Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Замани, О градуированных дистрибутивных модулях, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 528–535

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:55:49

УДК 512.55

О градуированных дистрибутивных модулях

Н. Замани

Предложены описания градуированных дистрибутивных модулей над $\mathbb{Z}$ -градуированным коммутативным кольцом R с единицей.

Библиография: 15 названий.

Пусть R – $\mathbb{Z}$ -градуированное коммутативное кольцо с отличной от нуля единицей и M – $\mathbb{Z}$ -градуированный R -модуль. Будем говорить, что M является *градуированным дистрибутивным* модулем (*г.д. модулем*), если решетка его градуированных подмодулей дистрибутивна, т.е. если

$$(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$$

для всех градуированных подмодулей X , Y и Z модуля M (равносильное условие: $(X \cap Y) + Z = (X + Z) \cap (Y + Z)$ для всех градуированных подмодулей X , Y и Z модуля M). Понятие дистрибутивных модулей независимо ввели и изучили Дэвисон [1] и Стефенсон [2]. Структуре и описанию дистрибутивных модулей посвящены многие важные заслуживающие внимания исследования (см., например, [3]–[7]), однако, насколько известно автору, градуированная версия понятия дистрибутивных модулей изучена мало [8], [9].

В этой статье предложено несколько характеристик г.д. модулей. В частности, доказана следующая

ТЕОРЕМА А. *Следующие утверждения равносильны:*

- (i) M является г.д. R -модулем;
- (ii) любой $*$ замкнутый подмодуль M является $*$ неприводимым;
- (iii) для любых $i \in \mathbb{Z}$ и $x, y \in M_i$ и всякого $*$ максимального идеала $\mathfrak{m}$ градуированные подмодули $Rx(\mathfrak{m})$ и $Ry(\mathfrak{m})$ сравнимы по включению;
- (iv) для любого градуированного подмодуля N модуля M и любого $*$ максимального идеала $\mathfrak{m}$, содержащего $N :_R M$, модуль $*E_R(M/N(\mathfrak{m}))$ $*$ неразложим.

ТЕОРЕМА Б. *Для градуированного R -модуля M следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) M является г.д. модулем;
- (ii) для любого собственного градуированного подмодуля N модуля M разложение $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$ $*$ неприводимо.

Для доказательства теорем А и Б нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Начнем с обозначений и определений. Пусть $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ и $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$. Мы будем говорить, что элементы M_i *однородны* степени i и обозначать множество всех однородных элементов кольца R (соответственно модуля M) через $H(R)$ (соответственно $H(M)$). Для данного замкнутого относительно умножения множества $S \subseteq H(R)$ мы можем превратить кольцо дробей $S^{-1}R$ в градуированное кольцо, полагая

$$(S^{-1}R)_i = \{r/s : r \in H(R), s \in S, i = \deg(r) - \deg(s)\}$$

для каждого $i \in \mathbb{Z}$, где $\deg(r)$ – степень однородного элемента r . Напомним, что модуль $S^{-1}M$ можно представить как $S^{-1}R \otimes_R M$, т.е. в виде градуированного $S^{-1}R$ -модуля. Если $\mathfrak{p}$ является градуированным простым идеалом и $S = H(R) \setminus \mathfrak{p}$, то градуированное кольцо $S^{-1}R$ (соответственно градуированный $S^{-1}R$ -модуль $S^{-1}M$) обозначается через $R_{(\mathfrak{p})}$ (соответственно через $M_{(\mathfrak{p})}$) и называется *однородной локализацией* кольца R (соответственно модуля M) по $\mathfrak{p}$. Градуированный идеал $\mathfrak{m}$ называется **максимальным*, если он максимален в решетке всех градуированных идеалов кольца R . Мы говорим, что кольцо R **квазилокально*, если оно имеет единственный **максимальный* идеал. Пусть N – градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R . Тогда объединение $N(\mathfrak{p}) = \bigcup_{s \in H(R) \setminus \mathfrak{p}} (N :_M s)$ является градуированным подмодулем модуля M , содержащим N .

