Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, О распределении
целочисленных случайных величин, связанных двумя
линейными неравенствами. I, *Матем. заметки*, 2008,
том 83, выпуск 4, 559–580

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 08:22:46

О распределении целочисленных случайных величин, связанных двумя линейными неравенствами. I

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский

В предыдущих статьях авторов рассматривалась задача о распределении неразличимых частиц по целым положительным уровням энергии при условии, что суммарная энергия системы ограничена сверху некоторой постоянной M . Были доказаны оценки, из которых следует, что при больших M большинство вариантов концентрируется вблизи предельного распределения (бозе–эйнштейновского, если частицы подчиняются статистике Бозе). В данной статье мы продолжаем исследования в этом направлении и рассматриваем случай, когда задано не только ограничение на суммарную энергию, но и общее число частиц. Рассматривается как бозевское, так и гиббсовское распределение, изучается явление предельного перехода бозевского распределения в гиббсовское в случае относительно малого числа частиц.

Библиография: 4 названия.

1. Введение

В статьях [1] и [2] рассматривалась задача о распределении неразличимых частиц по целым положительным уровням энергии при условии, что суммарная энергия системы ограничена сверху некоторой постоянной M . Были доказаны оценки, из которых следует, что при больших M большинство вариантов концентрируется вблизи предельного распределения (бозе–эйнштейновского, если частицы подчиняются статистике Бозе). В данной статье мы продолжаем исследования в этом направлении и рассматриваем случай, когда задано не только ограничение на суммарную энергию, но и общее число частиц.¹ При этом оказывается, что более или менее одинаковым методом можно изучить системы как неразличимых, так и различимых частиц (в последнем случае мы естественно приходим к распределению Гиббса). Более того, если рассмотреть систему неразличимых частиц и предположить, что число частиц N относительно мало (хотя и стремится к бесконечности), то из наших оценок вытекает, что бозе–эйнштейновское распределение, которому они подчиняются, становится в пределах точности, гарантируемой теоремами о концентрации, неотличимым от распределения Гиббса. Важно подчеркнуть, что коль скоро речь идет

¹В частном случае, когда число частиц очень велико, это было проделано в [2], где было показано, что в этой ситуации образуется бозе-конденсат – в большинстве вариантов большинство частиц занимает самый нижний энергетический уровень, а оставшиеся частицы образуют распределение, близкое к бозе–эйнштейновскому, на остальных уровнях.

о числе вариантов, это распределение не есть «настоящее» распределение Гиббса – *частицы по-прежнему неразличимы*, и характерные для числа вариантов в распределении Гиббса факториальные множители не возникают – но доля вариантов, концентрирующихся вблизи предельной кривой, такова же, как и в «настоящем» распределении Гиббса.

В связи с тем, что мы рассматриваем системы как различных, так и неразличимых частиц, следует более подробно остановиться на том, что, собственно говоря, подразумевается под подсчетом вариантов распределения частиц по уровням энергии.

Пусть $\hat{H}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – одночастичный гамильтониан, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ состояний частицы. Предполагаем, что оператор $\hat{H}$ самосопряжен, неотрицателен и имеет чисто дискретный спектр; таким образом, в $\mathcal{H}$ имеется ортонормированный базис $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящий из собственных функций этого оператора,

$$\hat{H}\psi_j = \lambda_j\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

(разумеется, некоторые из λ_j могут совпадать между собой, т.е. оператор $\hat{H}$ может иметь кратные собственные значения). Будем считать, что λ_j упорядочены по возрастанию:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Рассмотрим теперь систему N невзаимодействующих частиц. Квантовомеханическое пространство состояний этой системы есть тензорное произведение

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}^{\otimes N} \equiv \underbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{N \text{ сомножителей}}$$

в том случае, если частицы различимы, или подпространство $\mathcal{H}_N^B$ этого тензорного произведения, состоящее из симметрических тензоров, в случае, если частицы неразличимы и подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна.

Гамильтониан $\hat{H}_N$ рассматриваемой системы имеет вид

$$\hat{H}_N = \underbrace{\hat{H} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes \hat{H} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \hat{H}}_{N \text{ слагаемых}}.$$

(Это выражение годится как для различных, так и для неразличимых частиц, ибо подпространство $\mathcal{H}_N^B$ инвариантно относительно $\hat{H}_N$.)

В пространстве $\mathcal{H}_N$ есть ортонормированный базис, состоящий из элементов вида

$$\Psi_{j_1, \dots, j_N} = \psi_{j_1} \otimes \psi_{j_2} \otimes \dots \otimes \psi_{j_N}. \quad (1)$$

В бозонном случае базис в $\mathcal{H}_N^B$ образуют симметрические элементы

$$\Psi_{j_1, \dots, j_N} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \psi_{j_{\sigma(1)}} \otimes \psi_{j_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes \psi_{j_{\sigma(N)}} \quad (2)$$

(сумма в (2) берется по всем перестановкам N элементов).

Функция (1) (соответственно (2)) является собственной функцией N -частичного гамильтониана $\hat{H}_N$ в пространстве $\mathcal{H}_N$ (соответственно $\mathcal{H}_N^B$) с собственным значением

$$\lambda \equiv \lambda_{j_1, \dots, j_N} = \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_N}. \quad (3)$$

Различные функции описывают различные собственные состояния гамильтониана $\hat{H}_N$, и когда речь идет о подсчете числа вариантов распределения частиц по уровням энергии, это равносильно подсчету числа этих собственных состояний, или, что то же самое, подсчету числа собственных значений гамильтониана $\hat{H}_N$ с учетом кратности.

На языке математической статистики это можно сформулировать следующим образом: каждое конкретное распределение N частиц по уровням энергии есть не что иное, как *выборка* объема N (см., например, [4]) из множества уровней энергии. Для случая различимых частиц это *упорядоченная выборка* (существенно, какая именно частица попала на какой уровень), а для случая неразличимых частиц – *выборка неупорядоченная*. Более того, в данной работе мы рассматриваем только *выборки с возвращениями* – число частиц на одном и том же уровне может быть произвольным. (Если же рассматривать частицы, подчиняющиеся ферми-статистике, когда на одном и том же уровне энергии не может находиться более одной частицы, то следует использовать выборки *без возвращения* – однажды «извлеченный» уровень энергии в дальнейших попытках не участвует. Впрочем, в данной работе эта задача не затрагивается.)

Итак, рассматриваемые нами распределения частиц по уровням энергии суть выборки $\{j_1, \dots, j_N\}$ из множества уровней, а именно,

- *упорядоченные выборки с возвращением* для случая различимых частиц,
- *неупорядоченные выборки с возвращением* для случая неразличимых частиц.

