Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Типовые числа критических точек негладких функционалов, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 693–705

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:14:39

УДК 517.946

ТИПОВЫЕ ЧИСЛА КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В. С. Климов

Изучаются типовые числа критических точек липшицевых функционалов. Устанавливаются варианты неравенств Морса; показывается, что топологический индекс изолированной критической точки равен альтернированной сумме ее типовых чисел. Приводятся формулы для вычисления типовых чисел нулевой критической точки одного функционала.

Библиография: 18 названий.

Введение. Статья посвящена обобщению теории Морса на негладкие функционалы. Первоначально бесконечномерные версии результатов Морса доказывались для класса C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функционалов (см., например, [1]–[5] и приведенную там библиографию). Развитая теория оказалась неприменимой к интегральным функционалам многомерного вариационного исчисления, принадлежащим C^2 лишь при существенных дополнительных ограничениях. В связи с этим в [3] предложен вариант теории Морса для функционалов класса $C^{1,1}$. Ниже порядок гладкости снижается (по сравнению с [3]) на единицу; основные результаты новы и для функций конечного числа переменных. В бесконечномерном случае существенно то, что рассматриваемые банаховы пространства не предполагаются гильбертовыми. Наиболее значительные из возникающих здесь трудностей связаны с построением деформаций, уменьшающих значения функционала. Для преодоления этих трудностей используются идеи теории монотонных операторов [3], [5]–[7], результаты работ [8], [9], методы нелинейного анализа [10]–[15].

В п. 1 статьи изучаются типовые числа критических значений липшицевых функционалов, определенных на выпуклом замкнутом подмножестве сепарабельного рефлексивного пространства. Устанавливаются варианты неравенств Морса (теорема 2). В п. 2 вводятся типовые числа критических точек. Показывается, что топологический индекс изолированной критической точки равен альтернированной сумме ее типовых чисел (теорема 4). Пункт 3 содержит формулу для вычисления типовых чисел нулевой критической точки однородного функционала (теорема 5).

Используются обозначения: $\bar{\mathcal{M}}$ ($\mathring{\mathcal{M}}$, $\partial\mathcal{M}$) – замыкание (внутренность, граница) подмножества $\mathcal{M}$ метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$, $\theta_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{N}, \mathcal{M}) = \sup_{x \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in \mathcal{M}} \rho(x, y)$ – уклонение множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ от множества $\mathcal{M} \subset \mathfrak{X}$ в метрике ρ ; X и X^* – действительное банахово пространство и сопряженное к нему соответственно, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая билинейная форма на $X \times X^*$, $s(x^*, \mathcal{M}) = \sup\{\langle x, x^* \rangle, x \in \mathcal{M}\}$ ($x^* \in X^*$) – опорная

функция множества $\mathcal{M} \subset X$, $G(X)$ – совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X . Если $x \in Q$, $Q \in G(X)$, то множества, определяемые соотношениями

$$T_Q(x) = \overline{\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(Q - x)}, \quad N_Q(x) = \{x^* \in X^*, \langle v - x, x^* \rangle \leq 0 \forall v \in Q\},$$

называют касательными и нормальными конусами к множеству Q в точке x . Далее, $\Lambda(\mathcal{M}, Y)$ – совокупность отображений множества $\mathcal{M} \subset X$ в банахово пространство Y , удовлетворяющих локальному условию Липшица; $\Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathcal{M}; \mathbb{R})$.

Многозначное отображение $\mathcal{F}$ множества $\mathcal{M}_1$ во множество $\mathcal{M}_2$ – это оператор, ставящий в соответствие элементу x из $\mathcal{M}_1$ непустое множество $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{M}_2$; если $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$, то $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \bigcup \mathcal{F}(x)$ ($x \in \mathcal{M}$) – область значений отображения $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{M}$. Отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ – подмножества метрических пространств $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ соответственно) называют *ограниченным*, если для каждого ограниченного множества $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ область значений $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ есть ограниченное подмножество $\mathfrak{X}_2$.

1. Типовые числа критических значений. Всюду далее X – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $\|\cdot\|$ – норма в X , символы $\rightharpoonup$ и $\rightarrow$ означают слабую и сильную сходимости соответственно; $Q \in G(X)$, $X_0 = \text{Lin}(Q - Q)$ – линейная оболочка множества $Q - Q$; ниже предполагается, что $\overline{X_0} = X$; $\Gamma(Q)$ – совокупность таких конечномерных подпространств E пространства X , что внутренность $\text{ri}_E(Q \cap E)$ множества $Q \cap E$ относительно пространства E непуста.

Пусть $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \subset Q$. Обозначим через $S(\mathcal{M})$ класс ограниченных многозначных отображений $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow G(X^*)$, удовлетворяющих условию: для произвольных последовательностей $x_n \in \mathcal{M}$, $x_n^* \in \mathcal{F}(x_n)$, обладающих свойствами

$$x_n \rightharpoonup x, \quad x_n^* \rightharpoonup x^*, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle, \quad (1)$$

имеют место соотношения

$$x_n \rightarrow x, \quad x^* \in \mathcal{F}(x). \quad (2)$$

Близкие к $S(\mathcal{M})$ классы однозначных операторов рассматривались в [2], [3], [5]–[7]. Примеры многозначных операторов класса $S(\mathcal{M})$ можно найти в [8], [9].