Очевидно, $N(\mathfrak{p}) = N_{(\mathfrak{p})} \cap M$ и, если модуль M конечно порожден, то из включения $N :_R M \subseteq \mathfrak{p}$ вытекает, что $N(\mathfrak{p}) :_R M \subseteq \mathfrak{p}$. Кроме того, если идеал $\mathfrak{p}$ минимален над $N :_R M$, то $N(\mathfrak{p})$ является $\mathfrak{p}$ -первичным подмодулем модуля M . Положим

$$Z(N) = \{a \in R : N \subset (N :_M a)\}.$$

Тогда множество $R \setminus Z(N)$ замкнуто относительно умножения в кольце R . Будем говорить, что N является **замкнутым подмодулем* модуля M , если само множество $Z(N)$ является некоторым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца R . В таком случае $\mathfrak{p}$ является простым идеалом кольца R и мы говорим, что подмодуль N **замкнут*. На самом деле $Z(N)$ является в этом случае градуированным простым идеалом. Действительно, пусть $a = a_m + \dots + a_n \in Z(N)$ – разложение элемента a в сумму однородных элементов a_i . Тогда существует $x \in H(M) \setminus N$, для которого $a_m x + \dots + a_n x = ax \in N$. Поскольку подмодуль N градуирован, отсюда вытекает, что $a_i x \in N$ для всех $i = m, \dots, n$. Следовательно, $N \subset N :_M a_i$ для любого $i = m, \dots, n$, т.е. каждая однородная составляющая элемента a принадлежит идеалу $Z(N)$.

Наконец, мы говорим, что N является **неприводимым* подмодулем модуля M , если из того, что $N = N_1 \cap N_2$ для градуированных подмодулей N_1 и N_2 модуля M , вытекает, что либо $N = N_1$, либо $N = N_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть N – **неприводимый подмодуль модуля M* . Тогда N является **замкнутым подмодулем модуля M* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r, s \in Z(N)$. Тогда $N \subset (N :_M r)$ и $N \subset (N :_M s)$. По предположению $N \subset (N :_M r) \cap (N :_M s) = (N :_M r - s)$, а это означает, что $r - s \in Z(N)$. Требуемое утверждение вытекает из того, что произведение элемента кольца R и элемента множества $Z(N)$ всегда принадлежит $Z(N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Любой градуированный подмодуль модуля M является пересечением *замкнутых подмодулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль M *неприводим и, следовательно, *замкнут; значит, пересечение всех *замкнутых подмодулей M , содержащих N , непусто. Следовательно, для того чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно показать, что для каждого $m \in H(M) \setminus N$ существует *замкнутый подмодуль C модуля M , который содержит N и не содержит m . Пусть

$$\Sigma = \{L \supseteq N : L \text{ является градуированным подмодулем } M \text{ и не содержит } m\}.$$

Тогда семейство Σ непусто, и по лемме Цорна оно имеет максимальный по включению элемент; обозначим этот элемент через C . Покажем, что C является *замкнутым подмодулем M . Пусть $r, s \in Z(C)$. Тогда существуют $x, y \in H(M) \setminus C$, для которых $rx, sy \in C$. Из максимальной C вытекает, что $m \in C + Rx$ и $m \in C + Ry$. Следовательно, $rm \in rC + Rrx \subseteq C$ и $sm \in sC + Rsy \subseteq C$. Поэтому $(r - s)m \in C$ и $r - s \in Z(C)$. Таким образом, C является *замкнутым подмодулем M .

ЛЕММА 3. *Следующие утверждения равносильны:*

- (i) M является г.д. R -модулем;
- (ii) $(Rx :_R y) + (Ry :_R x) = R$ для всех $x, y \in H(M)$ таких, что $\deg(x) = \deg(y)$.
Если при этом кольцо R *квазилокально, то каждое из утверждений (i) и (ii) эквивалентно следующим утверждениям:
- (iii) множество всех градуированных подмодулей модуля M линейно упорядочено по включению;
- (iv) множество всех градуированных циклических подмодулей модуля M линейно упорядочено по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $x, y \in H(M)$ таковы, что $\deg(x) = \deg(y)$. Тогда $x \in Rx \cap (Ry + R(x - y))$. По условию $x \in Rx \cap Ry + Rx \cap R(x - y)$. Значит, существуют $r, s \in R_0$, для которых $x = ry + s(x - y)$. Следовательно, $sy \in Rx$. С другой стороны, $(1 - s)x = (r - s)y$, откуда вытекает, что $1 - s \in (Ry :_R x)$. Таким образом,