Даже если частицы различимы, в каждой конкретной выборке нас будет интересовать лишь число частиц, находящихся на каждом из уровней. Обозначим через N_j число раз, которое сомножитель ψ_j встречается в произведении в правой части формулы (1) или (2) (т.е. число тех $s \in \{1, \dots, N\}$, для которых $j_s = j$). Вектор $\Psi_{j_1, \dots, j_N}$ (или, что то же самое, выборка $\{j_1, \dots, j_N\}$) отвечает конкретному квантовомеханическому состоянию системы из N частиц а число N_j показывает, *сколько именно* из этих частиц находится в j -м состоянии ψ_j . Числа N_j называются *числами заполнения*. Итак, каждой выборке $\{j_1, \dots, j_N\}$ (т.е. каждому собственному вектору (1) или (2) N -частичного гамильтониана $\hat{H}_N$) сопоставляется набор $(N_1, N_2, \dots)$ чисел заполнения, причем, очевидно,

$$N_1 + N_2 + \dots = N, \quad \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \dots = \lambda.$$

Не представляет также труда для заданного собственного вектора (1) или (2) определить число заполнения, отвечающее *интервалу энергий* $[E_1, E_2]$ одночастичного гамильтониана. Именно,

$$N_{E_1, E_2} = N_j + N_{j+1} + \dots + N_{j+s},$$

где $\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{j+s}$ – все уровни энергии одночастичного гамильтониана на отрезке $[E_1, E_2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В бозонном случае (т.е. для неупорядоченной выборки) набор чисел заполнения однозначно определяет выборку, в то время как в «гиббсовском» случае одному и тому же набору чисел заполнения отвечает $N!/(N_1!N_2!\dots)$ различных упорядоченных выборок, отличающихся друг от друга перестановками.

Поэтому при подсчете выборок в бозонном случае можно просто считать все возможные наборы чисел заполнения. В гиббсовском случае, чтобы подсчитать выборки, также можно считать наборы чисел заполнения, но уже с весами (коэффициентами) $N!/(N_1!N_2!\dots)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ничто не препятствует тому, чтобы рассмотреть упорядоченные выборки без возвращения (при этом получится описание системы различных частиц, подчиняющихся принципу запрета Паули). Насколько нам известно, такие системы в литературе не рассматривались.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. К ограничению на энергию мы добавили еще одно – условие-равенство для числа частиц. По крайней мере в случае бозе-частиц можно было бы и на число частиц наложить условие типа неравенства. При этом если M есть ограничение на энергию системы, то существует такое $N_0 = N_0(M)$, что при $N \gg N_0$ условие, что число частиц не превосходит N , приводит к таким же результатам, что и отсутствие какого бы то ни было условия на число частиц, а при $N < N_0$ условие-неравенство и условие-равенство приводят к качественно одинаковым результатам.

2. Распределение Бозе–Эйнштейна для целочисленных уровней энергии

Рассмотрим задачу о распределении тождественных неразличимых частиц по целочисленным уровням энергии при условии, что суммарная энергия системы ограничена сверху, а число частиц задано. Частицы будем считать бозевскими (т.е. на каждом уровне энергии может находиться неограниченное количество частиц). Для простоты будем рассматривать систему размерности $d = 3$.

2.1. Определение системы. Будем изучать систему, определяемую следующим образом. Для уровней энергии $j = 0, 1, 2, \dots$ кратностей

$$q_j = \frac{(j+1)(j+2)}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

рассматриваются всевозможные наборы $\{N_{jk}\}$ неотрицательных целых чисел N_{jk} , $j = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=0}^{\infty} N_{jk} = N, \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \leq M, \quad (6)$$

где N и M – заданные положительные числа (которые без ограничения общности будем считать целыми). Все такие наборы будем считать равновероятными.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [1] значения уровней энергии начинались не с нуля, а с единицы – иначе при отсутствии ограничений на число частиц общее число вариантов оказалось бы бесконечным. В присутствии ограничения (5) удобнее рассматривать уровни энергии, начинающиеся с нуля – формулы при этом упрощаются. При желании, разумеется, можно перейти и к уровням, начинающимся с единицы, сделав замену

$$M \mapsto M + N, \quad q_j \mapsto q_{j-1}. \quad (7)$$

Нас интересует, что будет происходить с системой при $M \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$. Введем дополнительные числовые характеристики системы, зависящие M и N , в терминах которых и будут формулироваться результаты.

Определим числа $b = b(M, N) > 0$ и $z = z(M, N) > 1$ как решение системы уравнений

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{z e^{b j} - 1}, \quad N = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_j}{z e^{b j} - 1}. \quad (8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых $M, N > 0$ система (8) имеет единственное решение $b = b(M, N) > 0$, $z = z(M, N) > 1$. Далее, при $b \rightarrow 0$ справедливы асимптотические соотношения

$$N \asymp z^{-1} b^{-3} \quad \text{при } z > 1 + b^3, \quad M \asymp z^{-1} b^{-4}. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как и в [1], можно в системе (8) перейти от сумм к интегралам, пользуясь формулами Эйлера–Маклорена. В главном члене при этом получим (для простоты ограничиваясь случаем, когда $z - 1$ не мало) [3; с. 339, 3.411–6]

$$N = z^{-1} b^{-3} ({}_1F_1(z^{-1}; 3; 1) + O(b)), \quad M = 3z^{-1} b^{-4} ({}_1F_1(z^{-1}; 4; 1) + O(b)),$$

где ${}_1F_1(a; b; c)$ – вырожденная гипергеометрическая функция первого рода.

В дальнейшем, если явно не оговорено противное, всюду считается, что M , N , b и z связаны формулами (8), а параметры z и b удовлетворяют соотношениям

$$1 + b^{3/2-\varepsilon} < z < b^{-3+\varepsilon} \quad (10)$$

для некоторого произвольно зафиксированного $\varepsilon > 0$.

Кроме того, мы введем обозначения

$$N_j = \sum_{k=0}^{q_j} N_{jk} \quad (11)$$

для суммарных чисел заполнения соответствующих уровней j и положим

$$\bar{N}_j = \frac{q_j}{z e^{b j} - 1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

2.2. Энтропия и теоремы о концентрации. Обозначим через $\mathcal{N}(M, N)$ общее число наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих ограничениям (5), (6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Энтропией рассматриваемой системы назовем число

$$S = \ln \mathcal{N}(M, N). \quad (13)$$

Асимптотику энтропии при $N, M \rightarrow \infty$ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнено соотношение (10). Тогда при $N, M \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S = N \ln z + bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-bj}} + O(\ln N). \quad (14)$$

Пусть $\psi(x)$ – фиксированная положительная функция, которая стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, и пусть

$$\Delta N = \sqrt{N \ln N} \psi(N), \quad \Delta M = \frac{M}{N} \Delta N. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнено соотношение (10). Тогда

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=0}^{\infty} j N_j - M \right| > \Delta M \right) = O(N^{-k}) \quad (16)$$

для любого k .

