Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Неклюдов, Обращение теоремы Чернова, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 581–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:28:07

Обращение теоремы Чернова

А. Ю. Неклюдов

В работе доказывается теорема, представляющая собой обращение теоремы Чернова. Как следствие этого результата выводятся условия справедливости продакт-формул Чернова и Троттера.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Теоремой Чернова [1], [2] называют следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть F есть отображение из $[0, \infty)$ в пространство непрерывных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ в банаховом пространстве $\mathbf{X}$ такое, что $F(0) = I$ и $\|F(t)\| \leq \exp(at)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{D}$ – существенная область определения для генератора C полугруппы $\exp(tC)$ и ограничение $F'(0)$ на $\mathbf{D}$ совпадает с ограничением C на $\mathbf{D}$. Тогда $F(t/n)^n \rightarrow \exp(tC)$ при $n \rightarrow \infty$ в сильной операторной топологии равномерно относительно $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$.

В работе доказывается теорема, представляющая собой обращение теоремы Чернова (являющейся обобщением теоремы Троттера). Она устанавливает в предположении существования пределов некоторых последовательностей вида $\{F^n(t/n)\}$ существование генератора C некоторой полугруппы $\exp(tC)$, для которого выполняется равенство $F'(0) = C$ на функциях, принадлежащих области определения оператора $F'(0)$. Одно из приложений основной теоремы работы связано с теорией фейнмановских интегралов [3], [4]. В этой теории рассматриваются представления решений уравнений типа Шрёдингера с помощью интегралов по псевдомерам Фейнмана (такие интегралы называют *интегралами Фейнмана*). При этом, в частности, доказывается, что из существования решений уравнений типа Шрёдингера следует представимость этих решений в виде фейнмановских интегралов. С помощью теоремы, доказываемой в настоящей работе, это утверждение можно обратить. А именно, из существования фейнмановских интегралов можно вывести существование решений соответствующих уравнений типа Шрёдингера. Из основной теоремы работы также следует необходимое условие справедливости формулы Троттера.

Настоящая работа организована следующим образом. В п. 2 даются предварительные сведения, в основном из теории полугрупп, необходимые для проведения доказательств в п. 3. В п. 3 формулируется основной результат и его доказательство, а также приводятся некоторые его следствия.

2. Предварительные сведения и терминология. Всюду далее $\mathbf{X}$ – банахово пространство; $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ – пространство всех ограниченных линейных операторов в $\mathbf{X}$, наделенное, если не оговорено противное, топологией поточечной сходимости (сильной операторной топологией); I – тождественный оператор в $\mathbf{X}$. Для любого оператора A в $\mathbf{X}$ $\mathcal{D}(A)$ будет обозначать область определения A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Производной (сильной) в нуле функции $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X})$ называют линейное отображение $F'(0): \mathcal{D}(F'(0)) \mapsto \mathbf{X}$, определяемое равенством

$$F'(0)\psi = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(F(h)\psi - F(0)\psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(F'(0)),$$

где $\mathcal{D}(F'(0))$ состоит из всех $\psi \in \mathbf{X}$, для которых существует предыдущий предел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $T_s: s \in [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X})$ называют C_0 -полугруппой, если выполняются следующие условия:

- 1) $T_0 = I$, $T_{l+m} = T_l T_m$ для каждых $l, m \in [0, \infty)$;
- 2) $T_s f$ является непрерывной функцией из $[0, \infty)$ в $\mathbf{X}$ при каждом фиксированном $f \in \mathbf{X}$;
- 3) $\|T_s\| \leq M e^{as}$ при каждом $s \in [0, \infty)$ для некоторых фиксированных $M > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор Z называют генератором C_0 -полугруппы T_s , если Z является (сильной) производной в нуле функции T_s .

Из общей теории полугрупп известно, что генераторы C_0 -полугрупп являются плотно определенными замкнутыми операторами в $\mathbf{X}$ и имеется взаимнооднозначное соответствие между C_0 -полугруппами и их генераторами. Далее в статье мы будем рассматривать только C_0 -полугруппы. Для них в работах [2], [5] доказываются следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $C \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ является сжатием (т.е. выполнено $\|C\| \leq 1$), то $\exp(t(C - 1))$ является полугруппой сжатий на $\mathbf{X}$ и