$$1 = s + (1 - s) \in (Rx :_R y) + (Ry :_R x),$$

что и требовалось.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть X, Y и Z – градуированные подмодули модуля M , и пусть $x \in X \cap (Y + Z)$ – однородный элемент. Тогда существуют однородные элементы $y \in Y$ и $z \in Z$ такие, что $x = y + z$ и $\deg(x) = \deg(y) = \deg(z)$. По условию $(Rx :_R y) + (Ry :_R x) = R$. Значит, существует $r \in R$, для которого $r \in (Rx :_R y)$ и $1 - r \in (Ry :_R x)$. Следовательно, $x = (1 - r)x + ry + rz = sy + rz$ для некоторого $s \in R$. Это означает, что

$$x \in (Rx \cap Ry) + (Rx \cap Rz) \subseteq (X \cap Y) + (X \cap Z).$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение, потому что обратное включение всегда имеет место.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) очевидно.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что (iii) не выполнено. Тогда существуют градуированные подмодули X и Y модуля M , для которых $X \not\subseteq Y$ и $Y \not\subseteq X$. Значит, найдутся $x \in H(X) \setminus Y$ и $y \in H(Y) \setminus X$. Следовательно, $Rx \not\subseteq Ry$ и $Ry \not\subseteq Rx$, а это противоречит (iv).

Если кольцо R $*$ квазилокально, то утверждения (i) и (iv) эквивалентны по лемме 5.22 из [8].

ЛЕММА 4 [8; лемма 5.24]. *Модуль M является г.д. R -модулем тогда и только тогда, когда $M_{(\mathfrak{p})}$ является г.д. $R_{(\mathfrak{p})}$ -модулем для каждого градуированного простого ($*$ максимального) идеала $\mathfrak{p}$ кольца R .*

ЛЕММА 5. *Следующие условия равносильны:*

- (i) M является г.д. R -модулем;
- (ii) для любого собственного градуированного подмодуля N модуля M и любого градуированного простого ($*$ максимального) идеала $\mathfrak{p}$ кольца R , содержащего $N :_R M$, $N_{(\mathfrak{p})}$ является $*$ неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{p})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть N – собственный градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R , содержащий $N :_R M$. Предположим, что $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. (Заметим, что любой градуированный подмодуль модуля $M_{(\mathfrak{p})}$ можно представить как однородную локализацию некоторого градуированного подмодуля модуля M по $\mathfrak{p}$.) По лемме 4 $M_{(\mathfrak{p})}$ является г.д. модулем над $*$ квазилокальным кольцом $R_{(\mathfrak{p})}$. Значит, по лемме 3, либо $L_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})}$, либо $K_{(\mathfrak{p})} \subseteq L_{(\mathfrak{p})}$, т.е. либо $N_{(\mathfrak{p})} = L_{(\mathfrak{p})}$, либо $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})}$. Следовательно, модуль $N_{(\mathfrak{p})}$ неприводим.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ввиду лемм 3 и 4 достаточно доказать, что для каждого градуированного простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R любые два градуированных подмодуля модуля $M_{(\mathfrak{p})}$ сравнимы. Итак, пусть $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R , и пусть $K_{(\mathfrak{p})}$ и $L_{(\mathfrak{p})}$ – собственные градуированные подмодули модуля $M_{(\mathfrak{p})}$. Можно считать, что $(M :_R K \cap L) \subseteq \mathfrak{p}$. По предположению $K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})} = (K \cap L)_{(\mathfrak{p})}$ является $*$ неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{p})}$, так что либо $K_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$, либо $L_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. Следовательно, либо $K_{(\mathfrak{p})} \subseteq L_{(\mathfrak{p})}$, либо $L_{(\mathfrak{p})} \subseteq K_{(\mathfrak{p})}$, откуда вытекает требуемое утверждение.

ЛЕММА 6. *Пусть N – градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой ($*$ максимальный) идеал кольца R . Тогда $N_{(\mathfrak{p})}$ является $*$ неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{p})}$ в том и только том случае, если $N(\mathfrak{p})$ является $*$ неприводимым подмодулем модуля M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Пусть $N(\mathfrak{p}) = K \cap L$ для некоторых градуированных подмодулей K и L модуля M . Из однородной локализации по $\mathfrak{p}$ и равенства $(N(\mathfrak{p}))_{(\mathfrak{p})} = N_{(\mathfrak{p})}$ вытекает, что $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. Значит, по предположению либо $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})}$, либо $N_{(\mathfrak{p})} = L_{(\mathfrak{p})}$, откуда следует, что либо $N(\mathfrak{p}) = K$, либо $N(\mathfrak{p}) = L$.

