Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, И. М. Шитова, О хроматическом числе евклидова пространства и о проблеме Борсука, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 636–639

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:48:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О хроматическом числе евклидова пространства и о проблеме Борсука

А. М. Райгородский, И. М. Шитова

1. Введение и формулировка результата. Данная работа посвящена двум задачам: задаче о хроматическом числе метрического пространства, восходящей к Нелсону, Эрдешу и Хадвигеру, и задаче Борсука о разбиении ограниченного множества положительного диаметра на части меньшего диаметра.

Хроматическим числом $\chi(X, \rho, A)$ метрического пространства X с метрикой ρ для множества запрещенных расстояний A называется минимальное число цветов, в которые можно так раскрасить X , что никакие две точки одного цвета не будут находиться на расстоянии в метрике ρ , принадлежащем A . В дальнейшем мы будем рассматривать случай $(X, \rho) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$, где $|\vec{x} - \vec{y}|_2$ — стандартная евклидова метрика.

Числом Борсука $f(n)$ называется минимальное число частей, на которые можно так разбить произвольное ограниченное множество положительного диаметра, чтобы диаметр каждой части был меньше диаметра исходного множества.

Первая задача возникла на рубеже 40-50-х годов XX века, вторая в 30-е годы. За прошедшее время как для хроматического числа, так и для числа Борсука были получены разнообразные результаты [1], [2].

Нас будут интересовать асимптотические нижние оценки хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{1\})$ и числа Борсука при стремлении n к бесконечности. На сегодняшний день известно, что (см. соответственно [3], [4] и [2], [5])

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{1\}) \leq (3 + o(1))^n,$$

$$(1.225 \dots + o(1))^{\sqrt{n}} \leq f(n) \leq (1.224 \dots + o(1))^n.$$

Для формулировки последующих результатов введем несколько определений. Пусть $\xi_1 = 1.239 \dots$ — константа, фигурирующая в нижней оценке хроматического числа, $\xi_2 = 1.225 \dots$ — константа в нижней оценке числа Борсука. Пусть также величины $\tilde{\chi}(n)$ и $\tilde{f}(n)$ определяются из равенств

$$\chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{1\}) = (\tilde{\chi}(n) + o(1))^n \quad \text{и} \quad f(n) = (\tilde{f}(n) + o(1))^{\sqrt{n}}$$

соответственно (вообще говоря, $\tilde{\chi}$ и $\tilde{f}$ определены с точностью до $o(1)$). Если для $\tilde{\chi}(n)$ здесь известно, что эта величина заключена в постоянных пределах $\xi_1 + o(1) \leq \tilde{\chi}(n) \leq 3 + o(1)$, то в случае числа Борсука аналогичное соотношение не установлено, $\tilde{f}(n)$ может быть неограниченно растущей функцией. В силу приведенных оценок хроматического числа и числа Борсука выполнена оценка

$$\tilde{f}(n) + \tilde{\chi}(n) \geq \xi_1 + \xi_2 + o(1) = 2.464 \dots + o(1).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), гранта Президента РФ (грант № МД-4235.2006.1), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1312.2006.1), ИНТАС (грант № 03-51-5070) и фонда “Династия”.

В статье [6] Райгородский показал, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\chi}(n) + \tilde{f}(n)) \geq 2.464 \dots + 0.004 + o(1).$$

Нам удалось улучшить этот результат.

ТЕОРЕМА. Для каждого натурального n либо $\tilde{\chi}(n) \geq \xi_1 + \delta$, либо $\tilde{f}(d) \geq \xi_2 + \delta$, где $d = n(n+1)/2$, $\delta = 0.017$.

СЛЕДСТВИЕ. Выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\chi}(n) + \tilde{f}(n)) \geq 2.464 \dots + \delta + o(1), \quad \delta = 0.017.$$

2. Схема доказательства теоремы. Рассмотрим граф $G = (V, E)$, в котором

$$V = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\{i : x_i = j\}| = v_j, i = 1, \dots, n, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\},$$

$$E = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \vec{x} \cdot \vec{y} = S - p\} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : |\vec{x} - \vec{y}|_2 = \sqrt{2p}\},$$

S – максимальное скалярное произведение векторов из V , s – минимальное, p – наименьшее простое число такое, что $S - s < 3p$. Каждая из величин v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 полагается имеющей порядок размерности, т.е. имеющей вид $v_j \sim \tilde{v}_j \cdot n$, $\tilde{v}_j \in (0, 1)$, причем $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = n$. Значения $\tilde{v}_j$ мы выберем позднее. Пусть, кроме того, фиксировано некоторое число $\rho > 1$, значение которого мы также выберем позднее.