$$\|\exp(n(C - 1))f - C^n f\| \leq n^{1/2} \|(C - 1)f\| \quad (1)$$

для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathbf{X}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Плотно определенный замкнутый оператор Z в $\mathbf{X}$ является генератором сжимающей полугруппы тогда и только тогда, когда $(0, \infty)$ содержится в резольвентном множестве Z и $\|(\lambda - Z)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$ для каждого $\lambda > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть Z является генератором полугруппы T_t таким, что $\|T_t\| \leq M \exp(at)$, $M > 0$, $a \in \mathbb{R}$, для каждого $t \geq 0$. Тогда спектр Z содержится в $\{z \mid \operatorname{Re}(z) \leq a\}$ и при $\operatorname{Re}(z) > a$ для всех $f \in \mathbf{X}$ справедливо равенство

$$(z - Z)^{-1}f = \int_0^\infty \exp(-zt)T_t f dt.$$

3. Основные результаты и доказательства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t \in \mathbb{R}$ и $\{n_k\}$ – подпоследовательность последовательности $\{n!\}$. Пусть отображение $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X})$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F(0) = I$, $\|F(s)\| \leq e^{as}$, $s > 0$, где $a \in \mathbb{R}$;

2) существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t/n_k)\}^{n_k p} f$ для любых $f \in \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$, $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, причем $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$;

3) $\mathcal{D}(F'(0))$ плотно в $\mathbf{X}$.

Тогда существует генератор Z C_0 -полугруппы T_s , удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\mathcal{D}(Z) \supset \mathcal{D}(F'(0))$ и $Zf = F'(0)f$ при $f \in \mathcal{D}(F'(0))$;

2) $T_{tp}f = \lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t/n_k)\}^{n_k p} f$ для каждой $f \in \mathbf{X}$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку существует $\lim_{k \rightarrow \infty} F(t/n_k)^{n_k p} f$ для каждого $f \in \mathbf{A}$, $\|F(s/n)^n\| \leq e^{as}$ и $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$, то существует $\lim_{k \rightarrow \infty} F(t/n_k)^{n_k p} f$ для каждого $f \in \mathbf{X}$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, причем предельный оператор будет ограниченным.

Рассмотрим сначала случай, когда $\|F(s)\| \leq 1$ для каждого $s \geq 0$. Пусть

$$R_{tp}f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} F(t/n_k)^{n_k p} f$$

для каждого $f \in \mathbf{X}$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Проверим равенство $R_{(p+q)} = R_{tp}R_{tq}f$ при $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \left\| F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k p} F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k q} f - R_{tp}R_{tq}f \right\| \\ & \leq \left\| F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k p} \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k q} - R_{tq} \right) f \right\| + \left\| \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k p} - R_{tp} \right) R_{tq}f \right\| \\ & \leq \left\| \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k q} - R_{tq} \right) f \right\| + \left\| \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k p} - R_{tp} \right) g \right\|, \end{aligned}$$

где $g = R_{tq}f$. Очевидно, что при $k \rightarrow \infty$ правая часть предыдущей цепочки неравенств стремится к 0. Отсюда получаем требуемое равенство.

Определим операторы S_l для каждого $l \geq 0$, полагая

$$S_l f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{d \rightarrow l/t+} R_{td}f.$$

ЛЕММА 1. Операторы S_l корректно определены и образуют непрерывную полугруппу, причем $\|S_l\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Заметим сначала, что для каждого $f \in \mathbf{X}$ существует $\lim_{d \in \mathbb{Q}_+, d \rightarrow 0} R_{td}f$, где $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Действительно, если $f \in \mathcal{D}(F'(0))$, то

$$\begin{aligned} \|(R_{td} - 1)f\| & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k d} - 1 \right) f \right\| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(F\left(\frac{td}{n_k d}\right)^{n_k d} - 1 \right) f \right\| \\ & = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| n_k d \left(\frac{F(td/(n_k d))^{n_k d-1} + \dots + I}{n_k d} \right) \left(F\left(\frac{td}{n_k d}\right) f - f \right) \right\| \\ & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(n_k d \left(F\left(\frac{td}{n_k d}\right) - 1 \right) f \right) \right\| = dt \|F'(0)f\|. \end{aligned}$$