($\Leftarrow$) Пусть K и L – градуированные подмодули модуля M , для которых $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})} \cap L_{(\mathfrak{p})}$. Тогда

$$N(\mathfrak{p}) = N_{(\mathfrak{p})} \cap M = (K_{(\mathfrak{p})} \cap M) \cap (L_{(\mathfrak{p})} \cap M) = K(\mathfrak{p}) \cap L(\mathfrak{p}).$$

По предположению либо $N(\mathfrak{p}) = L(\mathfrak{p})$, либо $N(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{p})$, и из однородной локализации по $\mathfrak{p}$ следует, что либо $N_{(\mathfrak{p})} = K_{(\mathfrak{p})}$, либо $N_{(\mathfrak{p})} = L_{(\mathfrak{p})}$.

Из сделанных выше наблюдений вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 7. Следующие утверждения равносильны:

- (a) M является г.д. R -модулем;
- (b) для всякого градуированного подмодуля N модуля M и любого градуированного простого (*максимального) идеала $\mathfrak{p}$ кольца R , содержащего $N :_R M$, $N(\mathfrak{p})$ является *неприводимым подмодулем модуля M .

ЛЕММА 8. Пусть N – конечно порожденный градуированный подмодуль модуля M и $\mathfrak{p}$ – градуированный простой идеал кольца R , содержащий $N :_R M$. Предположим, что $N_{(\mathfrak{p})} \neq 0$. Тогда $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$ является *замкнутым подмодулем модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Возьмем $r \in Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}))$. Существует $m \in H(M) \setminus (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$, для которого $rm \in (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$. Следовательно, $(\mathfrak{p}N :_R m) \subseteq \mathfrak{p}$ и найдется $t \in H(R) \setminus \mathfrak{p}$, для которого $rtm \in \mathfrak{p}N$. Значит, $rt \in \mathfrak{p}$, откуда $r \in \mathfrak{p}$. Таким образом, $Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем $r \in \mathfrak{p}$. Поскольку подмодуль N конечно порожден и $N_{(\mathfrak{p})} \neq 0$, из градуированной версии леммы Накаямы (см. [10; лемма I.7.5]) вытекает, что $(\mathfrak{p}N)_{(\mathfrak{p})} \neq N_{(\mathfrak{p})}$. Значит, $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \neq N(\mathfrak{p})$. В любом случае $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \subseteq N(\mathfrak{p})$ и $N(\mathfrak{p}) \subseteq (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) :_M \mathfrak{p}$, так что $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \subset (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) :_M \mathfrak{p}$. Отсюда вытекает существование элемента $x \in H(M) \setminus (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$, для которого $rx \in (\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p})$, т.е. $(\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) \subset ((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}) :_M r)$. Таким образом, $r \in Z((\mathfrak{p}N)(\mathfrak{p}))$, что и требовалось.

Следуя [11; с. 72], мы говорим, что простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца R является ассоциированным простым дивизором в смысле Круля модуля M , если для каждого элемента $t \in \mathfrak{p}$ существует элемент $x \in M$ такой, что $t \in 0 :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Пусть $K(M)$ (соответственно, $\text{mK}(M)$) обозначает множество всех ассоциированных простых дивизоров в смысле Круля модуля M (соответственно, множество всех максимальных элементов в $K(M)$). Поскольку M – градуированный R -модуль, каждый элемент $\mathfrak{p} \in K(M)$ градуирован; кроме того, для каждого $t \in \mathfrak{p}$ можно найти однородный элемент x такой, что $t \in 0 :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Чтобы убедиться в этом, возьмем $\mathfrak{p} \in K(M)$. Пусть $t_m + \dots + t_n = t \in \mathfrak{p}$ – разложение элемента t в сумму однородных элементов t_i степени i . По предположению существует элемент $x_u + \dots + x_v = x \in M$, для которого $tx = 0$ и $0 :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Таким образом, мы имеем уравнения $\sum_{i+j=s} t_i x_j = 0$ для $s = m + u, \dots, n + v$. Значит, $t_m x_u = 0$; по индукции получаем $t_m^i x_{u+i-1} = 0$ для всех $i \geq 1$. Следовательно, $t_m^l x = 0$ для достаточно больших l . Поскольку $\mathfrak{p}$ является простым идеалом, $t_m \in \mathfrak{p}$. Повторяя эту процедуру, мы убеждаемся в том, что все однородные составляющие элемента t принадлежат $\mathfrak{p}$. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что $\bigcap_{i=u}^{i=v} (0 :_R x_i) \subseteq \mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{p}$ – простой идеал, найдется j , для которого $(0 :_R x_j) \subseteq \mathfrak{p}$. Это доказывает лемму, потому что $t \in (0 :_R x_i)$ для всех $i = u, \dots, v$.