Для кумулятивных вероятностей справедлива следующая

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполнено соотношение (10). Тогда для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедливы оценки

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=0}^l N_j - \sum_{j=1}^l \frac{q_j}{ze^{bj} - 1} \right| > \Delta N \right) = O(N^{-k}), \quad (17)$$

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=1}^l j N_j - \sum_{j=1}^l \frac{j q_j}{ze^{bj} - 1} \right| > \Delta M \right) = O(N^{-k}) \quad (18)$$

для любого k .

2.3. Доказательства. Доказательство утверждений из предыдущего пункта, как и в [1], разобьем на несколько подпунктов.

2.3.1. Оценка сверху для общего числа вариантов. Обозначим

$$\mu = \ln z, \quad \text{так что} \quad z = e^{\mu}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех выборок, на котором выполнены условия (5) и (6). Из этих условий вытекает, что на множестве $\mathcal{M}$ для соответствующих наборов $\{N_{jk}\}$ чисел заполнения справедливо неравенство

$$\exp \left\{ bM + \mu N - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} (bj + \mu) \right\} \geq 1. \quad (19)$$

(Это неравенство справедливо для любых положительных b и μ , но мы будем использовать именно b и μ , определенные выше.) Суммируя это неравенство сначала

по всем наборам $\{N_{jk}\}$ из $\mathcal{M}$, а затем распространяя суммирование на всевозможные финитные неотрицательные $\{N_{jk}\}$, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(M, N) &= \sum_{\{N_{jk}\} \in \mathcal{M}} 1 \leq e^{bM + \mu N} \sum_{\{N_{jk}\}} \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}(bj + \mu) \right\} \\
 &= e^{bM + \mu N} \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \sum_{N_{jk}=0}^{\infty} e^{-N_{jk}(bj + \mu)} \\
 &= e^{bM + \mu N} \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \frac{1}{1 - e^{-bj - \mu}} \\
 &= \exp \left\{ bM + \mu N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj - \mu}} \right\}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Это и есть искомая оценка сверху для числа вариантов.

2.3.2. *Оценка числа вариантов с большими отклонениями.* Оценим теперь сверху число вариантов из $\mathcal{M}$, для которых

$$\left| \sum_{j=0}^l (N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta, \tag{21}$$

где $\bar{N}_j = q_j(ze^{bj} - 1)^{-1}$ – значения (12) чисел заполнения, отвечающие бозевскому распределению. Множество таких вариантов обозначим через $\mathcal{M}_{\Delta}$.

Положим для удобства записи дальнейших формул

$$\bar{N}_{jk} = \frac{1}{ze^{bj} - 1} \equiv \bar{N}_j / q_j \tag{22}$$

(эти числа не зависят от k). На множестве $\mathcal{M}_{\Delta}$ выполнены неравенства (5), (6) и

$$\Delta - \sum_{j=0}^l \sum_{k=1}^{q_j} (N_{jk} - \bar{N}_{jk}) \leq 0 \quad \text{или} \quad \Delta - \sum_{j=0}^l \sum_{k=1}^{q_j} (\bar{N}_{jk} - N_{jk}) \leq 0. \tag{23}$$

Поэтому на этом множестве справедливо и неравенство

$$\begin{aligned}
 &\exp \left\{ bM + \mu N - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}(bj + \mu) \right\} \\
 &\times \left(\exp \left\{ c \sum_{j=0}^l \sum_{k=1}^{q_j} (N_{jk} - \bar{N}_{jk}) \right\} + \exp \left\{ c \sum_{j=0}^l \sum_{k=1}^{q_j} (\bar{N}_{jk} - N_{jk}) \right\} \right) \geq 1. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{N}(M, N, \Delta)$ – число вариантов во множестве $\mathcal{M}_\Delta$. Рассуждая как и выше при оценке величины $\mathcal{N}(M, N)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M, N, \Delta) \leq \exp \left\{ bM + \mu N - c\Delta + \sum_{j=l+1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}} \right\} \\ \times \left(\exp \left\{ \sum_{j=0}^l \left(q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu+c}} - c\bar{N}_j \right) \right\} \right. \\ \left. + \exp \left\{ \sum_{j=0}^l \left(q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu-c}} + c\bar{N}_j \right) \right\} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Эта формула справедлива при $0 < c < \mu$. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом второго порядка и получим

$$\begin{aligned} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu+c}} - c\bar{N}_j &= q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}} + c \left(\frac{q_j}{e^{bj+\mu} - 1} - \bar{N}_j \right) \\ &\quad + \frac{q_j c^2 e^{bj+\mu-\theta_j c}}{(e^{bj+\mu-\theta_j c} - 1)^2} \\ &= q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}} + \frac{q_j c^2 e^{bj+\mu-\theta_j c}}{(e^{bj+\mu-\theta_j c} - 1)^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\theta_j \in [0, 1]$, и аналогично для второго слагаемого в (25). Если $c \leq \min\{\mu/2, 1\}$, то, рассуждая, как и в [1], с использованием оценок, аналогичных полученным там в лемме 23, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^l \frac{q_j e^{bj+\mu \pm \theta_j c}}{(e^{bj+\mu \pm \theta_j c} - 1)^2} \leq \text{const } e^{-\mu} b^{-3}. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}(N, M, \Delta) \leq \exp \left\{ bM + \mu N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}} \right\} \exp \{-c\Delta + Kc^2 e^{-\mu} b^{-3}\}. \quad (28)$$

Подставляя сюда

$$\Delta = \Delta N = \sqrt{N \ln N} \psi(N) \asymp e^{-\mu/2} b^{-3/2} \sqrt{\ln N} \psi(N) \quad (29)$$

и

$$c = \frac{b^3 e^\mu \Delta}{2K} \asymp b^{3/2} e^{\mu/2} \sqrt{\ln N} \psi(N) \quad (30)$$

(что законно, поскольку при таком выборе c в силу условия (10) неравенство $c \leq \mu/2$ будет заведомо выполнено при достаточно больших N), получим неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(N, M, \Delta) &\leq \exp \left\{ bM + \mu N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}} \right\} N^{-\psi^2(N)/2} \\ &\leq C_k \exp \left\{ bM + \mu N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}} \right\} N^{-k} \end{aligned} \quad (31)$$

для любого k . Это и есть требуемая оценка сверху для числа вариантов с большими отклонениями.