Элемент $x \in \mathcal{M}$ назовем *особой точкой* оператора $\mathcal{F}$ класса $S(\mathcal{M})$, если

$$\langle v - x, x^* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in Q \quad (3)$$

для некоторого x^* из $\mathcal{F}(x)$. Соотношение (3) означает, что особые точки оператора $\mathcal{F}$ являются решениями соответствующего вариационного неравенства [10]. Оператор $\mathcal{F}$ класса $S(\mathcal{M})$ назовем *невыврожденным* на множестве $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$, если $\mathfrak{M}$ не содержит особых точек $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [8]. Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$ невыврожден на ограниченном замкнутом множестве $\mathfrak{M} \subset Q$. Тогда существуют E из $\Gamma(Q)$, ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q, X)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами

$$w(x) \in \text{ri}_E(Q \cap E) \quad \forall x \in Q, \quad s(w(x) - x, \mathcal{F}(x)) < -\delta \quad \forall x \in \mathfrak{M}. \quad (4)$$

Пусть Ω – ограниченное открытое (в относительной топологии) подмножество множества Q , рассматриваемого как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $\partial_Q \Omega$ – относительная граница множества Ω . Если оператор $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$ невырожден на $\partial_Q \Omega$, то согласно предложению 1 существуют пространство E класса $\Gamma(Q)$ и векторное поле w класса $\Lambda(Q, E)$ такие, что $w(x) \in \text{ri}_E(Q \cap E) \quad \forall x \in Q, \langle x - w(x), x^* \rangle > 0$ ($x \in \partial_Q \Omega, x^* \in \mathcal{F}(x)$). В частности, поле $(I - w)(x) = x - w(x)$ невырождено на $\partial_Q \Omega$ и определено относительное вращение $\gamma(I - w, \partial_Q \Omega)$ поля $I - w$ на $\partial_Q \Omega$ [11], [12]. Число $\gamma(I - w, \partial_Q \Omega)$ назовем *относительным вращением* поля $\mathcal{F}$ на $\partial_Q \Omega$ и обозначим символом $\gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega)$. Обсуждение свойств вращения $\gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega)$ можно найти в [5], [8], [9].

Множество $\mathfrak{N} \subset Q$ называют *особым* для поля $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$, если любой элемент из $\mathfrak{N}$ есть особая точка $\mathcal{F}$. Особое множество $\mathfrak{N}$ *изолировано*, если в некоторой его относительной окрестности O нет других особых точек поля $\mathcal{F}$. Для ограниченного изолированного особого множества окрестность O можно взять также ограниченной; в этом случае $\mathfrak{N}$ – компактное множество [9]; относительное вращение $\gamma_Q(\mathcal{F}, O)$ называется *индексом* особого множества $\mathfrak{N}$ поля $\mathcal{F}$ и обозначается символом $\text{ind}_Q(\mathfrak{N}, \mathcal{F})$.

Основное внимание далее уделяется потенциальным операторам. Напомним некоторые определения. Пусть $f \in \Lambda(Q)$, $x \in Q$, $v \in X_0 = \text{Lin}(Q - Q)$. Множество последовательностей $\{y, t\}$ таких, что $y \rightarrow x, t \rightarrow +0, [y, y + tv] \subset Q$, непусто [13]. Положим

$$f^0(x, v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x, t \rightarrow +0, [y, y + tv] \subset Q} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Число $f^0(x, v)$ называют *обобщенной производной* функционала f в точке x по направлению v . Функционал $f^0(x, \cdot): X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукл, положительно однороден, удовлетворяет условию Липшица и допускает однозначное продолжение с сохранением указанных свойств на пространство $X = \overline{X_0}$. За продолженным функционалом сохраним то же обозначение. Функционал $f^0(x, \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}$ есть опорная функция множества класса $G(X^*)$, обозначаемого символом $\partial f(x)$ и называемого *обобщенным градиентом* функционала f в точке x [13], [14]. Если $f \in \Lambda(Q)$, $x(\cdot): (\alpha, \beta) \rightarrow Q$ – отображение класса C^1 , то для верхней правой производной $D^*f(x(t))$ функции $f \circ x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке t справедлива [15] оценка

$$D^*f(x(t)) \leq f^0(x(t), x'(t)). \quad (5)$$

Через $\Lambda_1(Q)$ обозначим часть $\Lambda(Q)$, состоящую из функционалов f , для которых градиентное отображение $\mathcal{F}(x) = \partial f(x)$ принадлежит классу $S(Q)$. В этом случае функционал f назовем *потенциалом* оператора $\mathcal{F}$, особые точки $\mathcal{F}$ – *критическими точками* функционала f , неособые точки $\mathcal{F}$ – *регулярными точками* f . Если поверхность уровня $f^{-1}(c) = \{x \in Q, f(x) = c\}$ функционала пересекается с множеством $\mathcal{K}_f$ его критических точек, то число c именуют *критическим значением* f ; в противном случае c – *регулярное значение* f .

Далее используются некоторые понятия алгебраической топологии. Пусть $\mathfrak{R}'$ – подпространство метрического пространства $\mathfrak{R}$. Через $H_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, $l = 0, 1, \dots$, обозначается группа относительных целочисленных гомологий с компактными носителями [4], [16], [17] пары пространств $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ – ранг группы $H_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, называемый l -м *числом Бетти* пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. Если $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') < \infty \quad \forall l$ и $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = 0$ при $l \geq l_0$, то число

$\chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = b_0(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + \dots + (-1)^l b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + \dots$ называют *эйлеровой характеристикой* пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. В случае $\mathfrak{R}' = \emptyset$ полагают $H_l(\mathfrak{R}, \emptyset) = H_l(\mathfrak{R})$, $\chi(\mathfrak{R}, \emptyset) = \chi(\mathfrak{R})$, $H_l(\mathfrak{R})$ – группа абсолютных целочисленных гомологий с компактными носителями пространства $\mathfrak{R}$, $\chi(\mathfrak{R})$ – эйлерова характеристика пространства $\mathfrak{R}$. Если пара $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ такова, что два из чисел $\chi(\mathfrak{R})$, $\chi(\mathfrak{R}')$, $\chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ определены, то определено и третье, причем [16, § 5.5]

$$\chi(\mathfrak{R}) - \chi(\mathfrak{R}') = \chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'). \quad (6)$$

Существенную роль в последующем играет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [8]. Пусть $f \in \Lambda_1(Q)$, a – регулярное значение функционала f , лебегово множество $M_a = \{x \in Q, f(x) \leq a\}$ непусто и ограничено. Тогда определена эйлерова характеристика $\chi(M_a)$ пространства M_a и $\gamma_Q(\partial f, M_a) = \chi(M_a)$.

