Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Стояновский, Необходимое условие существования S -матрицы вне рамок теории возмущений, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 613–617

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:28:02

Необходимое условие существования S -матрицы вне рамок теории возмущений

А. В. Стояновский

С помощью метода комплексного ростка Маслова–Шведова выводится необходимое условие существования квантовополевой S -матрицы вне рамок теории возмущений в главном порядке квазиклассического приближения. Это условие состоит в том, что касательное симплектическое преобразование к оператору эволюции нелинейного классического уравнения поля реализуется унитарным преобразованием пространства Фока. Из результатов книги Маслова–Шведова вытекает, что это условие всегда выполнено.

Библиография: 4 названия.

Введение. В настоящей заметке выводятся некоторые следствия книги Маслова и Шведова [1], а именно существование квантовополевой матрицы рассеяния вне рамок теории возмущений в главном порядке квазиклассического приближения. В основе исследования лежит непертурбативный метод квазиклассического приближения, развитый Масловым и Шведовым и называемый *методом комплексного ростка*. Согласно этому методу в главном порядке квазиклассического приближения эволюция вектора пространства Фока задается преобразованием Боголюбова, соответствующим касательному симплектическому преобразованию к оператору эволюции классического нелинейного уравнения поля. Поэтому, чтобы это симплектическое преобразование унитарно действовало в пространстве Фока, оно должно удовлетворять известному условию унитарной реализуемости [2], [3], а именно, оно должно быть ограничено по L_2 -норме и некоторый построенный из него оператор должен быть оператором Гильберта–Шмидта. Из результатов книги [1] следует, что это условие всегда выполнено.

Статья имеет следующую структуру. В п. 1 напомним конструкцию S -матрицы в гамильтоновом подходе. В п. 2 напомним метод комплексного ростка в гамильтоновой квантовой теории поля. В п. 3 этот метод применяется к оператору эволюции с начальными условиями в пространстве Фока и выводится основной результат.

1. S -матрица в гамильтоновом подходе. Для примера рассмотрим модель скалярного поля в пространстве-времени $\mathbb{R}^{d+1}$ с действием

$$J = \int \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \varphi)^2 - m^2 \varphi^2 \right) - g(t) V_{\text{int}}(\varphi) \right) dt d\mathbf{x}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ и $g(t)$ есть функция включения и выключения взаимодействия.

Гамильтониан имеет вид

$$H(t, \varphi(\cdot), \pi(\cdot)) = \int \left(\frac{1}{2} (\pi(\mathbf{x})^2 + (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + m^2 \varphi(\mathbf{x})^2) + g(t) V_{\text{int}}(\varphi(\mathbf{x})) \right) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Уравнение Шрёдингера на волновой функционал $\Psi(t, \varphi(\cdot))$ имеет вид

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (3)$$

где

$$\hat{H} = H \left(t, \varphi(\cdot), -ih \frac{\delta}{\delta \varphi(\cdot)} \right).$$

Это уравнение плохо определено: в частности, не определена производная $\partial^2 \Psi / \partial t^2$, потому что квадрат оператора $\hat{H}$ не имеет смысла даже при $g \equiv 0$. Чтобы придать смысл уравнению (3), заменяют гамильтониан H на регуляризованный гамильтониан H_Λ , где Λ есть параметр регуляризации, так что при снятии регуляризации $\Lambda \rightarrow \infty$ гамильтониан H_Λ переходит в H , и для H_Λ вместо H уравнение (3) хорошо определено. Затем добавляют к H_Λ слагаемое H_Λ^{ct} порядка $O(h)$, называемое *контрчленным гамильтонианом*, зависящее от полей $\varphi(\mathbf{x})$, импульсов $\pi(\mathbf{x})$, значений функции g и ее производных в точке t , от чисел Λ и h . Затем рассматривают уравнение

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_\Lambda + \hat{H}_\Lambda^{\text{ct}}) \Psi. \quad (4)$$

Заметим, что H_Λ^{ct} ненулевой даже при $g \equiv 0$: в этом случае снятие регуляризации дает нормально упорядоченное уравнение Шрёдингера для свободного поля.