2.3.3. *Оценка снизу для общего числа вариантов.* Дадим теперь для $\mathcal{N}(M, N)$ оценку снизу. Вместо того, что бы оценивать само число $\mathcal{N}(M, N)$, оценим число $\mathcal{N}_0(M, N) < \mathcal{N}(M, N)$ вариантов, для которых выполнены соотношения (5) и (6), причем последнее также обращается в равенство,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} = M.$$

Аналогично тому, как это было проделано в работе [1] (формулы (61)–(64)), используя интегральное представление

$$\delta_{mn} = \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{ib\varphi(m-n)} d\varphi$$

символа Кронекера, запишем $\mathcal{N}_0(M, N)$ в виде интеграла

$$\mathcal{N}_0(M, N) = \frac{b}{4\pi^2} e^{bM+\mu N} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{\Lambda\Phi(\varphi, \psi)} d\psi \right) d\varphi, \quad (32)$$

где

$$\Lambda = b^{-3} e^{-\mu} \asymp N, \quad (33)$$

$$\Phi(\varphi, \psi) = ib^4 e^{\mu} M \varphi + ib^3 e^{\mu} N \psi + b^3 e^{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-\mu - bj - i(\psi + bj\varphi)}}. \quad (34)$$

ЛЕММА 11. *Задаваемая формулой (34) фазовая функция $\Phi(\varphi, \psi)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) *все ее производные равномерно ограничены при значениях параметров b и z , удовлетворяющих неравенствам (10);*
- 2) *фазовая функция имеет стационарную точку $\varphi = 0 \bmod 2\pi/b$, $\psi = 0 \bmod 2\pi$;*
- 3) *матрица $\Phi''(0, 0)$ вторых производных фазовой функции в стационарной точке невырождена и равномерно по параметрам b и z , удовлетворяющим неравенствам (10), отрицательно определена;*
- 4) *мнимая часть фазовой функции в стационарной точке равна нулю, а ее вещественная часть достигает там абсолютного максимума, причем для любого $\gamma > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от параметров b и z , удовлетворяющих неравенствам (10), что*

$$\operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) < \operatorname{Re} \Phi(0, 0) - \delta \quad \text{при} \quad \operatorname{dist}((\varphi, \psi), (0, 0)) > \gamma. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству леммы 18 из [1], с некоторыми отличиями, вызванными тем фактом, что здесь, в отличие от [1], рассматривается двумерный, а не одномерный интеграл. Поэтому мы лишь отметим основные моменты доказательства.

1) Ограниченность первых и вторых производных фазовой функции доказывается непосредственной выкладкой. Ограниченность дальнейших производных доказывается тем же методом, что и в [1], индукцией по порядку производной.

2) Чтобы проверить, что точка $(0, 0)$ – стационарная точка фазовой функции, вычислим ее первые производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= ib^4 e^\mu \left[M - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{\mu+bj+i(\psi+bj\varphi)} - 1} \right], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} &= ib^3 e^\mu \left[N - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_j}{e^{\mu+bj+i(\psi+bj\varphi)} - 1} \right].\end{aligned}$$

При $\varphi = \psi = 0$ обе производные обращаются в нуль в силу определения параметров b и $z = e^\mu$.

3) Матрица $\Phi''(0, 0)$ имеет вид

$$\Phi''(0, 0) = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^3 q_j e^{bj}}{(e^{bj} - e^{-\mu})^2} \begin{pmatrix} 1 & bj \\ bj & b^2 j^2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

В этой формуле все слагаемые (рассматриваемые как матрицы квадратичных форм) неположительно определены, и мы можем, опуская часть слагаемых и выбрасывая $e^{-\mu}$ в знаменателе, оценить эту матрицу следующим образом:

$$\Phi''(0, 0) \leq - \sum_{j=[x_1/b]}^{[x_2/b]} b^3 q_j e^{-bj} \begin{pmatrix} 1 & bj \\ bj & b^2 j^2 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $x_2 > x_1 > 0$ – произвольные фиксированные числа. При малых b матрицу в правой части можно с учетом асимптотики $q_j \simeq j^2/2$ при больших j вычислить по формуле Эйлера–Маклорена, получая в результате (с точностью до $o(1)$) матрицу

$$- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} x^2 e^{-x} dx & \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx \\ \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx & \int_{x_1}^{x_2} x^4 e^{-x} dx \end{pmatrix} = - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, x) \\ (x, 1) & (x, x) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где

$$(u, v) = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \bar{v}(x) e^{-x} x^2 dx$$

– скалярное произведение в $L^2([x_1, x_2], e^{-x} x^2)$. Поскольку функции 1 и x линейно независимы, матрица (38) отрицательно определена, что и доказывает требуемое утверждение.

4) Справедливо соотношение

$$\operatorname{Re} \Phi(0, 0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) = b^2 \sum_{j=0}^{\infty} q_j \Delta_j,$$

где

$$\Delta_j = z \ln \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-bj}} - z \ln \left| \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-bj(1+i\varphi)+i\psi}} \right|.$$

Преобразуя это выражение подобно тому, как это было сделано в [1; с. 246–247], получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(0, 0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) &\geq \operatorname{const} b \sum_{j=[x_1/b]}^{[x_2/b]} (1 - \cos(bj\varphi + \psi)) \\ &\geq \operatorname{const} \left(x_2 - x_1 - b - b \left| \sin \frac{b\varphi}{2} \right|^{-1} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

(мы воспользовались формулой [3; 1.341.3] для суммы косинусов) откуда, подбирая x_1 и x_2 подходящим образом, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Теперь мы можем оценить интеграл (32). По лемме 11 все производные функции $\Phi(\varphi, \psi)$ равномерно ограничены. Кроме того, если представить ее в виде $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 вещественны, то

$$\operatorname{grad} \Phi_1(0, 0) = 0, \quad \Phi_1''(0, 0) < -C < 0, \quad \Phi_2'(0, 0) = 0, \quad \Phi_2''(0, 0) = 0.$$

Отсюда с помощью формулы Тейлора с остаточным членом получаем оценки

$$\Phi(0, 0) - C_1(\varphi^2 + \psi^2) \leq \Phi_1(\varphi, \psi) \leq \Phi(0, 0) - C_2(\varphi^2 + \psi^2), \quad (40)$$

$$|\Phi_2(\varphi)| \leq C_3(\varphi^2 + \psi^2)^{3/2} \quad (41)$$

с положительными постоянными C_j , не зависящими от параметров b и z , при условии, что $\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Пусть

$$1 = \chi_1(\varphi, \psi) + \chi_2(\varphi, \psi)$$

– неотрицательное гладкое разбиение единицы на торе

$$T^2 \ni (\varphi \bmod 2\pi/b, \psi \bmod 2\pi)$$

такое, что

$$\chi_1(\varphi, \psi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \geq \varepsilon, \\ 1 & \text{при } \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \leq \varepsilon/2. \end{cases}$$

Представим интеграл

$$I = \iint_{T^2} e^{\Lambda\Phi(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi$$

в виде суммы

$$I = \iint_{T^2} e^{\Lambda\Phi(\varphi, \psi)} \chi_1(\varphi, \psi) d\varphi d\psi + \iint_{T^2} e^{\Lambda\Phi(\varphi, \psi)} \chi_2(\varphi, \psi) d\varphi d\psi \equiv I_1 + I_2.$$

По лемме 11, п. 4

$$\operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) \leq \Phi(0, 0) - \delta, \quad \delta > 0,$$

