Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 673–680

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:05:48

УДК 517.9

Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах

М. С. Бичегкуев

Описан спектр линейных разностных и дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть X – комплексное банахово пространство, $LB(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Рассматривается весовая функция (вес) $\alpha: \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Символом $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ векторов из X , суммируемых с весом α

$$\|x\| = \|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

и ограниченных относительно α

$$\|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n \geq 0} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} < \infty, \quad p = \infty.$$

Если $\alpha \equiv 1$, то пространство $l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$ обозначается через $l^p(\mathbb{Z}_+, X)$, и через $l^p(\mathbb{Z}_+)$, если $\alpha \equiv 1$ и $X = \mathbb{C}$.

Всюду считается, что вес α удовлетворяет условию

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} < \infty. \quad (1)$$

В данной статье изучаются спектральные свойства операторов

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: l_\alpha^p \rightarrow l_\alpha^p &= l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X), \quad (\mathcal{K}x)(n) = \begin{cases} Bx(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \\ \mathcal{D} = I - \mathcal{K}, \quad (\mathcal{D}x)(n) &= x(n) - (\mathcal{K}x)(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X), \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00131).

© М. С. Бичегкуев, 2009

где оператор $B \in LB(X)$ и символ I обозначает тождественный оператор в любом из рассматриваемых банаховых пространств. Кроме того, получены приложения к исследованию дифференциальных операторов в весовых функциональных пространствах.

Основные результаты получены с использованием величины

$$\varkappa(\alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq 0} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+m)} \right)^{1/m}. \quad (2)$$

Отметим, что из условия (1) следует конечность величины $\varkappa(\alpha)$ и предел в (2) существует (см. следствие 1, п. 2).

Одним из основных результатов статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Спектры $\sigma(\mathcal{K})$, $\sigma(\mathcal{D})$ операторов $\mathcal{K}$, $\mathcal{D}$ имеют следующие представления:*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \varkappa(\alpha)r(B)\}, \quad (3)$$

$$\sigma(\mathcal{D}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq \varkappa(\alpha)r(B)\}, \quad (4)$$

где $r(B)$ – спектральный радиус оператора B . В частности, оператор $\mathcal{K}$ квазинильпотентен тогда и только тогда, когда выполнено условие $\varkappa(\alpha)r(B) = 0$.

Отметим, что оператор вида (т.е. $B = I$)

$$(\mathcal{D}x)(n) = \begin{cases} x(n) - x(n-1), & n \geq 1, \\ x(0), & n = 0, \end{cases} \quad (5)$$

и его степени в весовых пространствах последовательностей изучались в [1], [2]. При этом были получены труднопроверяемые условия принадлежности комплексного числа спектру оператора $\mathcal{D}$.

Теперь рассмотрим приложения сформулированных результатов к исследованию дифференциальных операторов в весовых функциональных пространствах. При этом будут рассматриваться операторы, которые задаются с помощью некоторого семейства эволюционных операторов.

Под *семейством эволюционных операторов* на банаховом пространстве X понимается сильно непрерывная функция

$$\mathcal{U} : \Delta_+ = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : s \leq t\} \rightarrow LB(X)$$

со свойствами

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ – тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $\tau \leq s \leq t$ из $\mathbb{R}_+$;
- 3) существуют постоянные $M \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp \gamma(t - s)$ для всех (t, s) из Δ_+ .

Последнее свойство эквивалентно условию

$$\sup_{\substack{(t,s) \in \Delta_+ \\ 0 \leq t-s \leq 1}} \|\mathcal{U}(t, s)\| < \infty.$$

Функцию $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ назовем *допустимым весом*, если (скалярное) семейство

$$\mathcal{U}_\alpha(t, s) = \alpha(s)/\alpha(t), \quad (t, s) \in \Delta_+, \quad \mathcal{U}_\alpha : \Delta_+ \rightarrow \mathbb{R} \approx LB(\mathbb{R}),$$

является семейством эволюционных операторов.

Из этого определения следует непрерывность допустимого веса α , а также оценка $\alpha(t) \leq M_1 \exp \gamma_1 t$, $t \geq 0$, для некоторых $M_1 > 0$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$. Из этих двух условий следует выполнение всех трех свойств эволюционного семейства операторов, но семейство $\mathcal{U}_\alpha(t, s) = \alpha(s)/\alpha(t)$, $(t, s) \in \Delta_+$, не обязательно непрерывно.