Рассмотрим $\alpha(G)$ – число независимости графа G [7]. Очевидно, возможны два случая:

- 1) $\alpha(G) < \rho$;
- 2) $\alpha(G) \geq \rho$.

В первом случае для хроматического числа [7] $\chi(G)$ графа G выполнена оценка $\chi(G) \geq |V|/\rho$, из которой непосредственно следует неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{1\}) = \chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{\sqrt{2p}\}) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\rho}.$$

Рассмотрим теперь второй случай. Условие $\alpha(G) \geq \rho$ соответствует существованию такого множества $V_1 \subset V$, что $|V_1| \geq \rho$ и в V_1 нет пары векторов, скалярное произведение которых равно $S - p$.

Возьмем граф $G_1 = (V_1, E_1)$, в котором $E_1 = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \vec{x} \cdot \vec{y} = S - 2p\}$.

ЛЕММА. Имеет место оценка

$$\alpha(G_1) \leq \sum_{(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) \in A} C_n^{s_1} C_{n-s_1}^{s_2} C_{n-s_1-s_2}^{s_3} C_{n-s_1-s_2-s_3}^{s_4}$$

$$= \sum_{(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) \in A} \frac{n!}{s_0! s_1! s_2! s_3! s_4!} := D,$$

где множество A задается системой

$$\begin{cases} s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0, \\ s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = n, \\ s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 \leq p - 1. \end{cases}$$

Доказательство леммы получается путем стандартного применения линейно-алгебраического метода в комбинаторике (см. [6], [8], [9]).

Осуществим так называемый “двойственный” переход. От семейства V_1 перейдем к семейству V_1^* следующим образом: поставим в соответствие каждому вектору $\vec{x}$ из V_1 вектор

$$\vec{x} * \vec{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

где $x_{ij} = (x_i - \lambda_0)(x_j - \lambda_0)$, число λ_0 является корнем уравнения

$$n\lambda^2 - 2(v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4)\lambda + (S - 2p) = 0$$

в предположении, что действительный корень существует. Размерность подпространства пространства $\mathbb{R}^{n^2}$, в котором лежит V_1^* , не превосходит $d = n(n+1)/2$. Соответствие между V_1 и V_1^* биективно.

Рассмотрим скалярное произведение двух произвольных векторов $\vec{x} * \vec{x}$ и $\vec{y} * \vec{y}$ из V_1^* :

$$\begin{aligned} \vec{x} * \vec{x} \cdot \vec{y} * \vec{y} &= \sum_{i,j} (x_i - \lambda_0)(x_j - \lambda_0)(y_i - \lambda_0)(y_j - \lambda_0) \\ &= \sum_{i,j} (x_i - \lambda_0)(y_i - \lambda_0)(x_j - \lambda_0)(y_j - \lambda_0) \\ &= \left(\sum_i (x_i - \lambda_0)(y_i - \lambda_0) \right)^2 = (x \cdot y - 2\lambda_0(v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4) + n\lambda_0^2)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, максимальное расстояние между векторами из V_1^* достигается в том и только том случае, когда скалярное произведение их прообразов равно $2\lambda_0(v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4) - n\lambda_0^2$, т.е. когда согласно определению λ_0 оно равно $S - 2p$.

Далее, при разбиении V_1^* на $f(d)$ частей по принципу Дирихле всегда найдется часть, содержащая по меньшей мере $|V_1^*|/f(d) \geq \rho/f(d)$ векторов.

Если предположить, что $\rho/f(d) > D$, то по лемме это будет означать, что в прообразе одной из частей разбиения нашлись два вектора, скалярное произведение которых равно $S - 2p$, но тогда диаметр этой части равен диаметру V_1^* , что противоречит определению числа $f(d)$. Значит, $\rho/f(d) \leq D$, отсюда $f(d) \geq \rho/D$.