на носителе подынтегрального выражения в I_2 , а мера носителя имеет порядок b^{-1} . Поэтому

$$|I_2| \leq K e^{\Lambda(\Phi(0,0) - \delta/2)} \quad (42)$$

с некоторой постоянной K . Оценим теперь интеграл I_1 . Для этого рассмотрим диск

$$D = D(0, \varepsilon)$$

радиуса ε с центром в точке $(0, 0)$ и в нем два меньших диска $D_{1/2} \subset D_{1/3} \subset D$, где

$$D_{1/2} = D(0, \varepsilon \Lambda^{-1/2}), \quad D_{1/3} = D(0, \varepsilon \Lambda^{-1/3}), \quad (43)$$

Тогда

$$|\Lambda \Phi_2| \leq C_3 \varepsilon^3 \quad \text{при} \quad \varphi \in D_{1/3},$$

так что (при достаточно малом ε) в диске $D_{1/3}$ мнимая часть аргумента экспоненты мала и справедливо соотношение

$$\operatorname{Re} e^{\Lambda \Phi(\varphi, \psi)} \geq \frac{1}{2} e^{\Lambda \Phi_1(\varphi, \psi)}, \quad \varphi \in D_{1/3}. \quad (44)$$

Далее,

$$\Lambda \Phi(0, 0) \geq \Lambda \Phi_1(\varphi, \psi) \geq \Lambda \Phi(0, 0) - C_1 \varepsilon^2, \quad \varphi \in D_{1/2}. \quad (45)$$

Комбинируя это с предыдущим неравенством и учитывая, что площадь диска $D_{1/2}$ равна $\pi \varepsilon^2 \Lambda^{-1}$, получаем

$$\operatorname{Re} \iint_{D_{1/2}} e^{\Lambda \Phi(\varphi, \psi)} \psi_1(\varphi, \psi) d\varphi d\psi \geq C_4 e^{\Lambda \Phi(0, 0)} \Lambda^{-1}.$$

Далее,

$$\operatorname{Re} \iint_{D_{1/3} \setminus D_{1/2}} e^{\Lambda \Phi(\varphi, \psi)} \psi_1(\varphi, \psi) d\varphi d\psi \geq 0$$

в силу (44). Кроме этого, справедливо неравенство

$$\Lambda \Phi_1(\varphi, \psi) \leq \Lambda \Phi_1(0, 0) - C_2 \varepsilon^2 \Lambda^{1/3}, \quad (\varphi, \psi) \in D \setminus D_{1/3},$$

так что

$$\left| \iint_{D \setminus D_{1/3}} e^{\Lambda \Phi(\varphi, \psi)} \psi_1(\varphi, \psi) d\varphi d\psi \right| \leq C_5 e^{\Lambda \Phi(0, 0)} e^{-C_2 \varepsilon^2 \Lambda^{1/3}}.$$

Комбинируя все предыдущие оценки, получаем

$$I = \operatorname{Re} I \geq C_6 \Lambda^{-1} e^{\Lambda \Phi(0, 0)}.$$

Остается подставить эту оценку в формулу для $\mathcal{N}_0(M, N)$ с учетом выражения для фазовой функции, и в силу неравенства $\mathcal{N}(M, N) > \mathcal{N}_0(M, N)$ мы приходим к следующей оценке снизу для $\mathcal{N}(M, N)$ (ср. рассуждения, проведенные в [1]):

$$\mathcal{N}(N, M) \geq C b \Lambda^{-1} \exp \left\{ bM + \mu N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj - \mu}} \right\}. \quad (46)$$

2.3.4. *Вычисление энтропии и доказательство теорем о концентрации.* Теперь несложно доказать теоремы 8–10. Именно, теорема 8 (асимптотика энтропии) получается, если скомбинировать верхнюю и нижнюю оценки (20) и (46) для $\mathcal{N}(N, M)$ и перейти к логарифмам. Неравенство (17) получается из оценок (31) и (46). Чтобы доказать неравенство (18), для соответствующего числа вариантов с большими отклонениями мы можем вывести оценку, аналогичную (31) (рассуждения тут аналогичны проведенным выше, а похожее вычисление читатель может найти в [1]) и скомбинировать ее с (46). Тем самым получается теорема 10. Наконец, теорема 9 является частным случаем теоремы 10 (при $l = \infty$).

3. Распределение Гиббса для целочисленных уровней энергии

Рассмотрим теперь задачу о распределении тождественных частиц по целым уровням энергии с ограничениями на суммарную энергию и число частиц, считая, что частицы *различимы*. Мы по-прежнему считаем, что на каждом уровне энергии может находиться неограниченное количество частиц и рассматриваем систему размерности $d = 3$.

3.1. Определение системы. По сравнению со случаем неразличимых частиц определение системы теперь претерпевает некоторые изменения. Именно, как уже отмечалось выше, для различимых частиц каждому набору чисел заполнения соответствует целое множество выборов, и поэтому в качестве равноправных вариантов в этом случае следует брать не наборы чисел заполнения, а сами выборы. Итак, пусть $\mathcal{E}$ – множество уровней энергии $j = 0, 1, 2, \dots$ кратностей q_j , задаваемых формулой (4). Рассмотрим всевозможные упорядоченные выборы с возвращениями из этого множества, такие, что соответствующие этим выборкам наборы $\{N_{jk}\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k = 1, \dots, q_j$, чисел заполнения удовлетворяют условиям (5) и (6), где N и M – заданные целые положительные числа. (Первое из этих условий означает просто, что объем выборки равен N , а второе – что энергия отвечающего этой выборке состояния N -частичной системы не превосходит M .) Нас интересует, что будет происходить с системой при $M \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$.

Как и в случае различимых частиц, введем дополнительные числовые характеристики системы, в терминах которых будут формулироваться результаты.

Определим числа $\beta = \beta(M, N) > 0$ и $\xi = \xi(M, N) > 0$ как решение системы уравнений

$$M = \xi^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} j q_j e^{-\beta j}, \quad N = \xi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-\beta j}. \quad (47)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Для любых $M, N > 0$ система (47) имеет единственное решение $\beta = \beta(M, N) > 0$, $\xi = \xi(M, N) > 0$. При $\beta \rightarrow 0$ справедливы асимптотические соотношения

$$N \asymp \xi^{-1} \beta^{-3}, \quad M \asymp \xi^{-1} \beta^{-4}. \quad (48)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. При $\beta \rightarrow 0$ можно в системе (47) перейти от сумм к интегралам, пользуясь формулами Эйлера–Маклорена. В главном члене при этом получим

$$N = \xi^{-1} \beta^{-3} (1 + O(b)), \quad M = 3 \xi^{-1} \beta^{-4} (1 + O(b)).$$

Отсюда β и ξ можно выразить через M и N асимптотическими формулами

$$\beta = \frac{3N}{M} + O((N/M)^2), \quad \xi = \frac{M^3}{27N^4} (1 + O((N/M))). \quad (49)$$

В дальнейшем считаем, что M , N , β и ξ связаны формулами (47). Кроме того, будем пользоваться обозначениями (11) для суммарных чисел заполнения соответствующих уровней j и положим

$$\bar{N}_j = q_j \xi^{-1} e^{-\beta j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (50)$$

Наконец, всюду будет предполагаться, что параметры β и ξ удовлетворяют соотношению

$$\xi < \beta^{-3+\varepsilon} \quad (51)$$

для некоторого произвольного (но фиксированного) $\varepsilon > 0$.