Следовательно, существует $\lim_{d \rightarrow 0} R_{td}f = f$ для каждого $f \in \mathcal{D}(F'(0))$. Из плотности $\mathcal{D}(F'(0))$ в $\mathbf{X}$ и неравенства $\|R_{td}\| \leq 1$ вытекает существование предыдущего предела для каждого $f \in \mathbf{X}$. Заметим далее, что для всякого $\varepsilon > 0$ и $f \in \mathbf{X}$ существует

d_0 такое, что для каждого $d \in [0, d_0] \cap \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $\|(R_{td} - 1)f\| < \varepsilon$. Поэтому для каждого $d \in (l/t, d_0^1] \cap \mathbb{Q}$, где $d_0^1 \in \mathbb{Q}$ и $|l/t - d_0^1| < d_0$, справедливо неравенство

$$\|R_{td_0^1}f - R_{td}f\| \leq \|f - R_{t(d_0^1-d)}f\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует корректность определения S_l , причем $\|S_l\| \leq 1$. Покажем выполнение равенства $S_{l+d} = S_l S_d$, $l, d \geq 0$. Пусть $\{a_k\}, \{b_k\}$ – убывающие последовательности рациональных чисел такие, что последовательность $\{a_i - b_i\}$ убывает и существуют пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (l+d)/t$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = d/t$. Тогда

$$S_{l+d}f = \lim_{a_k \rightarrow (l+d)/t} R_{ta_k}f = \lim_{a_k \rightarrow (l+d)/t} R_{ta_k - tb_k} R_{tb_k}f.$$

Заметим, что

$$\|S_l S_d f - R_{ta_k - tb_k} R_{tb_k}f\| \leq \|R_{ta_k - tb_k}(S_d - R_{tb_k})f\| + \|(S_l - R_{ta_k - tb_k})S_d f\| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует требуемое равенство. Заметим также, что если последовательность неотрицательных чисел $\{d_i\} \rightarrow d$ при $i \rightarrow \infty$, то тогда

$$\|(S_d - S_{d_i})f\| \leq \|(I - S_{|d_i - d|})f\| \rightarrow 0$$

при $i \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $S_d f$ непрерывна по d при фиксированном $f \in \mathbf{X}$. Таким образом, получаем, что S_d является непрерывной полугруппой. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Генератор Z C_0 -полугруппы S_d совпадает с оператором $F'(0)$ на множестве $\mathcal{D}(F'(0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть

$$Z_k = \frac{n_k}{t} \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right) - I \right), \quad \text{где } k \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \exp(Z_k t d) f = S_{td} f \quad (2)$$

для каждого $f \in \mathcal{D}(F'(0))$ и $d \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Рассмотрим случай $d \neq 0$ (случай $d = 0$ тривиален). Пусть $d = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда для $k > q$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \exp(Z_k t d) f - F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k d} f \right\| &= \left\| \exp\left(n_k d \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right) - I\right)\right) f - F\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k d} f \right\| \\ &\leq \sqrt{n_k \cdot d} \left\| \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right) - I\right) f \right\| \\ &= t \sqrt{\left(\frac{d}{n_k}\right)} \left\| \frac{n_k}{t} \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right) - I\right) f \right\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3)$$

при $k \rightarrow \infty$, поскольку

$$\frac{n_k}{t} \left(F\left(\frac{t}{n_k}\right) - I \right) f \rightarrow Z' f, \quad \text{при } f \in \mathcal{D}(F'(0)).$$

Причем неравенство из цепочки (3) следует из неравенства Чернова (т.е. из равенства (1)). Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} F(t/n_k)^{n_k d} f = S_{td} f$, получаем равенство (2). Докажем равенство (2) для любых $d \geq 0$ и $f \in \mathcal{D}(F'(0))$. Пусть $f \in \mathcal{D}(F'(0))$. Тогда

$$\|(\exp(Z_k s) - \exp(Z_k s_0))f\| \leq \|(I - \exp(Z_k |s - s_0|))f\| \leq \|Z_k f\| \cdot |s - s_0|. \quad (4)$$

Действительно, $((I - \exp(Z_k s))f)'_s = -\exp(Z_k s)Z_k f$. Следовательно,

$$(I - \exp(Z_k d))f \in \overline{\text{conv}\{-\exp(Z_k s)Z_k f \cdot d | s \in [0, d]\}}.$$

Но если $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, и $s_i \in [0, d]$, то

$$\left\| \sum_{i=1}^n -\lambda_i \exp(Z_k s_i) \cdot (Z_k f) d \right\| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\exp(Z_k s_i) Z_k f\| d \leq \|Z_k f\| \cdot d,$$

