точек в прямоугольные области плоскости, а затем решать системы нелинейных (кусочно-линейных) уравнений, что само по себе представляет непростую вычислительную задачу.

Далее мы рассмотрим некоторые числовые характеристики простых MARMA-процессов первого порядка и основанные на них знаковые и ранговые методы оценки параметров, демонстрирующие новые подходы, которые в дальнейшем можно распространить на более сложные процессы.

Приходится признать, что реальные данные вряд ли могут иметь в точности распределение Фреше. Однако все наши методы применимы и в случае, когда наблюдаются не сами значения максимум-устойчивого MARMA-процесса, а некоторые непрерывные строго возрастающие функции от них. И наоборот, наблюдаемый процесс сводится к модельному некоторым функциональным преобразованием. Это предположение совершенно аналогично популярному в прикладной статистике допущению о сводимости временного ряда к гауссовскому ARMA-процессу.

2. Основные результаты (знаковый подход). Прежде всего заметим, что значения стационарного процесса X_n и инновации Z_n можно нормировать так, чтобы все они имели стандартное распределение Фреше. Далее будем рассматривать только нормированные стационарные процессы вида (1). Разумеется, это дает нам дополнительные условия на коэффициенты. Например, для MAR(1) получаем $\phi_1 + \theta_0 = 1$, а для ММА(1) имеет место $\theta_0 + \theta_1 = 1$.

Рассмотрим процессы

$$X_n = \phi X_{n-1} \vee (1 - \phi)Z_n, \quad 0 \leq \phi < 1, \quad (4)$$

$$X_n = \theta Z_n \vee (1 - \theta)Z_{n-1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (5)$$

Обозначим $p_k = P(X_{k+1} \leq X_1)$, $k \geq 1$. Для таких вероятностей существуют простые оценки:

$$\hat{p}_k = \frac{1}{n-k} \sum_{m=k+1}^n \mathbf{I}(X_m \leq X_{m-k}), \quad n > k. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Для процесса (4) верно $p_1 = 1/(2 - \phi)$, $0 \leq \phi < 1$.

ТЕОРЕМА 2. Для процесса (5) верно

$$p_1 = \begin{cases} \frac{1-\theta}{2-\theta}, & \theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ \frac{1}{1+\theta}, & \theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что во втором случае зависимость оказывается разрывной: при $\theta = 1/2$ вероятность p_1 совершает скачок от $1/3$ до $2/3$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для процесса (4) верно $\phi = 2 - 1/p_1$, $1/2 \leq p_1 < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для процесса (5) верно

$$\theta = \begin{cases} \frac{1-2p_1}{1-p_1}, & p_1 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right); \\ \frac{1}{p_1-1}, & p_1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right). \end{cases} \quad (7)$$

Во втором случае зависимость также разрывная: при $p_1 = 1/2$ параметр θ совершает скачок от 0 до 1, поскольку обоим этим значениям соответствует последовательность независимых случайных величин.

Понятно, что следствия 1 и 2 можно использовать для оценки параметров ϕ и θ , подставляя $\hat{p}_1$ из (6) в полученные формулы. К сожалению, при некоторых значениях $\hat{p}_1$ мы ответа не получим, однако вероятность таких событий стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это также может свидетельствовать о несоответствии выбранной модели.

Описанный подход естественно отнести к знаковым, поскольку речь идет о знаке разности соседних значений процесса.

Следует отметить, что при “запумлении” типа (3) с малым ε в случае скользящего максимума (5) происходит качественный скачок: вместо разрыва в точке $\theta = 1/2$ у функции $p_1(\theta)$ будет наблюдаться быстрый рост в некоторой окрестности этой точки, от минимального значения (близкого к $1/3$) до максимального (близкого к $2/3$). Если шум симметричен, то при $\theta = 1/2$ получаем $p_1 \approx 1/2$. При этом каждому значению $p_1 \neq 1/2$ соответствует два возможных значения θ : одно близкое к (7), другое – к $1/2$. Против этой неоднозначности могут помочь либо дополнительные предположения о возможных значениях θ , либо другие методы анализа, в частности, изложенный далее ранговый подход.

3. Основные результаты (ранговый подход). Рассмотрим теоретический коэффициент корреляции Спирмена ρ_S , определенный для случайных величин X и Y с непрерывными функциями распределения F_X и F_Y как коэффициент корреляции Пирсона величин $F_X(X)$ и $F_Y(Y)$. Тогда обычный ранговый коэффициент корреляции Спирмена r_S представляет собой сильно состоятельную оценку для ρ_S . Далее под $\rho_{S,1}$ будем иметь в виду $\rho_S(X_n, X_{n-1})$.