3.2. Энтропия и теоремы о концентрации. Обозначим через $\mathcal{N}(M, N)$ общее число упорядоченных выборок, числа заполнения которых удовлетворяют ограничениям (5) и (6), а через

$$S = \ln \mathcal{N}(M, N) \quad (52)$$

– энтропию рассматриваемой системы различных частиц.

Асимптотику энтропии при $N, M \rightarrow \infty$ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14. Пусть выполнено условие (51). Тогда при $N, M \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S = \beta M + N \ln N + N \ln \xi + O(\ln N).$$

Пусть, как и ранее, $\psi(x)$ – положительная функция, сколь угодно медленно растущая при $x \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 15. Пусть выполнено условие (51). Тогда справедливы оценки

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=0}^{\infty} j N_j - M \right| > \frac{M}{N} \sqrt{N \ln N} \psi(N) \right) = O(N^{-k}) \quad (53)$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Для кумулятивных вероятностей справедлива следующая

ТЕОРЕМА 16. Пусть выполнено условие (51). Тогда справедливы оценки

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=0}^l N_j - \sum_{j=1}^l q_j \xi^{-1} e^{-\beta j} \right| > \sqrt{N \ln N} \psi(N) \right) = O(N^{-k}), \quad (54)$$

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=1}^l j N_j - \sum_{j=1}^l j q_j \xi^{-1} e^{-\beta j} \right| > \frac{M}{N} \sqrt{N \ln N} \psi(N) \right) = O(N^{-k}) \quad (55)$$

для любых $l, k \in \mathbb{Z}_+$.

3.3. Доказательства. Доказательства проводятся таким же методом, как и в случае неразличимых частиц. Основное отличие состоит в методе подсчета вариантов. Если в случае неразличимых частиц имелось взаимно однозначное соответствие между выборками и наборами чисел заполнения, то в случае различимых частиц (т.е. упорядоченных выборок) каждому набору $\{N_{jk}\}$ чисел заполнения соответствует

$$\frac{N!}{\prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} N_{jk}!} \quad (56)$$

различных выборок, где $N = \sum N_{jk}$. Поэтому при подсчете вариантов следует принимать во внимание коэффициенты (56), вводя их в формулы в нужных местах. Перейдем к изложению доказательства, обращая внимание главным образом на отличия от бозевского случая.

3.3.1. Оценка сверху для общего числа вариантов. Обозначим

$$\mu = \ln \xi, \quad \text{так что} \quad \xi = e^{\mu}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех упорядоченных выборок, на котором выполнены условия (5) и (6). Для числа $\mathcal{N}(N, M)$ таких выборок получаем оценку сверху

$$\mathcal{N}(M, N) \leq C\sqrt{N} \exp\{N \ln N + \beta M + \mu N\}. \quad (57)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M, N) &= N! \sum_{\{N_{jk}\} \in \mathcal{M}} \frac{1}{\prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} N_{jk}!} \\ &\leq N! e^{\beta M + \mu N} \sum_{\{N_{jk}\}} \frac{\exp\{-\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}(\beta j + \mu)\}}{\prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} N_{jk}!} \\ &= N! e^{\beta M + \mu N} \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \sum_{N_{jk}=0}^{\infty} \frac{e^{-N_{jk}(\beta j + \mu)}}{N_{jk}!} \\ &= N! e^{\beta M + \mu N} \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} e^{-\beta j - \mu} \\ &= N! \exp\left\{\beta M + \mu N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-\beta j - \mu}\right\} \\ &= N! \exp\{\beta M + \mu N + N\} \quad (\text{по формуле (47)}) \\ &\leq C\sqrt{N} \exp\{N \ln N + \beta M + \mu N\} \quad (\text{по формуле Стирлинга}). \end{aligned}$$

3.3.2. Оценка числа вариантов с большими отклонениями. Пусть теперь $\mathcal{M}_{\Delta}$ – подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из вариантов, для которых

$$\left| \sum_{j=0}^l \sum_{k=1}^{q_j} (N_{jk} - \bar{N}_{jk}) \right| > \Delta, \quad (58)$$

где

$$\bar{N}_{jk} = e^{-\beta j - \mu} \equiv \bar{N}_j / q_j \quad (59)$$

(эти числа не зависят от k). Рассуждая как и выше, для числа $\mathcal{N}(M, N, \Delta)$ выборов во множестве $\mathcal{M}_\Delta$ получаем при $0 < c < \mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M, N, \Delta) \leq N! \exp \left\{ \beta M + \mu N - c\Delta + \sum_{j=l+1}^{\infty} q_j e^{-\beta j - \mu} \right\} \\ \times \left(\exp \left\{ \sum_{j=0}^l (q_j e^{-\beta j - \mu + c} - c \bar{N}_j) \right\} + \exp \left\{ \sum_{j=0}^l (q_j e^{-\beta j - \mu - c} + c \bar{N}_j) \right\} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где $\bar{N}_j$ задаются формулой (50).

Далее, пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом второго порядка, получаем

$$q_j e^{-\beta j - \mu \pm c} \mp c \bar{N}_j = q_j e^{-\beta j - \mu} (e^{\pm c} \mp c) = q_j e^{-\beta j - \mu} \left(1 + \frac{c^2}{2} e^{\pm \theta c} \right), \quad (61)$$

где $\theta \equiv \theta(c) \in (0, 1)$.

Если $c \leq \min\{\mu/2, 1\}$, то получаем неравенство

$$\sum_{j=0}^l q_j e^{\beta j + \mu - \theta_j c} \leq \text{const } e^{-\mu} \beta^{-3}. \quad (62)$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}(N, M, \Delta) \leq C \sqrt{N} \exp\{N \ln N + \beta M + \mu N\} \exp\{-c\Delta + K c^2 e^{-\mu} \beta^{-3}\}. \quad (63)$$

Подставляя сюда

$$\Delta = \sqrt{N \ln N} \psi(N) \asymp e^{-\mu/2} \beta^{-3/2} \sqrt{\ln N} \psi(N) \quad (64)$$

и

$$c = \frac{\beta^3 e^\mu \Delta}{2K} \asymp \beta^{3/2} e^{\mu/2} \sqrt{\ln N} \psi(N) \quad (65)$$

(что законно, поскольку при таком выборе c в силу условия (51) неравенство $c \leq \mu/2$ будет заведомо выполнено при достаточно больших N), получим неравенство

$$\mathcal{N}(N, M, \Delta) \leq C_k \sqrt{N} \exp\{N \ln N + \beta M + \mu N\} N^{-k} \quad (66)$$

для любого k . Это и есть требуемая оценка сверху для числа вариантов с большими отклонениями.