Для любой непрерывной функции $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ символом $L_\alpha^p = L_\alpha^p(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) функций $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, для которых конечна величина

$$\|x\| = \|x\|_{p, \alpha} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|x(\tau)\|}{\alpha(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad p = [1, \infty),$$

$$\|x\|_{\infty, \alpha} = \operatorname{vrai} \sup_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{\alpha(t)}, \quad p = \infty.$$
(6)

Через $C_{\alpha, b} = C_{\alpha, b}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, для которых конечна величина (6). Наконец, через $S_\alpha^p = S_\alpha^p(\cdot, X)$ обозначим банахово пространство (весовое пространство Степанова) измеримых функций, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S_\alpha^p} = \sup_{t \geq 0} \left(\int_t^{t+1} \left(\frac{\|x(\tau)\|}{\alpha(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

Далее символом $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}_+, X)$ будет обозначаться одно из пространств L_α^p , $C_{\alpha, b}$, S_α^p . Если $\alpha \equiv 1$, то соответствующие пространства будут обозначаться через $L^p = L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, $S^p(\mathbb{R}_+, X)$ и вместо $\mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}_+, X)$ будет использоваться символ $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

По семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow LB(X)$ определим линейный оператор $\mathcal{L}_\mathcal{U}: D(\mathcal{L}_\mathcal{U}) \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$ следующим образом. Функцию $x \in \mathcal{F}_\alpha$ отнесем к области определения $D(\mathcal{L}_\mathcal{U})$ оператора $\mathcal{L}_\mathcal{U}$, если существует функция $f \in \mathcal{F}_\alpha$ такая, что функция x представима в виде

$$x(t) = - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

При этом полагается $\mathcal{L}_\mathcal{U} x = f$. Это определение корректно, т.е. функция f единственна. Из (7) следует, что любая функция x из $D(\mathcal{L}_\mathcal{U})$ непрерывна и удовлетворяет условию $x(0) = 0$. Для невесовых функциональных пространств такое определение использовалось в статьях [3], [4].

Пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow LB(X)$ – сильно непрерывная полугруппа операторов класса C_0 (см. [5]) и A – ее инфинитезимальный оператор. Тогда семейство $\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$, $(t, s) \in \Delta_+$, является семейством эволюционных операторов и оно порождает определяемый выше оператор $\mathcal{L}_\mathcal{U}$, который для такого $\mathcal{U}$ будет далее обозначаться через $\mathcal{L}$ или через $-d/dt + A$ и называться дифференциальным оператором (с неограниченным операторным коэффициентом), определяемым начальным условием $x(0) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ – допустимый вес. Тогда спектр $\sigma(\mathcal{L})$ оператора

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$$

допускает представление

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \ln(\kappa(\alpha)r(T(1)))\},$$

если $\kappa(\alpha)r(T(1)) > 0$, и $\sigma(\mathcal{L}) = \emptyset$, если $\kappa(\alpha)r(T(1)) = 0$, где величина $\kappa(\alpha)$ определена формулой (2).

2. Доказательство теоремы 1. Основной подход к исследованию рассматриваемых разностных и дифференциальных операторов состоит в использовании преобразования подобия исследуемого оператора в оператор, действующий в “невесовом” пространстве, и последующего его изучения, основанного на применении ряда известных результатов [3], [4], [6]. Далее используется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два линейных оператора $\mathcal{A}_i: D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, действующие в комплексных банаховых пространствах $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый (т.е. инъективный и сюръективный одновременно) линейный ограниченный оператор $U: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ (оператор преобразования) со свойствами

$$\begin{aligned} 1) \quad & U(D(\mathcal{A}_1)) = D(\mathcal{A}_2); \\ 2) \quad & U\mathcal{A}_1x = \mathcal{A}_2Ux, \quad x \in D(\mathcal{A}_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Из равенств (8) следует, что

$$U(\mathcal{A}_1 - \lambda I) = (\mathcal{A}_2 - \lambda I)U, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поэтому непрерывная обратимость одного из операторов $\mathcal{A}_i - \lambda I$ влечет непрерывную обратимость второго, причем подобны их резольвенты

$$R(\lambda, \mathcal{A}_i) = (\mathcal{A}_i - \lambda_0 I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}_i) = \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_i), \quad i = 1, 2,$$