Простой идеал $\mathfrak{p}$ называется слабым ассоциированным простым дивизором в смысле Бурбаки модуля M , если он является минимальным простым дивизором $0 :_R x$ для некоторого $x \in M$. Мы будем обозначать семейство всех слабых ассоциированных простых дивизоров в смысле Бурбаки модуля M через $\text{wB}(M)$. Как известно (см., например, [12; лемма 2.15]), множество $\text{wB}(M)$ непусто. То, что множество $K(M)$ непусто и каждый элемент семейства $\text{wB}(M)$ градуирован, вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 [13; теорема 1]. Во введенных выше обозначениях $wB(M) \subseteq K(M)$.

Пусть ${}^*\text{Сpec}(R)$ – множество всех градуированных простых идеалов кольца R . Заметим, что для всякого собственного подмодуля N модуля M $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in {}^*\text{Сpec}(R)} N(\mathfrak{p})$. Члены $N(\mathfrak{p})$ этого представления, вообще говоря, не обязаны быть * замкнутыми. Однако для градуированных простых идеалов из семейства $\text{mK}(M/N)$ все компоненты выписанного выше представления подмодуля N * замкнуты. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10. Пусть N – собственный градуированный подмодуль модуля M . Тогда $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$ и все компоненты $N(\mathfrak{p})$ являются $\mathfrak{p}$ - * замкнутыми подмодулями для различных несравнимых градуированных простых идеалов $Z(N(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$. Чтобы убедиться в этом, возьмем $x \in H(M) \setminus N$. Пусть $\mathfrak{q}$ – минимальный простой дивизор $N :_R x$. Тогда существует $\mathfrak{p} \in \text{mK}(M/N)$, для которого $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно, $N :_R x \subseteq \mathfrak{p}$, так что x не является элементом подмодуля $N(\mathfrak{p})$. Значит, x не принадлежит пересечению $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{mK}(M/N)} N(\mathfrak{p})$, что и требовалось.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно проверить, что если $\mathfrak{p} \in K(M/N)$, то подмодуль $N(\mathfrak{p})$ $\mathfrak{p}$ - * замкнут, т.е. $Z(N(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Предположим, что $r = r_m + \dots + r_n$ не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$. Тогда существует $m \leq j \leq n$ такое, что r_j не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$. Покажем, что $(N(\mathfrak{p}) :_M r) = N(\mathfrak{p})$. Возьмем $x \in H(M)$, для которого $rx \in N(\mathfrak{p})$. Поскольку $N(\mathfrak{p})$ является градуированным подмодулем модуля M , все однородные составляющие элемента rx принадлежат $N(\mathfrak{p})$; в частности, $r_j x \in N(\mathfrak{p})$. Отсюда вытекает существование $s \in H(R) \setminus \mathfrak{p}$, для которого $sr_j x \in N$; следовательно, $x \in N(\mathfrak{p})$. Таким образом, $Z(N(\mathfrak{p})) \subseteq \mathfrak{p}$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем $r \in \mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{p} \in K(M/N)$, найдется $x \in M \setminus N(\mathfrak{p})$, для которого $r \in N(\mathfrak{p}) :_R x \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно, $N(\mathfrak{p}) \subset N(\mathfrak{p}) :_M r$, а значит, $r \in Z(N(\mathfrak{p}))$.