3.3.3. Оценка снизу для общего числа вариантов. Дадим теперь для $\mathcal{N}(M, N)$ оценку снизу. Как и в бозевском случае, вместо того, что бы оценивать само число $\mathcal{N}(M, N)$, оценим число $\mathcal{N}_0(M, N) < \mathcal{N}(M, N)$ выборов, для которых выполнены соотношения (5) и (6), причем последнее также обращается в равенство:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} = N, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} = M. \quad (67)$$

Множество наборов чисел заполнения, удовлетворяющих (67), обозначим через $\mathcal{M}_0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_0(M, N) &= \sum_{\{N_{jk}\} \in \mathcal{M}_0} \frac{N!}{\prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} N_{jk}!} \\ &= N! \sum_{\{N_{jk}\}} \frac{\delta(N, \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}) \delta(M, \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk})}{\prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} N_{jk}!}.\end{aligned}\quad (68)$$

Здесь сумма во второй строчке берется по всем финитным наборам неотрицательных чисел заполнения, а

$$\delta(m, n) \equiv \delta_{mn}$$

– символ Кронекера.

Подставим интегральное представление

$$\delta_{mn} = \frac{s}{2\pi} \int_{-\pi/s}^{\pi/s} e^{(isx+\omega)(m-n)} dx$$

символа Кронекера (где s и ω – произвольные ненулевые вещественные числа) в (68), выбирая для первого сомножителя $s = 1$ и $\omega = \mu$, а для второго – $s = \omega = \beta$. Тогда для $\mathcal{N}_0(M, N)$ получим интегральное представление

$$\mathcal{N}_0(M, N) = \frac{\beta N! e^{\beta M + \mu N}}{4\pi^2} \int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{\Lambda \Phi(\varphi, \psi)} d\psi \right) d\varphi, \quad (69)$$

где

$$\Lambda = \beta^{-3} e^{-\mu} \asymp N, \quad (70)$$

$$\Phi(\varphi, \psi) = i\beta^4 e^{\mu} M \varphi + i\beta^3 e^{\mu} N \psi + \beta^3 \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-\beta j - i(\psi + \beta j \varphi)}. \quad (71)$$

Действительно, указанная подстановка дает

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_0(M, N) &= \frac{\beta N! e^{\beta M + \mu N}}{4\pi^2} \int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\{N_{jk}\}} \frac{e^{i\beta \varphi M + i\psi N}}{\prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} N_{jk}!} \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} (\beta j + \mu + i\beta j \varphi + i\psi) \right\} d\psi \Big) d\varphi \\ &= \frac{\beta N! e^{\beta M + \mu N}}{4\pi^2} \int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\beta \varphi M + i\psi N} \right. \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \sum_{N_{jk}=0}^{\infty} \frac{e^{-N_{jk}(\beta j + \mu + i\beta j \varphi + i\psi)}}{N_{jk}!} d\psi \Big) d\varphi \\ &= \frac{\beta N! e^{\beta M + \mu N}}{4\pi^2} \int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\beta \varphi M + i\psi N} \right. \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \exp \{ e^{-(\beta j + \mu + i\beta j \varphi + i\psi)} \} d\psi \Big) d\varphi\end{aligned}$$

$$= \frac{\beta N! e^{\beta M + \mu N}}{4\pi^2} \int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i\beta\varphi M + i\psi N + \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-(\beta j + \mu + i\beta j\varphi + i\psi)} \right\} d\psi \right) d\varphi. \quad (72)$$

ЛЕММА 17. Задаваемая формулой (71) фазовая функция $\Phi(\varphi, \psi)$ обладает следующими свойствами:

- 1) все ее производные равномерно ограничены при значениях параметров β и ξ , удовлетворяющих неравенству (51);
- 2) фазовая функция имеет стационарную точку $\varphi = 0 \bmod 2\pi/\beta$, $\psi = 0 \bmod 2\pi$;
- 3) матрица $\Phi''(0, 0)$ вторых производных фазовой функции в стационарной точке невырождена и равномерно по параметрам β и ξ , удовлетворяющим неравенству (51), отрицательно определена;
- 4) мнимая часть фазовой функции в стационарной точке равна нулю, а ее вещественная часть достигает там абсолютного максимума, причем для любого $\gamma > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от параметров β и ξ , удовлетворяющих неравенству (51), что

$$\operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) < \operatorname{Re} \Phi(0, 0) - \delta \quad \text{при} \quad \operatorname{dist}((\varphi, \psi), (0, 0)) > \gamma. \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Ограниченность производных фазовой функции доказывается непосредственной выкладкой.

2) Чтобы проверить, что точка $(0, 0)$ – стационарная точка фазовой функции, вычислим ее первые производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = i\beta^4 e^{\mu} \left[M - e^{-\mu} \sum_{j=0}^{\infty} j q_j e^{-\beta j - i(\psi + \beta j \varphi)} \right], \quad (74)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = i\beta^3 e^{\mu} \left[N - e^{-\mu} \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-\beta j - i(\psi + \beta j \varphi)} \right]. \quad (75)$$

При $\varphi = \psi = 0$ обе производные обращаются в нуль в силу определения параметров β и $\xi = e^{\mu}$.

3) Матрица $\Phi''(0, 0)$ имеет вид

$$\Phi''(0, 0) = - \sum_{j=0}^{\infty} \beta^3 q_j e^{-\beta j} \begin{pmatrix} 1 & \beta j \\ \beta j & \beta^2 j^2 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Оценим эту матрицу, рассматривая ее как матрицу квадратичной формы, следующим образом:

$$\Phi''(0, 0) \leq - \sum_{j=[x_1/\beta]}^{[x_2/\beta]} \beta^3 q_j e^{-\beta j} \begin{pmatrix} 1 & \beta j \\ \beta j & \beta^2 j^2 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

где $x_2 > x_1 > 0$ – произвольные фиксированные числа. Дальнейшее рассуждение ничем не отличается от (38).

4) Из формулы (71) для $\Phi(\varphi, \psi)$ получаем

$$\operatorname{Re} \Phi(0, 0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) = \beta^3 \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-\beta j} (1 - \cos(\psi + \beta j \varphi)).$$

Все слагаемые в правой части здесь неотрицательны. Поэтому, опуская часть из них и оценивая коэффициенты $\beta^2 q_j e^{-\beta j}$ для оставшихся слагаемых константой, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(0, 0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi, \psi) &\geq \operatorname{const} \beta \sum_{j=[x_1/\beta]}^{[x_2/\beta]} (1 - \cos(j\varphi + \psi)) \\ &\geq \operatorname{const} \left(x_2 - x_1 - \beta - \beta \left| \sin \frac{\beta \varphi}{2} \right|^{-1} \right), \end{aligned} \quad (78)$$

откуда, подбирая x_1 и x_2 подходящим образом, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Доказанная только что лемма позволяет вычислить интеграл (69), следуя рассуждениям, проведенным в предыдущем параграфе, и получить оценку снизу для числа упорядоченных выборок в виде

$$\mathcal{N}(N, M) \geq C \beta \Lambda^{-1} \sqrt{N} \exp\{N \ln N + \beta M + \mu N\}. \quad (79)$$

3.3.4. Вычисление энтропии и доказательство теорем о концентрации. Теперь не сложно доказать теоремы 8–10, используя полученные выше оценки. Рассуждение дословно повторяет то, что было использовано в бозевском случае.