т.е. верны равенства

$$UR(\lambda, \mathcal{A}_1) = R(\lambda, \mathcal{A}_2)U, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{A}_2).$$

Из отмеченного следует

ЛЕММА 1. Подобные операторы $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, имеют одинаковый спектр, т.е. $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Рассмотрим разностные операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}$, действующие в весовых пространствах последовательностей $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Каждое из банаховых пространств l_α^p , $p \in [1, \infty]$, изометрически изоморфно соответствующему “невесовому” пространству $l^p = l^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, а изоморфизм пространств осуществляет оператор

$$U_\alpha: l^p \rightarrow l_\alpha^p, \quad (U_\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l^p.$$

Рассмотрим подобные операторам $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ операторы $U_\alpha^{-1}\mathcal{K}U_\alpha$, $U_\alpha^{-1}\mathcal{D}U_\alpha = I - U_\alpha^{-1}\mathcal{K}U_\alpha$ из алгебры $LB(l^p)$. Они определяются равенствами

$$\begin{aligned} (U_\alpha^{-1}\mathcal{K}U_\alpha x)(n) &= \begin{cases} w(n)Bx(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \\ (U_\alpha^{-1}\mathcal{D}U_\alpha x)(n) &= \begin{cases} x(n) - w(n)Bx(n-1), & n \geq 1, \\ x(0), & n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $w(n) = \alpha(n-1)/\alpha(n)$, $n \geq 1$, $w(0) = 1$, – ограниченная последовательность согласно условию (1). Учитывая, что эти операторы определяются с помощью последовательности w , далее они обозначаются соответственно через $\mathcal{K}_w$ и $\mathcal{D}_w$. Таким образом, в силу леммы 1 задача о вычислении спектра операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{D}$ сводится к описанию спектра операторов $\mathcal{K}_w$ и $\mathcal{D}_w$ соответственно, действующих в невесовых пространствах $l^p = l^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Однако, теперь эти операторы не являются операторами с “постоянными” коэффициентами.

ЛЕММА 2. *Спектральный радиус $r(\mathcal{K}_w)$ оператора $\mathcal{K}_w \in LB(l^p)$ совпадает с числом $\kappa(\alpha)r(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения оператора $\mathcal{K}_w$ следует, что его степени определяются равенствами

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_w^m x)(n) &= \begin{cases} w(n)w(n-1) \cdots w(n-m+1)B^m x(n-m), & n \geq m, \\ 0, & 0 \leq n < m, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} B^m x(n-m), & n \geq m, \\ 0, & 0 \leq n < m. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|\mathcal{K}_w^m\| = \sup_{n \geq m} \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \|B^m\| = \sup_{n \geq 0} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+m)} \|B^m\|$$

в любом из банаховых пространств l^p , $p \in [1, \infty]$, из формулы Берлинга–Гельфанда [5] для спектрального радиуса ограниченного оператора следует, что

$$\begin{aligned} r(\mathcal{K}_w) &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq 0} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+m)} \|B^m\| \right) \right)^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq 0} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+m)} \right)^{1/m} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \|B^m\| \right)^{1/m} = \kappa(\alpha)r(B). \end{aligned} \quad (9)$$

При этом существование предела в первом сомножителе обеспечивается существованием общего предела и предела $\lim_{m \rightarrow \infty} \|B^m\|^{1/m} = r(B)$. Лемма доказана.

Существование предела в первом сомножителе в (9) можно также вывести из формулы Берлинга–Гельфанда, примененной к оператору $\mathcal{K}_w$ при $B = I$. Таким образом, верно

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любой функции $\alpha: \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющей условию (1), существует*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq 0} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+m)} \right)^{1/m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Допустим, что существует комплексное число λ , содержащееся в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{K}_w)$ оператора $\mathcal{K}_w$ и $0 < |\lambda| < \kappa(\alpha)r(B)$. Тогда непрерывно обратим оператор $\lambda I - \mathcal{K}_w$ и, следовательно, непрерывно обратим оператор $I - (1/\lambda)\mathcal{K}_w$. Этот оператор определяется равенствами

$$\left(\left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right) x \right)(n) = \begin{cases} x(n) - \frac{w(n)}{\lambda} Bx(n-1), & n \geq 1, \\ x(0), & n = 0. \end{cases}$$