В этом и следующем пунктах будем предполагать множество Q ограниченным. Пусть c – единственное критическое значение функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ на сегменте $[a, b]$, $a < c < b$. В силу предложения 2 имеют смысл эйлеровы характеристики пространств M_b, M_a . Применяя к паре пространств (M_b, M_a) равенство (6), получаем $\chi(M_b, M_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a)$. В частности, при любом целом $l \geq 0$ конечны числа Бетти $b_l(M_b, M_a)$ ($l = 0, 1, \dots$) и последовательность $b_l(M_b, M_a)$ финитна. Из теоремы 2 работы [8] следует, что числа $b_l(M_b, M_a)$ не зависят от способа выбора отрезка $[a, b]$, для которого $c \in (a, b)$ и все числа из $[a, b] \setminus \{c\}$ регулярны. Таким образом, числа $b_l(M_b, M_a)$ характеризуют число c . Положим $m_l = b_l(M_b, M_a)$, $l = 0, 1, \dots$; определяемые этими равенствами величины $m_l(c)$ назовем *типовыми числами* критического значения c .

ТЕОРЕМА 1. Пусть c – изолированное критическое значение функционала f класса $\Lambda_1(Q)$, $\mathfrak{R}_c = \mathcal{K}_f \cap f^{-1}(c)$ – множество критических точек f на поверхности уровня $f^{-1}(c)$. Тогда

$$\text{ind}_Q(\mathfrak{R}_c, \partial f) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(c). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале отметим, что $\mathfrak{R}_c$ – изолированное критическое множество, т.е. в некоторой его окрестности нет критических точек функционала f . Действительно, в предположении противного существует последовательность x_n из $\mathcal{K}_f$, для которой $\theta_X(x_n, \mathfrak{R}_c) \rightarrow 0$, $f(x_n) \neq c$. Ввиду компактности множества $\mathfrak{R}_c$ [9] можно считать, что $x_n \rightarrow x$ и $x \in \mathfrak{R}_c$. Но тогда $f(x_n) \rightarrow f(x) = c$, а это противоречит изолированности критического значения c .

Равенство (6) вытекает из цепи соотношений:

$$\begin{aligned} \text{ind}_Q(\mathfrak{R}_c, \partial f) &= \gamma_Q(\partial f, \overset{\circ}{M}_b) - \gamma_Q(\partial f, \overset{\circ}{M}_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a) \\ &= \chi(M_b, M_a) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l b_l(M_b, M_a) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(c), \end{aligned}$$

где $a < c < b$, c – единственное критическое значение функционала f на отрезке $[a, b]$. Последовательно используются теорема об алгебраическом числе особых точек [3], [5], [12], предложение 2, равенство $\chi(M_b, M_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a)$, вытекающее из (6), определения эйлеровой характеристики пары (M_b, M_a) и типовых чисел $m_l(c)$. Теорема доказана.

Пусть функционал f имеет конечное число критических значений $c_1, c_2, \dots, c_N$, причем $c_1 < c_2 < \dots < c_N$. Очевидно, $c_1 = \min\{f(x), x \in Q\}$; минимум f на Q достигается [9]. Регулярному значению $b > c_1$ функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ сопоставим многочлены

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{c_i < b} \sum_{l \geq 0} m_l(c_i) t^l = \sum_{l \geq 0} a_l t^l, \quad \mathcal{B}(t) = \sum_{l \geq 0} b_l(M_b) t^l.$$

В указанных предположениях имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}(t) = (1+t)\mathcal{D}(t), \quad (8)$$

в котором $\mathcal{D}(t)$ – многочлен с неотрицательными коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_0, d_1, \dots, d_m$ – последовательность, разделяющая меньшие b критические значения функционала f , т.е. $d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < \dots < d_{m-1} < c_m < d_m = b$. Рассматривая точную гомологическую последовательность пары $(M_{d_i}, M_{d_{i-1}})$, приходим [4, § 16] к равенству

$$\sum_{l \geq 0} m_l(c_i) t^l - \left\{ \sum_{l \geq 0} b_l(M_{d_i}) t^l - \sum_{l \geq 0} b_l(M_{d_{i-1}}) t^l \right\} = (1+t)\mathcal{D}_i(t),$$

где $\mathcal{D}_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, – многочлен с неотрицательными коэффициентами. Так как $d_0 < c_1$, то $M_{d_0} = \emptyset$. Суммируя полученные равенства по i от 1 до m , имеем $\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}(t) = (1+t)(\mathcal{D}_1(t) + \dots + \mathcal{D}_m(t))$. Последнее равенство влечет (8). Теорема доказана.

Непосредственным следствием (8) являются неравенства Морса

$$\sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} (a_i - b_i(M_b)) \geq 0 \quad (9)$$

и их ослабленные варианты: $a_l \geq b_l(M_b)$, $l = 0, 1, \dots$. Начиная с некоторого номера l , неравенства (9) становятся равенствами; это также вытекает из (8).