так как $\|\exp(Z_k s_i)\| \leq 1$. Отсюда мы получаем верность правого неравенства из цепочки (4). Справедливо также следующее неравенство:

$$\|(S_l - S_d)f\| \leq \|(I - S_{|d-l|})f\|. \quad (5)$$

Из неравенств (4) и (5) и ограниченности $\|Z_k f\|$ (которая следует из существования предела $\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k f$) получаем следующий факт: для любого ε существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $|l - d| < \delta$ имеем

$$\|\exp(Z_k l)f - \exp(Z_k d)f\| < \varepsilon, \quad \|S_l f - S_d f\| < \varepsilon, \quad l, d \geq 0.$$

Из этого факта, из ограниченности функций $\exp(Z_k l)f$ и $S_l f$, а также из существования всюду плотного множества в $[0, \infty)$, для которого выполнено равенство (2), получаем, что равенство (2) верно для каждого $d > 0$ и $f \in \mathcal{D}(F'(0))$. Далее, из утверждений 1 и 2 (из п. 2) следует, что существуют операторы $(z - Z_k)^{-1}$, $(z - Z)^{-1}$ и $\|(z - Z_k)^{-1}\| \leq z^{-1}$, $\|(z - Z)^{-1}\| \leq z^{-1}$ при $z > 0$. Докажем, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (z - Z_n)^{-1} g = (z - Z)^{-1} g$ для каждого $g \in X$. Нам достаточно доказать этот факт для каждого $g \in \mathcal{D}(F'(0))$ (для остальных $g \in X$ это равенство будет следовать из того, что $\overline{\mathcal{D}(F'(0))} = X$ и $\|(z - Z_n)^{-1}\|, \|(z - Z)^{-1}\| \leq z^{-1}$). Итак, зафиксируем $g \in \mathcal{D}(F'(0))$. Имеем

$$\begin{aligned} & \|(z - Z_n)^{-1} g - (z - Z)^{-1} g\| \\ &= \left\| \int_0^\infty (\exp(Z_n l) - \exp(Z l)) g \exp(-z l) dl \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^b (\exp(Z_n l) - \exp(Z l)) g \exp(-z l) dl \right\| \\ &\quad + \left\| \int_b^\infty (\exp(Z_n l) - \exp(Z l)) g \exp(-z l) dl \right\| \\ &\leq \int_0^b \|(\exp(Z_n l) - \exp(Z l)) g\| dl + 2\|g\| \left| \int_b^\infty \exp(-z l) dl \right|, \end{aligned} \quad (6)$$

причем равенство (6) следует из утверждения 3 п. 2. Выберем b так, чтобы выполнялось $|\int_b^\infty \exp(-z l) dl| < \varepsilon$. Заметим, что $\|(\exp(Z_n l) - \exp(Z l))g\| \leq 2\|g\|$ и для

каждого $l \geq 0$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\exp(Z_n l) - \exp(Zl))g\| = 0$. Следовательно, по теореме Лебега существует n_0 такой, что при $n \geq n_0$

$$\int_0^b \|(\exp(Z_n l) - \exp(Zl))g\| dl < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем существование $\lim_{n \rightarrow \infty} (z - Z_n)^{-1}g = (z - Z)^{-1}g$ для каждого $g \in \mathcal{D}(F'(0))$ и, следовательно, для каждого $g \in X$.

Заметим, что для каждого $g \in \mathcal{D}(F'(0))$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (z - Z_n)g = (z - F'(0))g$. Тогда получаем

$$(z - Z)^{-1}(z - F'(0))g = \lim_{n \rightarrow \infty} (z - Z_n)^{-1}(z - F'(0))g = \lim_{n \rightarrow \infty} (z - Z_n)^{-1}(z - Z_n)g = g, \quad (7)$$

где правое равенство из цепочки (7) следует из того, что $\|(z - Z_k)^{-1}\| \leq z^{-1}$ при $z > 0$. Значит, $(z - Z)g = (z - F'(0))g$ и $Zg = F'(0)g$. Лемма доказана.

Из двух предыдущих лемм следует утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

Рассмотрим общий случай, когда $\|F(s)\| \leq e^{as}$. Тогда для $G(s) = F(s)e^{-as}$ выполнены условия теоремы, причем $\|G(s)\| \leq 1$ и $G'(0) = F'(0) - a$. Тогда утверждение нашей теоремы следует из того, что $F(s/n)^n = G(s/n)^n \cdot e^{as}$, если принять во внимание, что $K + a$ является генератором $\exp((K + a)s)$, если K является генератором $\exp(Ks)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть отображение $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F(0) = I$, $\|F(s)\| \leq e^{as}$, $s \geq 0$, где $a \in \mathbb{R}$;
- 2) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(s/n)\}^n f$ для любых $s \geq 0$ и $f \in A \subset X$, причем $\overline{A}$ плотно в X ;
- 3) $\mathcal{D}(F'(0))$ плотно в X .