Таким образом, мы получили следующий результат: для каждого n гарантированно либо

$$\chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{1\}) = \chi(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2, \{\sqrt{2p}\}) \geq \frac{|V|}{\rho},$$

либо

$$f(d) \geq \frac{\rho}{D}.$$

Перейдем от рассматриваемых величин $\chi, f, \rho, D, |V|$ к величинам $\tilde{\chi}, \tilde{f}, \tilde{\rho}, \tilde{D}, \tilde{V}$, где $\tilde{\chi}$ и $\tilde{f}$ определены выше, $\rho = \tilde{\rho}^n$, $D = (\tilde{D} + o(1))^n$, $|V| = (\tilde{V} + o(1))^n$, $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4)$, $\tilde{D} = \tilde{D}(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4)$. При любых фиксированных $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4$ имеем $\tilde{V} = \text{const} > 1$, $\tilde{D} = \text{const} > 1$. К тому же, разумно предположить, что для данных $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4$ выполнено $1 < \tilde{D} < \tilde{\rho} < \tilde{V}$, $\tilde{\rho} = \text{const}$.

Тогда в новых обозначениях имеем для каждого n либо

$$\tilde{\chi}(n) \geq \frac{\tilde{V}}{\tilde{\rho}} + o(1),$$

либо

$$\tilde{f}(d) \geq \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{D}} \right)^{\sqrt{2}} + o(1).$$

Будем стремиться к тому, чтобы в обоих случаях улучшения по сравнению с известными константами ξ_1 и ξ_2 были одинаковыми, т.е. чтобы

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{\rho}} - \xi_1 = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{D}} \right)^{\sqrt{2}} - \xi_2.$$

Положим $t = (\tilde{\rho}/\tilde{D})^{\sqrt{2}}$, тогда $\tilde{\rho} = \tilde{D}t^{\sqrt{2}/2}$, и уравнение можно привести к виду

$$\frac{\tilde{V}}{\tilde{D}t^{\sqrt{2}/2}} - \xi_1 = t - \xi_2$$

или

$$t^{1+\sqrt{2}/2} + (\xi_1 - \xi_2)t^{\sqrt{2}/2} - \frac{\tilde{V}}{\tilde{D}} = 0.$$

При известных ξ_1 , ξ_2 и $\xi = \tilde{V}/\tilde{D}$ значение t , а следовательно, и $\tilde{\rho}$, без труда находятся численно.

Пришло время определиться с параметрами $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4$. Положим их равными 0.033333, 0.320000, 0.513333, 0.126667, 0.006667 соответственно. Заметим, что соотношение $1 < \tilde{D} < \tilde{\rho} < \tilde{V}$ выполнено. Более того, параметры таковы, что уравнение $n\lambda^2 - 2(v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4)\lambda + S - 2p = 0$ имеет неотрицательный дискриминант, и двойственный переход возможен. Наконец, при этих значениях получается $\xi = \tilde{V}/\tilde{D} = 1.465\dots$ – константа, стоящая в основании наилучшей известной нижней асимптотической оценки хроматического числа графа $G_2 = (V, E_2)$, где $E_2 = \{(x, y) : x \cdot y \in \{S - p, S - 2p\}\}$ [10].

Подставим заданные значения параметров в уравнение на t . Теперь его можно решить численно с достаточно хорошей точностью. В левой части стоит монотонная функция, значит, найденный корень будет единственным, и именно он нам и нужен.

Получаем $t = 1.242\dots$ и $\delta = 0.017\dots$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Сойфер, *Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее*, Матем. просвещение, **8**, 2004. [2] А. М. Райгородский, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146. [3] А. М. Райгородский, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148. [4] D. G. Larman, C. A. Rogers, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24. [5] O. Schramm, *Mathematika*, **35**:2 (1988), 180–189. [6] А. М. Райгородский, *Матем. заметки*, **79**:6 (2006), 913–924. [7] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973. [8] L. Babai, P. Frankl, *Linear Algebra Methods in Combinatorics. Part 1*, The University of Chicago, 1992. [9] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007. [10] И. М. Шитова, *Докл. РАН*, **413**:2 (2007), 178–180.

А. М. Райгородский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: aragor@avangard.ru

Поступило
05.10.2007

И. М. Шитова

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: irshitova@yandex.ru