Далее, рассматривают уравнение с начальными условиями в пространстве Фока функционалов

$$\Psi(\varphi(\cdot)) = P(\varphi(\cdot)) \Psi_0(\varphi(\cdot)), \quad (5)$$

где

$$\Psi_0 = \exp \left(-\frac{1}{2h} \int \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right), \quad (6)$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (7)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (8)$$

а $P(\varphi(\cdot))$ есть полиномиальный функционал, точнее, элемент гильбертова пространства Фока, получаемого пополнением полиномиальных функционалов по стандартному скалярному произведению (см., например, [1]). Если предположить, что функция $g(t)$ имеет компактный носитель, и разложить оператор эволюции уравнения (4) от $t = -\infty$ до $t = \infty$ в ряд по степеням взаимодействия $g(t)$, то в так называемом перенормируемом случае, для подходящего H_Λ^{ct} после снятия регуляризации получается формальный ряд $S(g)$ операторов в пространстве Фока, называемый *S-матрицей Боголюбова*. Чтобы получить физическую *S-матрицу*, устремляют функцию $g(t)$ к постоянной $g \equiv \text{const}$, называемой *постоянной взаимодействия*, и получают формальный ряд по степеням этой постоянной.

2. Метод комплексного роста. Рассмотрим уравнение (4) в главном порядке квазиклассического приближения, т.е. с точностью до $o(h)$. Обозначим через $H_\Lambda^{(1)}$ главную часть контрчленного гамильтониана, так что $H_\Lambda^{\text{ct}} = hH_\Lambda^{(1)} + o(h)$. Маслов и Шведов [1] разработали метод вычисления главного порядка квазиклассического приближения эволюции вектора пространства Фока, называемый *методом комплексного роста* в точке.

Для описания этого метода введем следующие унитарные операторы в пространстве Фока:

$$P_{\Phi, \Pi, S} = \exp\left(\frac{i}{h}S - \int \Phi(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} d\mathbf{x}\right) \exp \int \frac{i}{h} \Pi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (9)$$

где S – вещественное число, $\Phi(\mathbf{x})$ и $\Pi(\mathbf{x})$ суть вещественные функции из пространства Шварца. Рассмотрим вектор вида

$$\Psi(\varphi(\cdot)) = P_{\Phi_0, \Pi_0, 0} \cdot f_0\left(\frac{\varphi(\cdot)}{\sqrt{h}}\right). \quad (10)$$

Тогда согласно [1] результат квазиклассической эволюции этого вектора от времени $-T_0$ до времени T после снятия регуляризации есть вектор

$$\Psi(T, \varphi(\cdot)) = P_{\Phi, \Pi, S} \cdot f\left(\frac{\varphi(\cdot)}{\sqrt{h}}\right), \quad (11)$$

где $\Phi = \Phi(T, \mathbf{x})$, $\Pi = \Pi(T, \mathbf{x})$ есть значение при $t = T$ решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\delta H}{\delta \pi(\mathbf{x})} = \Pi(t, \mathbf{x}), \\ \dot{\Pi}(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\delta H}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = (\Delta - m^2)\Phi(t, \mathbf{x}) - g(t)V'_{\text{int}}(\Phi(t, \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\Phi(-T_0, \mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}), \quad \Pi(-T_0, \mathbf{x}) = \Pi_0(\mathbf{x}); \quad (13)$$

S есть действие (1) на классической траектории $\varphi = \Phi(t, \mathbf{x})$ от времени $t = -T_0$ до $t = T$; $f = f(T, \xi(\cdot))$ есть результат эволюции уравнения

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = : H_2\left(t, \xi(\cdot), -i \frac{\delta}{\delta \xi(\cdot)}\right) : f \quad (14)$$

от $t = -T_0$ до $t = T$ с начальным условием $f(-T_0) = f_0$, где

$$H_2(t, \xi(\cdot), \eta(\cdot)) = \frac{1}{2} \xi \frac{\delta^2 H}{\delta \varphi \delta \varphi} \xi + \xi \frac{\delta^2 H}{\delta \varphi \delta \pi} \eta + \frac{1}{2} \eta \frac{\delta^2 H}{\delta \pi \delta \pi} \eta; \quad (15)$$

здесь мы пишем, например,

$$\xi \frac{\delta^2 H}{\delta \varphi \delta \varphi} \xi$$

вместо

$$\int \xi(\mathbf{x}) \frac{\delta^2 H}{\delta \varphi(\mathbf{x}) \delta \varphi(\mathbf{y})} (\Phi(t, \cdot), \Pi(t, \cdot)) \xi(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Другими словами, H_2 есть квадратичная часть гамильтониана H в точке $(\Phi(t, \cdot), \Pi(t, \cdot))$.