Он инъективен и потому обратный к нему имеет вид (непосредственная проверка)

$$\left(\left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right)^{-1} y \right)(n) = \sum_{m=0}^n \frac{\alpha(n-m)}{\lambda^m \alpha(n)} B^m y(n-m), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in l^p. \quad (10)$$

Для каждой последовательности $y_k \in l^p$, $k \in \mathbb{Z}_+$, вида $y_k(j) = 0$ при $j \neq k$ и $y_k(k) = x \in X$ имеет место равенство $\|y_k\| = \|x\|$ в любом из пространств l^p , $1 \leq p \leq \infty$. Поэтому из формулы (10) следует, что для любых $x \in X$ с $\|x\| \leq 1$ и $k, n \in \mathbb{Z}_+$ с $k \leq n$ имеют место оценки

$$\left\| \left(\left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right)^{-1} y_k \right)(n) \right\| = \frac{\alpha(k)}{|\lambda|^{n-k} \alpha(n)} \|B^{n-k} x\| \leq \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right)^{-1} \right\|.$$

Следовательно, для всех $k, n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $0 \leq k \leq n$, верны оценки

$$\frac{\alpha(k)}{|\lambda|^{n-k} \alpha(n)} \|B^{n-k}\| \leq \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right)^{-1} \right\|$$

и, значит, при всех $0 \leq m \leq n$ из $\mathbb{Z}_+$ получаем

$$\frac{\alpha(n-m)}{|\lambda|^m \alpha(n)} \|B^m\| \leq \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right)^{-1} \right\|.$$

Теперь из последних оценок и формулы Берлинга–Гельфанда (см. формулу (9)) следует, что

$$\frac{\varkappa(\alpha)r(B)}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \right)^{1/m} \|B^m\|^{1/m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}_w \right)^{-1} \right\|^{1/m} = 1.$$

Таким образом, $\varkappa(\alpha)r(B) \leq |\lambda|$, что противоречит предположению $|\lambda| < \varkappa(\alpha)r(B)$. Следовательно, множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varkappa(\alpha)r(B)\}$ содержится в спектре оператора $\mathcal{K}$. Из леммы 2 следует, что хотя бы одна точка окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \varkappa(\alpha)r(B)\}$ находится в его спектре. Осталось доказать, что хотя бы одна точка окружности лежит в $\sigma(\mathcal{K})$. Однако это следует из свойства инвариантности спектра оператора взвешенного сдвига $\mathcal{K}$ относительно поворота вокруг нуля в поле $\mathbb{C}$ (см. доказательство теоремы 6 из [3]). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\mathcal{D}$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие $\varkappa(\alpha)r(B) < 1$.

Из теоремы 1 следует, что система разностных уравнений

$$\begin{aligned} x(n) &= Bx(n-1) + f(n), & n \geq 1, \\ x(0) &= f(0), & n = 0, \end{aligned}$$

всегда разрешима для любой последовательности $f \in l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, если только вес α удовлетворяет условию $\varkappa(\alpha) = 0$. Кажущееся странным такое свойство (не зависящее от вида оператора B) объясняется просто: разрешимость и единственность решения этой системы уравнений имеет место в классе последовательностей из того же банахова пространства $l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$. Так обстоит дело с весом $\alpha(n) = \exp n^2$, $n \geq 0$, удовлетворяющим условию $\varkappa(\alpha) = 0$.

Отметим еще, что утверждения теоремы 1 и ее следствий остаются верными для любого банахова пространства $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательностей векторов из X , которые строятся по банахову пространству $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательностей, удовлетворяющих условиям

- 1) если $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и последовательность $y: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ удовлетворяет оценкам $\|y(n)\| \leq \|x(n)\|$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $\|y\| \leq \|x\|$ ($\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – банахова решетка);
- 2) каждая из последовательностей

$$e_k \in \mathbb{Z}_+ \rightarrow X, \quad e_k(k) = x \in X, \quad e_k(j) = 0, \quad j \neq k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $\|e_k\| = \|x\|$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

- 3) если $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, то пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ принадлежит последовательность

$$x_0: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X, \quad x_0(k) = x(k-1), \quad k \geq 1, \quad x_0(0) = 0, \quad \|x_0\| \leq \|x\|.$$

Указанные свойства пространства $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ обеспечивают корректность определения оператора $\mathcal{K}: \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$, его ограниченность, а также имеют место оценки, возникающие при доказательстве леммы 2 и теоремы 1.