ТЕОРЕМА 3. Для процесса (4) верно

$$\rho_{S,1} = \frac{3\phi}{2 + \phi}, \quad \phi \in [0, 1).$$

ТЕОРЕМА 4. Для процесса (5) верно

$$\rho_{S,1} = \frac{3q}{2 - q}, \quad q = \theta(1 - \theta), \quad \theta \in [0, 1].$$

В обоих случаях зависимость $\rho_{S,1}$ от параметра непрерывная и гладкая.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для процесса (4) верно

$$\phi = \frac{2\rho_{S,1}}{3 - \rho_{S,1}}, \quad \rho_{S,1} \in [0, 1).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Для процесса (5) верно

$$\theta \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4q}}{2} \right\}, \quad q = \frac{2\rho_{S,1}}{3 + \rho_{S,1}}, \quad \rho_{S,1} \in \left[0, \frac{3}{7} \right].$$

Неоднозначность выбора θ в следствии 4 аналогична той, что наблюдается при оценивании параметров процесса скользящего среднего по автокорреляциям в классическом случае [12; § 3.3], когда привлекаются дополнительные соображения, такие как обратимость. В нашем случае для выбора одного из значений (симметричных относительно $1/2$) мы можем использовать статистику $\hat{p}_1$, полагая, например, $\hat{\theta} < 1/2$ при $\hat{p}_1 < 1/2$ и $\hat{\theta} > 1/2$ при $\hat{p}_1 > 1/2$.

4. Характеризация процессов. Полученные результаты позволяют не только выразить p_1 и $\rho_{S,1}$ через параметры рассматриваемых процессов, но и установить зависимость этих величин между собой. Таким образом, получаем характеристические соотношения для MARMA-процессов, которые можно использовать для идентификации модели (с учетом статистической погрешности).

СЛЕДСТВИЕ 5. Для процесса (4) верно

$$\rho_{S,1} = \frac{3(2p_1 - 1)}{4p_1 - 1}, \quad p_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Для процесса (5) верно

$$\rho_{S,1} = \begin{cases} \frac{3(1 - 2p_1)p_1}{4p_1^2 - 5p_1 + 2}, & p_1 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right); \\ \frac{3(1 - p_1)(2p_1 - 1)}{4p_1^2 - 3p_1 + 1}, & p_1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]. \end{cases}$$

Следует отметить, что в случае скользящего максимума функция $\rho_{S,1}(p_1)$ оказывается непрерывной, принимая в точке $p_1 = 1/2$ (где имеет излом) минимальное значение $\rho_{S,1} = 0$, а на концах интервала $(1/3, 2/3)$ – максимальное значение $\rho_{S,1} = 3/7$. Однако, как было отмечено ранее, для “зашумленного” процесса (3) каждому p_1 может соответствовать дополнительное значение $\theta \approx 1/2$ и $\rho_{S,1} \approx 3/7$. Таким образом, при “зашумлении” возникает дополнительная ветвь функции $\rho_{S,1}(p_1)$, проходящая вблизи уровня $3/7$ и смыкающаяся с основной ветвью на концах интервала $(1/3, 2/3)$.

5. Доказательства. Прежде всего, нам понадобится следующая простая лемма, которая используется в доказательствах всех теорем.

ЛЕММА. Пусть Z_1, Z_2, Z_3 независимы и имеют стандартное распределение Фреше, U имеет равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, числа $\alpha, \beta > 0$. Тогда выполнены следующие равенства:

- 1) $P(\alpha Z_1 \leq Z_2) = 1/(\alpha + 1)$;
- 2) $P(\alpha Z_1 \vee \beta Z_2 \leq Z_3) = 1/(\alpha + \beta + 1)$;
- 3) $E(U^{1/\alpha} \vee c) = (\alpha + c^{\alpha+1})/(\alpha + 1)$, $c \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. 1) Имеем

$$P(\alpha Z_1 \leq Z_2) = E\Phi_{1,1}\left(\frac{Z_2}{\alpha}\right) = EU^\alpha = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

2) Имеем

$$P(\alpha Z_1 \leq Z_3, \beta Z_2 \leq Z_3) = E\Phi_{1,1}\left(\frac{Z_3}{\alpha}\right)\Phi_{1,1}\left(\frac{Z_3}{\beta}\right) = EU^{\alpha+\beta} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}.$$

3) Имеем

$$E(U^{1/\alpha} \vee c) = cP(U \leq c^\alpha) + \int_{c^\alpha}^1 x^{1/\alpha} dx = c^{\alpha+1} + \frac{\alpha(1 - c^{\alpha+1})}{\alpha + 1} = \frac{\alpha + c^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Имеем

$$p_1 = P(X_2 \leq X_1) = P(\phi X_1 \vee (1 - \phi)Z_2 \leq X_1) = P((1 - \phi)Z_2 \leq X_1) = \frac{1}{2 - \phi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Имеем

$$p_1 = P(X_2 \leq X_1) = P(\theta Z_2 \vee (1 - \theta)Z_1 \leq \theta Z_1 \vee (1 - \theta)Z_0).$$

При $\theta < 1/2$ получаем

$$p_1 = P(\theta Z_2 \vee (1 - \theta) Z_1 \leq (1 - \theta) Z_0) = \left(\frac{\theta}{1 - \theta} + 2 \right)^{-1} = \frac{1 - \theta}{2 - \theta}.$$