Более явно, чтобы объяснить смысл знаков $\dots$ в формуле (14), предположим, что $f_0(\varphi(\cdot)/\sqrt{h})$ есть вектор (5) с полиномиальным функционалом $P(\varphi(\cdot))$:

$$f_0\left(\frac{\varphi(\cdot)}{\sqrt{h}}\right) = M(u_1, v_1) \cdots M(u_n, v_n) \Psi_0, \quad (16)$$

где

$$M(u(\cdot), v(\cdot)) = \int \left(u(\mathbf{x}) \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} - i\sqrt{h} v(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x} \quad (17)$$

для двух функций $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ из пространства Шварца. Тогда

$$f\left(t, \frac{\varphi(\cdot)}{\sqrt{h}}\right) = c(t) M(u_1^t, v_1^t) \cdots M(u_n^t, v_n^t) \exp\left(-\frac{1}{2h} \int \varphi(\mathbf{x}) R^t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}\right), \quad (18)$$

где функции $u_i^t(\mathbf{x})$, $v_i^t(\mathbf{x})$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{v}_i^t(\mathbf{x}) = \frac{\delta H_2(v_i^t(\cdot), u_i^t(\cdot))}{\delta u_i^t(\mathbf{x})}, \quad \dot{u}_i^t(\mathbf{x}) = -\frac{\delta H_2(v_i^t(\cdot), u_i^t(\cdot))}{\delta v_i^t(\mathbf{x})} \quad (19)$$

с начальными условиями $u_i^{-T_0} = u_i$, $v_i^{-T_0} = v_i$; оператор R^t с ядром $R^t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{R}^t + (R^t)^2 - \Delta + m^2 + g(t) V_{\text{int}}''(\Phi(t, \mathbf{x})) = 0 \quad (20)$$

с начальным условием $R^{-T_0} = \sqrt{-\Delta + m^2}$. Наконец, $c(t)$ есть число, зависящее от контрчлена $H_{\Lambda}^{(1)}(\Phi(\cdot), \Pi(\cdot))$. Этот контрчлен выбирается так, чтобы это число было конечным после снятия регуляризации.

3. Условия квазиклассической эволюции в пространстве Фока. Предположим, что носитель функции $g(t)$ лежит между точками $-T_0$ и T . Предположим также, что оператор эволюции уравнения (4) после снятия регуляризации есть корректно определенный унитарный оператор в пространстве Фока (S -матрица). Тогда квазиклассическая эволюция вектора (10) при фиксированном решении $(\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{x}))$ классических уравнений движения также должна быть корректно определенным оператором в пространстве Фока. Эта эволюция, задаваемая уравнениями (18)–(20), в частности, уравнением Риккати (20), изучалась в книге [1] в разделе 8.3 главы 6, не зависимо от предположения о существовании S -матрицы. Например, из этого анализа следует, что результат эволюции вакуумного вектора Ψ_0 (6) принадлежит пространству Фока. Следовательно, то же самое верно для результата эволюции вектора (16).

Заметим, что этот оператор эволюции, определенный на плотном подпространстве пространства Фока приведенными выше формулами, есть в точности унитарное преобразование пространства Фока, соответствующее касательному симплектическому преобразованию к гамильтонову потоку в точке $(\Phi(t, \cdot), \Pi(t, \cdot))$ фазового пространства поля. Следовательно, это линейное симплектическое преобразование удовлетворяет известному условию унитаризуемости [2], [3], а именно, оно ограничено по L_2 -норме и определенная линейная комбинация четырех его компонент есть оператор Гильберта–Шмидта.

Можно сравнить этот результат с результатом статьи [4], в которой показано, что линейный симплектический оператор эволюции свободного поля Клейна–Гордона между двумя искривленными пространственно-подобными поверхностями Коши, вообще говоря, не унитаризуется в пространстве Фока.

Автор глубоко признателен В. В. Долотину и В. П. Маслову за многочисленные проясняющие обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и в квантовой теории поля*, Эдиториал УРСС, М., 2000.
- [2] D. Shale, “Linear symmetries of free boson fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:1 (1962), 149–167.
- [3] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1965.
- [4] C. G. Torre, M. Varadarajan, “Functional evolution of free quantum fields”, *Classical Quantum Gravity*, **16**:8 (1999), 2651–2668; [arXiv: hep-th/9811222v2](#).

А. В. Стояновский

Российский государственный гуманитарный университет
E-mail: stoyan@mccme.ru

Поступило

03.09.2007