Отметим, что весовое банахово пространство $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{Z}_+, X)$ определяется по пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ следующим образом: $\mathcal{F}_\alpha$ состоит из последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, для которых последовательность $x_\alpha(n) = \alpha(n)^{-1}x(n)$, $n \geq 0$, принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, и полагается $\|x\|_{\mathcal{F}_\alpha} = \|x_\alpha\|_{\mathcal{F}}$. Тем самым оператор

$$U_\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (U_\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n), \quad n \geq 0, \quad x \in \mathcal{F},$$

является изометрическим изоморфизмом этих пространств. Далее работает используемая схема преобразования подобия оператора $\mathcal{K}: \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$ в оператор $\mathcal{K}_w: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

3. Доказательство теоремы 2. По допустимому весу $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ рассмотрим изометрический изоморфизм

$$\tilde{U}_\alpha: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}_+, X), \quad (\tilde{U}_\alpha x)(t) = \alpha(t)x(t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X).$$

Наряду с оператором $\mathcal{L}: \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}_+, X)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_w: \mathcal{D}(\mathcal{L}_w) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, который строится по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}(t, s) = (\alpha(s)/\alpha(t))T(t-s)$, $(t, s) \in \Delta_+$. Именно из свойства допустимого веса следуют свойства эволюционного семейства. Таким образом, каждая пара функций (x, f) из графика оператора $\mathcal{L}$ удовлетворяет равенствам

$$x(t) = - \int_0^t \frac{T(t-s)f(s)}{\alpha(s)} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ясно, что пара $(x/\alpha, f/\alpha)$ принадлежит пространству $\mathcal{F}$ и, кроме того, принадлежит графику оператора $\mathcal{L}_w$, т.е. имеют место равенства

$$\frac{x(t)}{\alpha(t)} = - \int_0^t \mathcal{U}(t, s) \frac{f(s)}{\alpha(s)} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} = U_{\alpha}^{-1} \mathcal{L} U_{\alpha}$, т.е. операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ подобны, и поэтому $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = \sigma(\mathcal{L})$.

Далее воспользуемся теоремой 4 из статьи [4], в которой получена формула для спектра оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ через верхний генеральный показатель $\chi_g(\mathcal{U})$ семейства $\mathcal{U}$

$$\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_g(\mathcal{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \frac{\ln \|\mathcal{U}(n, n-m)\|}{m} \right\}.$$

Для данного семейства $\mathcal{U}$ величина $\chi_g(\mathcal{U})$ определяется равенством $\chi_g(\mathcal{U}) = \kappa(\alpha)r(B)$ (см. равенства (9)). При этом следует отметить, что хотя пространство Степанова в [4] не рассматривалось, тем не менее, теорема 4 доказывается обычным образом и для пространства S^p . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Спектр оператора дифференцирования*

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} : D(\mathcal{L}) = W^1 \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}_+, X) \subset \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}_+, X),$$

определяемого начальным условием $x(0) = 0$, совпадает с множеством $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \kappa(\alpha)\}$. Здесь

$$W^1 \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}_+, X) = \{x : \mathbb{R}_+ \rightarrow X - \text{абсолютно непрерывная функция} \\ \text{с производной } x' \in \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}_+, X)\}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. E. Rhoades, "The fine spectra for weighted mean operators in $B(l_p)$ ", *Integral Equations Operator Theory*, **12**:1 (1989), 82–98.
- [2] B. E. Rhoades, "The spectra of weighted mean operators on bv_0 ", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **52**:2 (1992), 242–250.
- [3] А. Г. Баскаков, "О корректности линейных дифференциальных операторов", *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 3–28.
- [4] А. Г. Баскаков, "Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов", *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 811–820.
- [5] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [6] R. T. Rau, "Hyperbolic evolution semigroups on vector valued function spaces", *Semigroup Forum*, **48**:1 (1994), 107–118.

М. С. Бичегкуев

Северо-Осетинский государственный университет

им. К. Л. Хетагурова

E-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило

07.03.2008

Исправленный вариант

16.06.2008