2. Топологические характеристики критических точек. В этом пункте вводятся типовые числа критических точек. Ниже используется следующее дополнение к предложению 1.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{N}$ – множество особых точек оператора $\mathfrak{F}$ класса $S(Q)$. Тогда существуют последовательности $E_n \in \Gamma(Q)$, $\delta_n > 0$ и отображение w класса $\Lambda(Q \setminus \mathfrak{N}, X)$, обладающие свойствами

$$w(x) \in \text{ri}_{E_n}(Q \cap E_n), \quad s(w(x) - x, \mathfrak{F}(x)) < -\delta_n, \quad x \in Q, \quad \theta_X(x, \mathfrak{N}) \geq \frac{1}{n}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0(x) = \theta_X(x, \mathfrak{N})/\theta_X(Q, \mathfrak{N})$, $x \in Q$. Очевидно, что $f_0 \in \Lambda(Q)$, $0 \leq f_0(x) \leq 1$ ($x \in Q$), $\mathfrak{N} = \{x \in Q, f_0(x) = 0\}$. Пусть $\alpha_n = 1/2^n$, $\beta_n = 3\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. Построим систему функций φ_n класса $\Lambda(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\varphi_n(t) \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) = 1$, $0 < t \leq 1$;
- 2) $\{t: \varphi_n(t) > 0\} = (p_n, q_n)$, $\alpha_n < p_n < q_n < \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Система интервалов (p_n, q_n) , $n = 1, 2, \dots$, образует открытое покрытие промежутка $(0, 1]$ кратности 2.

Положим $\mathfrak{M}_n = \{x \in Q, \alpha_n \leq f_0(x) \leq \beta_n\}$. Множество $\mathfrak{M}_n$ ограничено, замкнуто и не содержит особых точек поля $\mathfrak{F}$. Согласно предложению 1 существуют E'_n из $\Gamma(Q)$, поле w_n класса $\Lambda(Q, X)$ и постоянная $\delta'_n > 0$ такие, что

$$w_n(x) \in \text{ri}_{E'_n}(Q \cap E'_n) \quad \forall x \in Q, \quad s(w_n(x) - x, \mathfrak{F}(x)) < -\delta'_n \quad \forall x \in \mathfrak{M}_n. \quad (11)$$

Рассмотрим поле

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(f_0(x))w_n(x), \quad x \in Q.$$

Его сужение на $Q \setminus \mathfrak{N}$ принадлежит классу $\Lambda(Q \setminus \mathfrak{N}, X)$. Соотношения (11) влекут выполнение свойств (10) при подходящем выборе последовательностей E_n, δ_n ($n = 1, 2, \dots$). Лемма доказана.

Применим лемму к потенциальному оператору $\mathfrak{F}$ с потенциалом f класса $\Lambda_1(Q)$; в этом случае множество $\mathfrak{N}$ особых точек оператора $\mathfrak{F} = \partial f$ совпадает с множеством $\mathcal{K}_f$ критических точек функционала f . Фиксируем последовательность $E_n \in \Gamma(Q)$, $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), и отображение w , обладающие свойствами (10). Отображение $v(x) = w(x) - x$ ($x \in Q \setminus \mathcal{K}_f$) принадлежит классу $\Lambda(Q \setminus \mathcal{K}_f, X)$ и удовлетворяет вытекающим из (10) соотношениям

$$v(x) \in \text{ri}_{E_n} T_{Q \cap E_n}(x), \quad f^0(x, v(x)) < -\delta_n, \quad x \in Q, \quad \theta_X(x, \mathcal{K}_f) \geq \frac{1}{n}. \quad (12)$$

При любом z из $Q \setminus \mathcal{K}_f$ задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x(0) = z \quad (13)$$

имеет единственное решение $x(t; z)$, определенное на максимальном промежутке $[0, \omega(z))$. Первое из соотношений (12) гарантирует включение $x(t; z) \in Q$ [8], [15]. Объединяя (12), (13) с (5), приходим к оценке

$$D^* f(x(t; z)) \leq -\delta_n, \quad \text{если } \theta_X(x(t; z), \mathcal{K}_f) \geq \frac{1}{n}. \quad (14)$$

Неравенство (14) влечет строгое убывание функции $f(x(t; z))$ на $[0, \omega(z))$; скорость этого убывания отделена от нуля на любом отрезке траектории $x = x(t; z)$, отделенном от множества $\mathcal{K}_f$ критических точек функционала f .

Пусть $c \in f(\mathcal{K}_f)$, $\mathfrak{R}_c = \mathcal{K}_f \cap f^{-1}(c)$ – множество критических точек f на поверхности уровня $f^{-1}(c)$. Предположим, что каждая критическая точка x_* из $\mathfrak{R}_c$ является изолированной, т.е. в некоторой ее окрестности нет критических точек функционала f . Тогда множество $\mathfrak{R}_c$ конечно и c – единственное критическое значение f на некотором сегменте $[a, b]$, $a < c < b$.

Фиксируем z из $f^{-1}((c, b])$. Решение $x = x(t; z)$ задачи Коши (13) определено на некотором промежутке $[0, \omega(z))$. Если $f(x(t; z)) \geq c + \sigma$ ($\sigma > 0$) на каком-то отрезке $[0, T]$, то $D^*f(x(t; z)) < -\delta$ с некоторым $\delta > 0$ на том же отрезке. Поэтому множество $\{t > 0, f(x(t; z)) > c\}$ есть конечный или бесконечный интервал $(0, \tau(z))$. Таким образом, для рассматриваемых z

$$f(x(t; z)) > c, \quad 0 \leq t < \tau(z), \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \tau(z)-0} f(x(t; z)) = c.$$