В категории градуированных R -модулей объектами являются градуированные R -модули. Морфизм $f: M \rightarrow M'$ в этой категории – это гомоморфизм R -модулей такой, что $f(M_i) \subseteq M'_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Градуированный R -модуль E называется * инъективным, если он является инъективным объектом в категории градуированных R -модулей. Расширение $N \subset M$ градуированных R -модулей называется * существенным расширением, если для любого градуированного подмодуля $0 \neq U \subset M$ имеем $U \cap N \neq 0$. По аналогии с определением в неградуированном случае модуль E называется * инъективной оболочкой модуля N , если он является * инъективным * существенным расширением модуля N . Ввиду [14; 3.6.2] любой градуированный R -модуль X имеет единственную (с точностью до изоморфизма) * инъективную оболочку. Обозначим * инъективную оболочку модуля X через ${}^*E(X)$. Градуированный R -модуль называется * неразложимым, если он ненулевой и не разлагается в прямую сумму двух собственных градуированных подмодулей. Используя те же рассуждения, что и в неградуированном случае, легко показать, что градуированный подмодуль U модуля M * неприводим, если и только если оболочка ${}^*E(M/U)$ * неразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть N – *замкнутый собственный подмодуль модуля M , для которого $Z(N) = \mathfrak{p}$. Тогда $N :_R M \subseteq \mathfrak{p}$ и $N(\mathfrak{p}) = N$. Требуемое утверждение вытекает из следствия 7.

(ii) $\Rightarrow$ (i). По лемме 4 достаточно показать, что для любого *максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R модуль $M_{(\mathfrak{m})}$ является г.д. модулем над *квазилокальным кольцом $R_{(\mathfrak{m})}$. Согласно лемме 3 для этой цели достаточно показать, что для любых $x, y \in H(M)$ либо $\langle x/1 \rangle \subseteq \langle y/1 \rangle$, либо $\langle y/1 \rangle \subseteq \langle x/1 \rangle$. Пусть $N = \langle x, y \rangle$ и $N_{(\mathfrak{m})} \neq 0$. (Если $N_{(\mathfrak{m})} = 0$, то $x/1 = y/1 = 0$, и доказывать нечего.) По лемме 8 $(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$ является *замкнутым подмодулем модуля M ; по предположению он *неприводим. Значит, по лемме 6 $(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{m})}$. Но $R_{(\mathfrak{m})}/(\mathfrak{m})R_{(\mathfrak{m})}$ – либо поле, либо кольцо вида $k[t, t^{-1}]$, где t – трансцендентный над k однородный элемент положительной степени (см. [14; лемма 1.5.7]). Согласно [15; лемма 1.1.1] любой градуированный модуль над $k[t, t^{-1}]$ является свободным градуированным модулем; значит, $N_{(\mathfrak{m})}/\mathfrak{m}N_{(\mathfrak{m})}$ – либо конечномерное векторное пространство над полем $R_{(\mathfrak{m})}/\mathfrak{m}R_{(\mathfrak{m})}$, либо свободный градуированный модуль над $R_{(\mathfrak{m})}/\mathfrak{m}R_{(\mathfrak{m})}$ ранга 1. В любом случае либо $N_{(\mathfrak{m})} = \langle x/1 \rangle + (\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$, либо $N_{(\mathfrak{m})} = \langle y/1 \rangle + (\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$. Следовательно, по градуированной версии леммы Накаямы либо $N_{(\mathfrak{m})} = \langle x/1 \rangle$, либо $N_{(\mathfrak{m})} = \langle y/1 \rangle$, а значит, либо $\langle x/1 \rangle \subseteq \langle y/1 \rangle$, либо $\langle y/1 \rangle \subseteq \langle x/1 \rangle$, что и требовалось.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Предположим противное; тогда существует *максимальный идеал $\mathfrak{m}$ такой, что $Rx(\mathfrak{m}) \not\subseteq Ry(\mathfrak{m})$ и $Ry(\mathfrak{m}) \not\subseteq Rx(\mathfrak{m})$ для некоторых $i \in \mathbb{Z}$ и $x, y \in M_i$. Следовательно, x не является элементом $Ry(\mathfrak{m})$, а y не является элементом $Rx(\mathfrak{m})$. Из предположения и леммы 3 вытекает существование элемента $r \in R$, для которого $rx \in Ry$ и $(1-r)y \in Rx$. Поскольку $\mathfrak{m}$ является *максимальным идеалом, по крайней мере один из элементов r и $1-r$ не содержится в $\mathfrak{m}$. Таким образом, по крайней мере одна из однородных составляющих элемента r или $1-r$ не содержится в $\mathfrak{m}$. В первом случае $x \in Ry(\mathfrak{m})$, а во втором – $y \in Rx(\mathfrak{m})$; в любом случае получаем противоречие.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что (i) не выполнено. Тогда по лемме 3 существует *максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца R такой, что $(Ry :_R x) + (Rx :_R y) \subseteq \mathfrak{m}$ для некоторых $i \in \mathbb{Z}$ и $x, y \in M_i$. Имеем $y \in Ry(\mathfrak{m}) \setminus Rx(\mathfrak{m})$ и $x \in Rx(\mathfrak{m}) \setminus Ry(\mathfrak{m})$ в противоречие с (iii).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv). Требуемая эквивалентность вытекает из сказанного в абзаце перед доказательством теоремы и следствия 7.