Тогда существует генератор Z C_0 -полугруппы T_s такой, что $Zf = F'(0)f$ для каждого $f \in \mathcal{D}(F'(0))$. Более того, для каждого фиксированного $t > 0$ можно Z выбрать так, чтобы существовал $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(x/n)\}^n f = T_x f$ при любых $f \in X$ и $x \in t \cdot \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X сепарабельно и зафиксировано $t > 0$. Пусть отображение $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F(0) = I$, $\|F(s)\| \leq e^{as}$, $s \geq 0$, где $a \in \mathbb{R}$;
- 2) множество $\{(F(tp/n))^n f | n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно для каждого $f \in C \subset X$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, причем $\overline{C} = X$;
- 3) $\mathcal{D}(F'(0))$ плотно в X .

Тогда выполняются утверждения теоремы 1 (для некоторой последовательности $\{n_k\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из множества C выберем сепарабельное подмножество C' , плотное в X (в силу сепарабельности X это можно сделать). В силу условия 2) мы можем выбрать из последовательности $\{n!\}$ подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой выполняется условие 2) теоремы 1 при $A = C'$. Таким образом, выполняются условия теоремы 1 для операторов $F(s)$ и, следовательно, получаем искомое утверждение. Следствие доказано.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее предложение, представляющее собой обращение теоремы Троттера (о продакт-формуле Троттера).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A и B являются генераторами сжимающих полугрупп на X . Пусть $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ плотно в X , $t > 0$ и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{td}{n}A\right) \exp\left(\frac{td}{n}B\right) \right)^n f$$

для любых $d \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ и $f \in C \subset X$, причем $\overline{C} = X$. Тогда существует генератор Z непрерывной полугруппы T_s , обладающий следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{D}(Z) \supset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$;
- 2) $Z|_{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)} = A|_{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)} + B|_{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)}$;
- 3) выполнено равенство

$$T_{td}f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{td}{n}A\right) \exp\left(\frac{td}{n}B\right) \right)^n f$$

для любых $f \in X$ и $d \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X сепарабельно и зафиксировано $t > 0$. Пусть отображение $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F(0) = I$, $\|F(s)\| \leq e^{as}$, $s \geq 0$, где $a \in \mathbb{R}$;
- 2) существует множество $C \subset \mathcal{D}(F'(0))$ такое, что $F(s)C \subset C$, $s > 0$, и множества $\{(F(tp/n))^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{F'(0)(F(tp/n))^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактны для каждого $f \in C$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, причем $\overline{C} = X$.

Тогда оператор $F'(0)$ замыкаем и его замыкание Z является генератором C_0 -полугруппы $\exp(sZ)$, причем выполняется следующее равенство:

$$\exp(sZ)f = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{s}{n}\right)^n f \quad (8)$$

для каждого $f \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для функции F выполняются условия следствия 2. Пользуясь этим следствием, выбираем генератор Z C_0 -полугруппы $\exp(sZ)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\mathcal{D}(Z) \supset \mathcal{D}(F'(0))$ и $Zf = F'(0)f$ при $f \in \mathcal{D}(F'(0))$;
- 2) $\exp(tpZ)f = \lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t/n_k)\}^{n_k p} f$ для каждого $f \in X$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, где $\{n_k\}$ – некоторая подпоследовательность $\{n\}$.

Поскольку оператор Z замкнут, то оператор $F'(0)$ замыкаем. Положим $Y = \overline{F'(0)}$. Покажем, что $\exp(tpZ)f \in \mathcal{D}(Y)$ при любых $f \in C$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Зафиксируем $g \in C$ и $p \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Выберем из последовательности $\{n_k\}$ подпоследовательность $\{l_k\}$, для которой существовал бы предел $\lim_{k \rightarrow \infty} F'(0)(F(t/l_k))^{l_k p} g$. Это можно сделать, поскольку множество $\{F'(0)(F(tp/n))^n g \mid n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно и X – банахово пространство. Тогда из существования $\lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t/l_k)\}^{l_k p} g = \exp(tpZ)g$ получаем, что $\exp(tpZ)g \in \mathcal{D}(Y)$, поскольку оператор Y замкнут. Покажем теперь, что $\exp(sZ)f \in \mathcal{D}(Y)$ при любых $f \in C$ и $s > 0$. Зафиксируем $s > 0$. Выберем