ЛЕММА 2. Пусть $x_0 \in f^{-1}(c)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $z \in Q$, $b \geq f(z) > c$ и $\|z - x_0\| < \delta$, то $\|x(t; z) - x_0\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \tau(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим представляющийся более сложным случай, когда $x_0 \in \mathfrak{R}_c$. Если доказываемое утверждение неверно, то найдутся такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности $z_n \in Q$, $t_n \in [0, \tau(z_n)]$, что $b \geq f(z_n) > c$, $\|z_n - x_0\| < 1/n$ и $\|x(t_n; z) - x_0\| > \varepsilon_0$. Ввиду ограниченности отображения v время T_n пребывания траектории $x = x(t; z_n)$ вне $\varepsilon_0/2$ -окрестности множества $\mathcal{K}_f$ ограничено снизу положительной константой: $T_n \geq T_0 > 0 \quad \forall n$. За это время значение функционала f на траектории $x = x(t; z_n)$ уменьшится на положительную величину ε_1 , не зависящую от n . Но это противоречит соотношениям $f(z_n) \geq f(x(t; z_n)) > c$ ($0 \leq t < \tau(z_n)$), $f(z_n) \rightarrow c$.

Если x_0 – регулярная точка функционала f , то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что все элементы множества $\{x \in Q, \|x - x_0\| < \varepsilon_0\}$ – также регулярные точки. Теперь доказательство можно провести по той же схеме, что и выше. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для любой точки z из $f^{-1}((c, b])$ существует принадлежащий $f^{-1}(c)$ односторонний предел $\lim_{t \rightarrow \tau(z)-0} x(t; z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tau(z) < \infty$, то существование предела вытекает из ограниченности поля v и условия $x' = v(x)$. Рассмотрим более сложный случай $\tau(z) = \infty$. Для любого $\delta > 0$ найдется такое число t , что $\theta_X(x(t; z), \mathcal{K}_f) < \delta$. Действительно, в противном случае $\theta_X(x(t; z), \mathcal{K}_f) \geq \delta \quad \forall t$; отсюда следовало бы, что $f(x(t; z)) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому для каждого натурального числа n найдется такое t_n , что $\theta_X(x(t_n; z), \mathcal{K}_f) < 1/n$. Некоторая подпоследовательность последовательности $x(t_n; z)$ сходится к критической точке x_0 функционала f . Отсюда в силу леммы 2 следует, что вся траектория $x = x(t; z)$ при $t \rightarrow \infty$ сходится к x_0 . Лемма доказана.

Наряду с введенным выше полем $v = v(x)$ рассмотрим его подправленный вариант $v_1(x) = v(x)(f(x) - c)_+$ ($x \in Q \setminus \mathcal{K}_f$) и аналогичную (13) задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = v_1(x), \quad x(0) = z. \quad (15)$$

Если $f(z) \leq c$, то решение $x_1(t; z)$ задачи (15) постоянно: $x_1(t; z) \equiv z$ ($t \geq 0$). Для начальных значений z из $f^{-1}((c, b])$ решение $x_1(t; z)$ получается из решения $x(t; z)$ задачи (13) путем замены времени: справедливо равенство

$$x_1(t; z) = x(s; z), \quad s = \int_0^t (f(x_1(\tau; z)) - c) d\tau. \quad (16)$$

Отметим вытекающую из (15) оценку

$$\frac{d}{dt}(f(x_1(t; z)) - c) \geq -k(f(x_1(t; z)) - c), \quad 0 < k < \infty,$$

приводящую к неравенству $f(x_1(t; z)) - c \geq \exp(-kt)(f(z) - c)$. В частности, $f(x_1(t; z)) > c$, если $0 < t < \infty$, $c < f(z) \leq b$ и $f(x_1(t; z)) \rightarrow c$ при $t \rightarrow \infty$. Из лемм 2, 3 и (16) вытекают леммы 4, 5.

ЛЕММА 4. Пусть $x_0 \in f^{-1}(c)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $z \in Q$, $b \geq f(z) > c$ и $\|z - x_0\| < \delta$, то $\|x_1(t; z) - x_0\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \infty)$.

ЛЕММА 5. Для любой точки z из $f^{-1}((c, b])$ существует принадлежащий $f^{-1}(c)$ предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t; z)$.

Полезно положить $x_1(\infty; z) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t; z)$; согласно лемме 5 $x_1(\infty; z) \in f^{-1}(c)$.

ЛЕММА 6. Пусть c – единственное критическое значение функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ на отрезке $[c, b]$ и каждая критическая точка x из $\mathfrak{R}_c$ является изолированной. Тогда множество M_c есть деформационный ретракт множества M_b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение отображение $\Psi: M_b \times [0, 1] \rightarrow M_b$, определяемое равенством

$$\Psi(z, \lambda) = x_1\left(\frac{\lambda}{1 - \lambda}; z\right);$$

в частности, $\Psi(z, 1) = x_1(\infty; z) \in M_c$ при любом z из M_b . Из лемм 4, 5 вытекает непрерывность отображения Ψ ; справедливы соотношения: $\Psi(z, 0) = z$ ($z \in M_b$), $\Psi(z, \lambda) = z$ ($z \in M_c, 0 \leq \lambda \leq 1$), $\Psi(z, 1) \in M_c$ ($z \in M_b$).

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть c – единственное критическое значение функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ на отрезке $[a, c]$ ($a < c$). Тогда множество M_a есть деформационный ретракт множества $M_c \setminus \mathfrak{R}_c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in M_c \setminus \mathfrak{R}_c$ и $f(z) > a$, $x(t; z)$ – решение задачи Коши (13). Функция $f(x(t; z))$ строго убывает на том отрезке $[0, \beta(z)]$, где $f(x(t; z)) \geq a$. Определим функцию $T(z)$ для z из $(M_c \setminus \mathfrak{R}_c) \setminus M_a$ исходя из равенства $f(x(T(z); z)) = a$; для z из M_a положим $T(z) = 0$. Легко устанавливается непрерывность функции $T(z)$. Определяемое равенством $\Phi(z, \lambda) = x(\lambda T(z); z)$ отображение $\Phi: (M_c \setminus \mathfrak{R}_c) \times [0, 1] \rightarrow M_c \setminus \mathfrak{R}_c$ задает искомую деформацию множества $M_c \setminus \mathfrak{R}_c$ на множество M_a .