Предыдущая теорема утверждает, что для любого градуированного подмодуля N г.д. модуля M представление N в виде пересечения *замкнутых модулей из теоремы А является разложением N на *неприводимые компоненты. Теорема В показывает, что это условие достаточно для того, чтобы модуль M был г.д. модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из теорем 10 и А.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Согласно леммам 3 и 4 достаточно показать, что для каждого *максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R градуированные циклические подмодули модуля $M_{(\mathfrak{m})}$ вполне упорядочены. Возьмем $x, y \in H(M)$. Положим $N = \langle x, y \rangle$. По предположению $\mathfrak{m}N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{mK}(M/\mathfrak{m}N)} (\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{p})}$ является *неприводимым разложением подмодуля

$\mathfrak{m}N$. Покажем, что $\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}K(M/\mathfrak{m}N)$. Если это не так, то $(\mathfrak{m}N)(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p})$ для всех $\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}K(M/\mathfrak{m}N)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{m}N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}K(M/\mathfrak{m}N)} N(\mathfrak{p}) \supseteq N$. Но из того, что подмодуль N конечно порожден и градуирован вытекает, что $N \not\subseteq \mathfrak{m}N$. Значит, $\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}K(M/\mathfrak{m}N)$, и $(\mathfrak{m}N)(\mathfrak{m})$ — *неприводимый подмодуль модуля M . По лемме 6 $(\mathfrak{m}N)_{(\mathfrak{m})}$ является *неприводимым подмодулем модуля $M_{(\mathfrak{m})}$. Теперь утверждение теоремы доказывается так же, как импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) в теореме A.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. М. К. Davison, “Distributive homomorphism of rings and modules”, *J. Reine Angew. Math.*, **270** (1974), 28–34.
- [2] W. Stephenson, “Modules whose lattice of submodules is distributive”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **28** (1974), 291–310.
- [3] V. Erdoğdu, “Distributive modules”, *Canad. Math. Bull.*, **30**:2 (1987), 248–254.
- [4] V. Erdoğdu, “The distributive hull of a ring”, *J. Algebra*, **132**:2 (1990), 263–269.
- [5] V. Erdoğdu, “Cyclically decomposable distributive modules”, *Comm. Algebra*, **25**:5 (1997), 1635–1639.
- [6] A. A. Tuganbaev, *Semidistributive Modules and Rings*, Math. Appl., **449**, Kluwer Academic, Dordrecht–Boston–London, 1998.
- [7] A. A. Tuganbaev, *Distributive Modules and Related Topics*, Algebra, Logic and Appl., **12**, Gordon & Breach, Amsterdam, 1999.
- [8] J. Escoriza, B. Torrecillas, “Multiplication objects in commutative Grothendieck categories”, *Comm. Algebra*, **26**:6 (1998), 1867–1883.
- [9] R. Naghipour, N. Zamani, “Graded distributive modules”, *Southeast Asian Bull. Math.*, **29**:6 (2005), 1095–1099.
- [10] C. Nastasescu, F. van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland Math. Library, **28**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1982.
- [11] D. H. Underwood, “On some uniqueness questions in primary representations of ideals”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 69–94.
- [12] M. D. Larsen, P. J. McCarthy, *Multiplicative Theory of Ideals*, Pure Appl. Math., **43**, Academic Press, New York–London, 1971.
- [13] R. A. Kuntz, “Associated prime divisors in the sense of Krull”, *Canad. J. Math.*, **24** (1972), 808–818.
- [14] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Stud. Adv. Math., **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [15] S. Goto, K. Watanabe, “On graded rings. I”, *J. Math. Soc. Japan*, **30**:2 (1978), 179–213.

Н. Замани

Ардабильский университет им. Мохагега, Иран

E-mail: naserzak@yahoo.com

Поступило

03.01.2007