последовательность $\{p_k\}$, $p_k \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, сходящуюся к s/t при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \exp(tp_k Z)f = \exp(sZ)f,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y \exp(tp_k Z)f = \lim_{k \rightarrow \infty} Z \exp(tp_k Z)f = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(tp_k Z)Zf = \exp(sZ)Zf$$

при $f \in \mathbf{C}$. Таким образом, из замкнутости оператора Y получаем, что $\exp(sZ)f \in \mathcal{D}(Y)$ при любых $f \in \mathbf{C}$ и $s > 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{D}(Y) \supset \bigcup_{s \geq 0} \exp(sZ)(\mathbf{C})$. Пусть $\mathbf{D}$ является линейной оболочкой множества $\bigcup_{s \geq 0} \exp(sZ)(\mathbf{C})$. Тогда $\exp(sZ)\mathbf{D} \subset \mathbf{D}$ ($\subset \mathcal{D}(Y)$) при $s > 0$ и, значит, $\mathbf{D}$ является существенной областью определения генератора Z (теорема 1.9 из [2]). В частности, это означает, что замыкание оператора $Z|_{\mathbf{D}}$ совпадает с Z и, следовательно, $Z = Y$. Таким образом, получаем, что $\mathcal{D}(F'(0))$ является существенной областью определения генератора Z и, применяя теорему Чернова, получаем искомое утверждение. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть A и B являются генераторами сжимающих полугрупп на $\mathbf{X}$, причем $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ плотно в $\mathbf{X}$. Пусть существует подмножество $\mathbf{C} \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ такое, что

- 1) $\exp(sA)\exp(sB)\mathbf{C} \subset \mathbf{C}$, $s > 0$, причем $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{X}$;
- 2) $\{(\exp(s/nA)\exp(s/nB))^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно для каждой $f \in \mathbf{C}$ и $s > 0$;
- 3) $\{(A+B)(\exp(s/nA)\exp(s/nB))^n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно для любых $f \in \mathbf{C}$ и $s > 0$.

Тогда оператор $A+B$ замыкаем и его замыкание C является генератором C_0 -полугруппы $\exp(sC)$, причем выполняется следующее равенство:

$$\exp(sC)f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{s}{n}A\right) \exp\left(\frac{s}{n}B\right) \right)^n f$$

для любых $f \in \mathbf{X}$ и $s > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(s) = \exp(sA)\exp(sB)$. Тогда $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ и, следовательно, выполнены условия следствия 4 для функции F . Из этого следствия непосредственно получаем искомое утверждение. Доказательство окончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 1 и следствиях 1, 2, 4 условие 1) можно заменить на следующее:

- 1*) $F(0) = I$, $\|F^m(s/n)\| \leq M \exp((am)/ns)$, $n, m \in \mathbb{N}$, $s > 0$, для некоторых фиксированных $M > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Аналогично, условие сжимаемости полугрупп $\exp(sA)$, $\exp(sB)$ в следствиях 3, 5 можно заменить на следующее:

$$\left\| \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^m \right\| \leq M \exp\left(as\frac{m}{n}\right), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad s > 0,$$

для некоторых фиксированных $M > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Доказательства соответствующих утверждений при более слабых условиях будут аналогичными. Отметим только, что для доказательства теоремы 1 необходимо будет воспользоваться усиленным вариантом неравенства Чернова, а при доказательстве следствия 4 – усиленным вариантом теоремы Чернова [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. R. Chernov, “Note on product formulas for operator semigroups”, *J. Funct. Anal.*, **2**:2 (1968), 238–242.
- [2] E. B. Davies, *One-Parameter Semigroups*, London Math. Soc. Monogr., **15**, Academic Press, London–New York, 1980.
- [3] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, Изд-во МГУ, М., 1990.
- [4] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, “Hamiltonian Feynman path integral via the Chernoff formula”, *J. Math. Phys.*, **43**:10 (2002), 5161–5171.
- [5] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000.

А. Ю. Неклюдов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: neklyudov.alex@gmail.com

Поступило

15.05.2007

Исправленный вариант

12.10.2007