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия лемм 6, 7, то группы $H_l(M_b, M_a)$ и $H_l(M_c, M_c \setminus \mathfrak{R}_c)$ изоморфны:

$$H_l(M_b, M_a) \simeq H_l(M_c, M_c \setminus \mathfrak{R}_c). \quad (17)$$

Пусть x_0 – критическая точка функционала f класса $\Lambda_1(Q)$, $c = f(x_0)$, $H_l(M_c, M_c \setminus x_0)$ ($l = 0, 1, \dots$) – группа локальных гомологий [16, гл. 4, § 3] пространства M_c в точке x_0 . Если число $m_l(x_0) = \text{rang } H_l(M_c, M_c \setminus x_0) = b_l(M_c, M_c \setminus x_0) < \infty$, то его называют l -м *типовым числом критической точки* x_0 . Для любой окрестности U точки x_0 группа $H_l(M_c \cap U, (M_c \cap U) \setminus x_0)$ изоморфна группе $H_l(M_c, M_c \setminus x_0)$, поэтому $m_l(x_0) = \text{rang } H_l(M_c \cap U, (M_c \cap U) \setminus x_0)$.

Установим связь между типовыми числами критических значений и критических точек функционала f .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $c \in f(\mathcal{K}_f)$, $\mathfrak{R}_c = \{x_1, \dots, x_r\}$ – соответствующее критическое множество функционала f класса $\Lambda_1(Q)$, причем каждая из критических точек x_i , $i = 1, \dots, r$, изолирована. Тогда типовые числа $m_l(c)$ критического значения c и типовые числа $m_l(x_i)$ критических точек x_i связаны равенством

$$m_l(c) = \sum_{i=1}^r m_l(x_i), \quad l = 0, 1, \dots \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим произвольные непересекающиеся окрестности U_i (относительно пространства M_c) точек x_i . Используя (17) и вырезая множество $M_c \setminus \bigcup_{i=1}^r U_i$, имеем последовательно

$$H_l(M_b, M_a) \simeq H_l(M_c, M_c \setminus \mathfrak{R}_c) \simeq H_l\left(\bigcup_{i=1}^r U_i, \bigcup_{i=1}^r (U_i \setminus x_i)\right).$$

Так как окрестности U_i не пересекаются, то

$$H_l(M_b, M_a) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H_l(U_i, U_i \setminus x_i).$$

Теперь (18) вытекает из определения типовых чисел критических значений и критических точек. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathfrak{R}_c = \{x_0\}$ – единственная изолированная критическая точка функционала f на поверхности $f^{-1}(c)$, то $m_l(c) = m_l(x_0)$ и

$$\text{ind}_Q(x_0, \partial f) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(x_0). \quad (19)$$

Из (18) следует равенство $m_l(c) = m_l(x_0)$ ($l \geq 0$). Оно позволяет отождествить (в предположении $\mathfrak{R}_c = \{x_0\}$) типовые числа критической точки x_0 с типовыми числами критического значения $c = f(x_0)$. Равенство (19) есть частный случай (7). Оно оказывается верным при меньших предположениях относительно числа $c = f(x_0)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть x_0 – изолированная критическая точка функционала f из $\Lambda_1(Q)$ и существует последовательность a_n регулярных значений f : $a_n < f(x_0)$, $a_n \rightarrow f(x_0)$. Тогда $m_l(x_0) < \infty \quad \forall l$, $m_l(x_0) = 0$ при $l \geq l_0$ и имеет место равенство (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что X, X^* – локально равномерно выпуклые пространства. При выполнении этого предположения функционал $f_0(x) = \|x\|^2$ непрерывно дифференцируем на X , его производная f'_0 есть оператор класса $S(X)$ [9]. С помощью подходящей замены переменной можно добиться того, что $x_0 = 0$ есть единственная критическая точка функционала f на множестве $\{x \in Q, \|x\| \leq 2\}$. Оператор ∂f невырожден на множестве $\mathcal{P} = \{x \in Q, 1 \leq \|x\| \leq 2\}$, поэтому найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $\theta_{X^*}(0, \partial f(x) + N_Q(x)) > 2\varepsilon_0 \quad \forall x \in \mathcal{P}$.

Фиксируем бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую свойствами: $\varphi(t) = 0$, если $0 \leq t \leq 1$; $\varphi(t) = 1$, если $t \geq 4$; $0 < \varphi'(t)$, если $1 < t < 4$. Положим $h(x) = \varphi(f_0(x))$ ($x \in X$). Отметим следующие свойства функции h : $h \in C^1(X)$, $h(x) = 0$ ($\|x\| \leq 1$), $h(x) = 1$ ($\|x\| \geq 2$), $0 < h(x) < 1$ ($1 < \|x\| < 2$), $h'(x) = \varphi'(f_0(x))f'_0(x)$.