При $\theta > 1/2$ получаем

$$\begin{aligned} p_1 &= P(\theta Z_2 \leq \theta Z_1 \vee (1 - \theta) Z_0) \\ &= 1 - P(\theta Z_1 \vee (1 - \theta) Z_0 < \theta Z_2) = 1 - \left(\frac{1 - \theta}{\theta} + 2 \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \theta}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $Y_n = \Phi_{1,1}(X_n)$, $U_n = \Phi_{1,1}(Z_n)$, тогда из (4) получаем новый стационарный процесс

$$Y_n = Y_{n-1}^{1/\phi} \vee U_n^{1/(1-\phi)},$$

в котором все величины Y_n , U_n имеют равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Вычисляем

$$\begin{aligned} EY_1 Y_2 &= EY_1 (Y_1^{1/\phi} \vee U_2^{1/(1-\phi)}) = E_{Y_1} E(Y_1 (Y_1^{1/\phi} \vee U_2^{1/(1-\phi)}) | Y_1) \\ &= E_{Y_1} \frac{(1 - \phi) + Y_1^{2/\phi-1}}{2 - \phi} = \frac{1}{2 - \phi} \left(\frac{1 - \phi}{2} + \frac{\phi}{2 + \phi} \right) = \frac{1 + \phi}{2(2 + \phi)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho_{S,1} = \frac{EY_1 Y_2 - 1/4}{1/12} = 12EY_1 Y_2 - 3 = \frac{3\phi}{2 + \phi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из (5) получаем процесс

$$Y_n = U_n^{1/\theta} \vee U_{n-1}^{1/(1-\theta)}.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} EY_1 Y_2 &= E(U_2^{1/\theta} \vee U_1^{1/(1-\theta)})(U_1^{1/\theta} \vee U_0^{1/(1-\theta)}) \\ &= E_{U_1} E((U_2^{1/\theta} \vee U_1^{1/(1-\theta)})(U_1^{1/\theta} \vee U_0^{1/(1-\theta)}) | U_1) \\ &= E \frac{\theta + U_1^{(1+\theta)/(1-\theta)}}{\theta + 1} \frac{(1 - \theta) + U_1^{2/\theta-1}}{2 - \theta} \\ &= \frac{\theta(1 - \theta) + \theta E U_1^{2/\theta-1} + (1 - \theta) E U_1^{(1+\theta)/(1-\theta)} + E U_1^{(1+\theta)/(1-\theta)+2/\theta-1}}{2 + \theta - \theta^2} \\ &= \frac{1}{2 + \theta(1 - \theta)} \left(\theta(1 - \theta) + \frac{\theta^2}{2} + \frac{(1 - \theta)^2}{2} + \frac{\theta(1 - \theta)}{2 - \theta(1 - \theta)} \right) = \frac{1}{2(2 - q)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho_{S,1} = 12EY_1 Y_2 - 3 = \frac{3q}{2 - q}.$$

Все следствия элементарно выводятся из утверждений соответствующих теорем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Appl. Math. (N. Y.), **33**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [2] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Ин-т компьютерных исследований, М., 2002.
- [3] A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, *Quantitative Risk Management*, Concepts, techniques and tools, Princeton Series in Finance, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2005.
- [4] R. A. Davis, S. I. Resnick, “Basic properties and prediction of max-ARMA processes”, *Adv. in Appl. Probab.*, **21**:4 (1989), 781–803.
- [5] R. A. Davis, S. I. Resnick, “Prediction of stationary max-stable processes”, *Ann. Appl. Probab.*, **3**:2 (1993), 497–525.
- [6] I. Helland, T. Nilsen, “On a general random exchange model”, *J. Appl. Probab.*, **13**:4 (1976), 781–790.
- [7] D. Daley, J. Haslet, “A thermal energy storage with controlled input”, *Adv. in Appl. Probab.*, **14**:2 (1982), 257–271.
- [8] S. G. Coles, “Regional modelling of extreme storms via max-stable processes”, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **55**:4 (1993), 797–816.
- [9] Z. Zhang, R. L. Smith, *Modelling Financial Time Series Data as Moving Maxima Processes*, Tech. Rep. Dept. Stat., Univ. North Carolina, Chapel Hill, NC, 2001; http://www.stat.unc.edu/faculty/rs/papers/RLS_Papers.html
- [10] M. T. Alpuim, “An extremal Markovian sequence”, *J. Appl. Probab.*, **26**:2 (1989), 219–232.
- [11] M. T. Alpuim, N. A. Catkan, J. Hüsler, “Extremes and clustering of nonstationary max-AR(1) sequences”, *Stochastic Process. Appl.*, **56**:1 (1995), 171–184.
- [12] Дж. Бокс, Г. Дженкинс, *Анализ временных рядов*, Мир, М., 1974.

А. В. Лебедев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: alebedev@mech.math.msu.su

Поступило

20.03.2007