4. Распределение Бозе–Эйнштейна в случае относительно малого числа частиц

Вернемся теперь к рассмотрению системы бозе-частиц (5), (6) и выясним, как ведет себя распределение, описанное в теореме 10, когда M и N стремятся к бесконечности, но при этом N возрастает сравнительно медленно (точную формулировку см. ниже).

Напомним [1], что если в системе бозе-частиц с целочисленными уровнями энергии задано только ограничение M сверху на суммарную энергию, а число частиц произвольно², то для большинства выборок число частиц будет мало отличаться от некоторого значения N_0 , которое определяется по M . Соответствующие формулы были выписаны в [1] и для интересующего нас случая $d = 3$ имеют следующий вид. Пусть $b = b(M)$ – (единственный) положительный корень уравнения

$$M = 3\zeta(4)b^{-4} + 3\zeta(3)b^{-3} \equiv \frac{\pi^4}{30}b^{-4} + 3,606\dots b^{-3}$$

относительно переменной b , где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана. Тогда

$$N_0 = \zeta(3)b^{-3} + \frac{3}{2}\zeta(2)b^{-2} \equiv 1,202\dots b^{-3} + \frac{\pi^2}{4}b^{-2}.$$

²При этом, конечно, надо считать, что уровни энергии начинаются не с нуля, а с единицы; см. замену переменных (7) в замечании 4.

Очевидно,

$$N_0 \asymp b^{-3} \asymp M^{3/4}, \quad \frac{N_0}{M} \asymp b.$$

Пусть теперь мы не только задали M , но и зафиксировали число частиц N . Что будет в том случае, если N отличается от N_0 ? В работе [2] был исследован случай, когда $N \gg N_0$ и показано, что в этом случае образуется *конденсат* – «лишние» частицы скапливаются на нижнем уровне. Выясним, что будет происходить в противоположном случае, когда $N_0 \gg N$ (точнее говоря, N стремится к бесконечности вместе с M , но гораздо медленнее, чем N_0). Оказывается, что при этом условии частицы распределены по «гиббсовскому» закону.

ТЕОРЕМА 18. Пусть $M, N \rightarrow \infty$ таким образом, что выполнено условие (51) и

$$N/N_0 \leq Cb^{1/3}, \quad N_0 \geq Cb^\delta$$

для некоторых постоянных $C, \delta > 0$. Тогда большинство наборов $\{N_j\}$ концентрируется вблизи «гиббсовского» распределения

$$\bar{N}_j = \xi^{-1} q_j e^{-\beta j}, \quad (80)$$

где параметры ξ и β определяются из системы³ (8). Более точно,

$$P\left(\left|\sum_{j=0}^s \sum_{k=1}^{q_j} (N_j - \bar{N}_j)\right| > \sqrt{N \ln N} \psi(N)\right) = O(N^{-k}), \quad (81)$$

$$P\left(\left|\sum_{j=0}^s \sum_{k=1}^{q_j} j(N_j - \bar{N}_j)\right| > \frac{M}{N} \sqrt{N \ln N} \psi(N)\right) = O(N^{-k}) \quad (82)$$

для любых $s, k \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Мы поставили слово «гиббсовское» в кавычки по следующим причинам. Хотя и формула для распределения, вблизи которого концентрируется большинство вариантов, и оценка вероятности больших отклонений от этого распределения идентичны тем, что были получены в разделе 3 для гиббсовского распределения, число вариантов (и, следовательно, энтропия системы) соответствуют не гиббсовскому (теорема 14), а бозевскому случаю (теорема 8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с распределением (80) рассмотрим бозевское распределение

$$\bar{n}_j = \frac{q_j}{\xi e^{\beta j} - 1} \quad (83)$$

с теми же параметрами (β, ξ) . Очевидно,

$$\bar{n}_j > \bar{N}_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 10 утверждает, что соотношения (81), (82) выполнены с заменой $\bar{N}_j$ на $\bar{n}_j$. Поэтому для того, чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно показать,

³Можно определять их и из системы (47); при этом утверждение теоремы останется верным.

что при наших предположениях справедлива оценка⁴

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\bar{n}_j - \bar{N}_j) = O(\sqrt{N}) = O(\xi^{-1/2} \beta^{-3/2}). \quad (84)$$

Имеем

$$\bar{n}_j - \bar{N}_j = \frac{q_j}{\xi e^{\beta j} - 1} - \frac{q_j}{\xi e^{\beta j}} \asymp q_j \xi^{-2} e^{-2\beta j}$$

(последнее соотношение справедливо в силу того, что ξ велико, что в свою очередь вытекает из малости отношения N/N_0). Поэтому

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\bar{n}_j - \bar{N}_j) \asymp \xi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} q_j e^{-2\beta j} \asymp \xi^{-2} \beta^{-3}.$$

Для того чтобы последнее выражение было $O(\sqrt{N})$, достаточно, чтобы

$$\xi^{-2} \beta^{-3} \leq C \xi^{-1/2} \beta^{-3/2},$$

или

$$\xi \geq C \beta^{-1}.$$

Имеют место соотношения

$$\frac{M}{N_0} \asymp b^{-1}, \quad \frac{M}{N} \asymp \beta^{-1},$$

откуда

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\beta}{b}.$$

Далее,

$$\frac{M^3}{N_0^4} \asymp 1, \quad \frac{M^3}{N^4} \asymp \xi \geq C \beta^{-1},$$

откуда получаем неравенство

$$\left(\frac{N}{N_0} \right)^4 \leq C_1 \beta.$$

Итак,

$$\frac{\beta^4}{b^4} \leq C_1 \beta,$$

или

$$\beta \leq C_2 b^{4/3},$$

или, окончательно,

$$\frac{N}{N_0} \leq C b^{1/3},$$

что и завершает доказательство.

⁴Достаточно и более слабой оценки с дополнительным множителем $\sqrt{\ln N} \psi(N)$, так что и утверждение теоремы можно соответственно уточнить, чего мы не стали делать во избежание громоздкости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.
- [2] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. II”, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 381–401.
- [3] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, М., 1963.
- [4] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, кн. 1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы, МЦНМО, М., 2004.

В. П. Маслов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

20.03.2008

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики РАН

E-mail: nazaikinskii@yandex.ru