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ функционал $g_\varepsilon = f + \varepsilon h$ принадлежит классу $\Lambda_1(Q)$. Справедливо равенство $\partial g_\varepsilon(x) = \partial f(x) + \varepsilon h'(x)$, из которого вытекает ограниченность оператора $\mathcal{F} = \partial g_\varepsilon: Q \rightarrow G(X^*)$. Пусть $x_n \in Q$, $x_n^* \in \mathcal{F}(x_n)$ – последовательности, обладающие свойствами (1). Положим $z_n^* = h'(x_n)$, $y_n^* = x_n^* - \varepsilon z_n^* \in \partial f(x_n)$. Так как X – рефлексивное пространство, то можно считать, что z_n^* слабо сходится к некоторому элементу $z^* \in X^*$. Тогда $y_n^* \rightharpoonup y^* = x^* - \varepsilon z^*$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y_n^* + \varepsilon z_n^* \rangle \leq 0$. Прореживая, если это необходимо, последовательность x_n , можно считать, что $\langle x_n - x, z_n^* \rangle \rightarrow \gamma_0$. Если $\gamma_0 \geq 0$, то имеем: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y_n^* \rangle \leq 0$. Так как $\partial f \in S(Q)$, то из последнего неравенства получаем: $x_n \rightarrow x$, $y^* \in \partial f(x)$, $x^* = y^* + \varepsilon z^* \in \partial f(x) + \varepsilon h'(x) = \mathcal{F}(x)$.

Рассмотрим случай $\gamma_0 < 0$. В этом случае последовательность $z_n^* = h'(x_n)$ не стремится к 0; можно считать, что последовательность $\|x_n\|$ ограничена от 1 и 2: $1 < R_1 \leq \|x_n\| \leq R_2 < 2$. Но $h'(x_n) = \varphi'(f_0(x_n))f'_0(x_n)$; отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, f'_0(x_n) \rangle \leq 0$. Так как $f'_0 \in S(X)$, это снова влечет соотношение (2).

Включение $y_\varepsilon \in \Lambda_1(Q)$ при любом $\varepsilon > 0$ доказано. Положим $\varepsilon = f(0) - a_n$. Фиксируем n и ε так, что $\varepsilon \|h'(x)\| < \varepsilon_0$ ($x \in Q, \|x\| \leq 2$). Тогда функционал $g_\varepsilon = f + \varepsilon h$ не имеет ненулевых критических точек на множестве $\{x \in Q, \|x\| \leq 2\}$. Вне этого множества $h(x) = 1$, $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon$. Из равенства $g_\varepsilon(x) = f(0)$ следует, что $f(x) = a_n$, x – регулярная точка функционалов f, g_ε . Поэтому 0 есть единственная критическая точка функционала g_ε на поверхности уровня $g_\varepsilon(x) = f(0)$. Типовые числа точки $x_0 = 0$ для функционалов f, g_ε одинаковы, поскольку эти функционалы совпадают в окрестности данной точки. Имеем последовательно

$$\text{ind}_Q(x_0, \partial f) = \text{ind}_Q(x_0, \partial g_\varepsilon) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(x_0).$$

Теорема доказана.

3. Типовые числа нулевой критической точки однородного функционала. Обсудим модификации установленных выше результатов. Как полагает автор, развитый выше подход может быть распространен на широкий класс липшицевых функции-

оналов, определенных на замкнутых подмножествах банахова многообразия. Не затрагивая вопрос с максимальной общностью, рассмотрим случай, когда Q – неограниченное подмножество сепарабельного рефлексивного банахова пространства X , $Q \in G(X)$. Отметим, что если $x \in Q$ и $\|x\| < R$, то нормальные конусы к множествам Q и $Q_R = \{z \in Q, \|z\| \leq R\}$ совпадают: $N_Q(x) = N_{Q_R}(x)$. В частности, одинаковы множества удовлетворяющих неравенству $\|x\| < R$ критических точек у функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ и его сужения на Q_R . Это позволяет в ряде ситуаций заменить множество Q его ограниченной частью Q_R и, следовательно, распространить предшествующие результаты на более общий случай.

Проиллюстрируем сказанное применительно к теоремам 1, 2. Пусть $f \in \Lambda_1(Q)$ и при некотором $b < \infty$ множество $M_b = \{x \in Q, f(x) \leq b\}$ ограничено: $\theta_X(M_b, 0) < R$. Тогда включение $x \in M_b$ влечет равенство $N_Q(x) = N_{Q_R}(x)$, поэтому сохраняются соотношения (8), (9).

Определение типовых чисел носит локальный характер. Оно без всяких изменений переносится на случай неограниченного множества Q . Ясно, что если x_0 – критическая точка функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ и $\|x_0\| < R$, то x_0 – критическая точка сужения f на Q_R и типовые числа x_0 как критической точки функционала f и его сужения на Q_R одинаковы.

Обсудим способ вычисления типовых чисел однородного функционала. Пусть Q – конус с вершиной в точке 0. Функционал f класса $\Lambda_1(Q)$ назовем *p-однородным*, если $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ ($1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $x \in Q$); в этом случае $\mathcal{F} = \partial f$ есть $(p-1)$ -однородный оператор класса $S(Q)$. Однородность оператора $\mathcal{F}$ означает, что $\mathcal{F}(\lambda v) = \lambda^{p-1} \mathcal{F}(v)$ ($\lambda > 0$, $v \in Q$). Справедливы равенства $f^0(v, v) = p \cdot f(v) = -f^0(v, -v)$ ($v \in Q$) – естественные аналоги формулы Эйлера $\langle v, f'(v) \rangle = p \cdot f(v)$ для гладкого функционала f . Так как $\mathcal{F}(0) = 0$, то 0 – критическая точка p -однородного функционала f ; если других критических точек нет, то функционал f назовем *невыврожденным*. Для p -однородного функционала $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ лебегово множество $M_0 = \{x \in Q, f(x) \leq 0\}$ коническое: если $x \in M_0$, то и $\lambda x \in M_0$ при любом $\lambda \geq 0$. Оно определяется пересечением с границей ∂B шара $B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$.

ЛЕММА 8. *Если f – невырожденный p -однородный неотрицательный функционал класса $\Lambda_1(Q)$, то $M_0 \setminus \{0\}$, $M_0 \cap \partial B = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 – точка минимума функционала f на множестве Q . Поэтому x_0 – критическая точка f , а поскольку f – невырожденный функционал, то $x_0 = 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *В условиях леммы 8 $t_0(0) = 1$, $m_i(0) = 0$, $i \geq 1$.*

Рассмотрим теперь случай, когда $\{x \in Q, f(x) < 0\} \neq \emptyset$. Группы локальных гомотопий пространств M_0 и $M_0 \cap B$ в точке 0 совпадают. Обозначим через f_1 сужение функционала f на $Q_1 = Q \cap B$. Очевидно, что 0 – изолированная критическая точка функционала f_1 ; отличные от 0 критические точки f_1 могут находиться лишь в множестве $Q \cap \partial B$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть f – невырожденный p -однородный функционал класса $\Lambda_1(Q)$ и $\{x \in Q, f_1(x) < 0\} \neq \emptyset$. Тогда типовые числа $m_i(0)$ нулевой критической точки*

конечны, $m_l(0) = 0$ при $l \geq l_0$ и $m_0(0) = 0$,

$$m_1(0) = b_0(M_0 \cap \partial B) - 1, \quad m_l(0) = b_{l-1}(M_0 \cap \partial B), \quad l \geq 2. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим, что все достаточно малые отрицательные числа являются регулярными значениями функционала $f_1: Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$. В предположении противного существует последовательность $x_n \in Q \cap \partial B$ критических точек функционала f_1 , для которой $f_1(x_n) < 0$, $f_1(x_n) \rightarrow 0$, $0 \in \partial f_1(x_n) + N_{Q_1}(x_n)$. Нормальный конус $N_{Q_1}(x_n)$ есть сумма конусов $N_Q(x_n)$ и $N_B(x_n)$. Как и при доказательстве теоремы 3, будем считать, что функционал $f_0(x) = \|x\|^2$ непрерывно дифференцируем. Так как $B = \{x \in X, f_0(x) \leq 1\}$, то [14, § 2.4] $N_B(x_n) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda f'_0(x_n)$. Поэтому справедливо равенство

$$0 = x_n^* + \lambda_n f'_0(x_n) + y_n^*, \quad (21)$$

где $x_n^* \in \partial f(x_n)$, $\lambda_n \geq 0$, $y_n^* \in N_Q(x_n)$. Применяя (21) к элементу x_n , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x_n, x_n^* \rangle + \lambda_n \langle x_n, f'_0(x_n) \rangle + \langle x_n, y_n^* \rangle = \langle x_n, x_n^* \rangle + 2\lambda_n, \\ 2\lambda_n &\leq -\langle x_n, x_n^* \rangle \leq f^0(x_n, -x_n) = -pf(x_n). \end{aligned}$$

Так как $f(x_n) \rightarrow \infty$, $\lambda_n \geq 0$, то $\lambda_n \rightarrow 0$. В соединении с (21) это влечет равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{X^*}(0, \partial f(x_n) + N_Q(x_n)) = 0$, противоречащее невырожденности функционала f .

Таким образом, выполнены условия теоремы 4 при $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Поэтому $m_l(0) < \infty \forall l$ и $m_l(0) = 0$ при $l \geq l_0$.

Для доказательства равенств (20) заметим, что окрестность $V = M_0 \cap B$ точки 0 стягиваема, поэтому [16, гл. 4, § 3]

$$H_l(M_0, M_0 \setminus 0) \simeq \tilde{H}_{l-1}(V \setminus 0),$$

где $\tilde{H}_{l-1}(V \setminus 0)$ – приведенная гомологическая группа пространства $V \setminus 0$ [16, гл. 4, § 3]. Но $V \setminus 0$ гомотопически эквивалентно $M_0 \cap \partial B$, поскольку $M_0 \cap \partial B$ есть деформационный ретракт $V \setminus 0$. Следовательно, $H_{l-1}(V \setminus 0) \simeq \tilde{H}_{l-1}(M_0 \cap \partial B)$, что и приводит к равенствам (20).

Теорема доказана.

Комбинация (19), (20) влечет

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 5 эйлерова характеристика $\chi(M_0 \cap \partial B)$ конечна и $\text{ind}(0, \partial f) = 1 - \chi(M_0 \cap \partial B)$.

Для гладких однородных функций, определенных на конечномерном пространстве X , близкое к следствию утверждение анонсировано в [18]. Теорема 5 естественным образом обобщается на функционалы с однородной главной частью.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом. М.: ИЛ, 1947.
- [2] Скрышник И. В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. С. 131–254.
- [3] Скрышник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973.
- [4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
- [5] Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Изд-во “Магистр”, 1998.
- [6] Похожаев С. И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 66–73.
- [7] Browder F. E. Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. № 5. P. 999–1005.
- [8] Климов В. С. О топологических характеристиках негладких функционалов // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 117–134.
- [9] Климов В. С., Сенчакова Н. В. Об относительном вращении многозначных потенциальных векторных полей // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 10. С. 1393–1407.
- [10] Обен Ж. П., Эккланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [11] Борисович Ю. Г. Об относительном вращении компактных векторных полей в линейных пространствах // Тр. семинара по функц. анализу. Вып. 12. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1969. С. 3–27.
- [12] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
- [13] Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 11–46.
- [14] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [15] Климов В. С. Минимаксные критические значения негладких функционалов // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 3. С. 91–100.
- [16] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
- [17] Масси У. Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
- [18] Мухамадиев Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 5. С. 596–598.

Ярославский государственный университет

Поступило
10.07.2000