Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Группа Брауэра и группа Витта вещественной линейчатой поверхности, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 706–714

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:17:01

УДК 513.6

ГРУППА БРАУЭРА И ГРУППА ВИТТА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Краснов

Вычисляется группа Брауэра и группа Витта вещественной иррациональной линейчатой поверхности. Вычисления производятся с помощью эквивариантных когомологий.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Далее X – неособая вещественная проективная поверхность такая, что $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$ – иррациональная поверхность, т.е. $X_{\mathbb{C}}$ бирационально эквивалентна прямому произведению алгебраической кривой рода $q > 0$ на проективную прямую. Будем предполагать, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда зафиксируем точку $x_0 \in X(\mathbb{R})$ и рассмотрим соответствующее отображение Альбанезе $\mu: X \rightarrow A$. Образ $\mu(X)$ является неособой кривой рода q ; обозначим ее через E и рассмотрим отображение $\mu: X \rightarrow E$. Заметим, что отображение вещественных точек $\mu: X(\mathbb{R}) \rightarrow E(\mathbb{R})$ может быть несюръективным. Пусть $E_1, \dots, E_r$ – компоненты связности множества $E(\mathbb{R})$; тогда благодаря отображению $\mu: X(\mathbb{R}) \rightarrow E(\mathbb{R})$ они разбиваются на следующие три класса. Компонента E_i принадлежит первому классу, если $E_i \subset \mu(X(\mathbb{R}))$. Пусть множество $\mu(X(\mathbb{R}))$ не содержит E_i , но пересечение $E_i \cap \mu(X(\mathbb{R}))$ непусто; тогда по определению компонента E_i принадлежит второму классу. Наконец, если $E_i \cap \mu(X(\mathbb{R})) = \emptyset$, то E_i принадлежит третьему классу. Через r_1, r_2 и r_3 будем обозначать число компонент множества $E(\mathbb{R})$, принадлежащих соответственно первому, второму и третьему классам, а через s обозначим число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$. Тогда справедливы следующие теоремы о группе Брауэра и группе Витта.

ТЕОРЕМА 1. *Выполняется равенство*

$$\mathrm{Br}(X) = (\mathbb{Z}/2)^l,$$

где

$$l = \begin{cases} 2s - r_1 + r_3 - 1, & \text{если } r_1 < r, \\ s & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. *Выполняется равенство*

$$W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где

$$m = \begin{cases} q + s - r_1 - 1, & \text{если } r_2 > 0, \\ q + s - r_1 + 1, & \text{если } r_2 = 0, r_3 > 0, \\ q, & \text{если } r_2 = 0, r_3 = 0, \end{cases} \quad n = \begin{cases} r_3, & \text{если } r_2 > 0, \\ r_3 - 1, & \text{если } r_2 = 0, r_3 > 0, \\ 0, & \text{если } r_2 = 0, r_3 = 0. \end{cases}$$

2. Предварительные результаты. При стягивании 1-го рода $X \rightarrow X'$ группы $\text{Br}(X)$, $W(X)$ не меняются, также не меняются инварианты r_1, r_2, r_3, s , поэтому мы можем считать поверхность X относительно минимальной. В этом случае отображение $\mu: X(\mathbb{C}) \rightarrow E(\mathbb{C})$ не имеет особых слоев над комплексными точками из $E(\mathbb{C})$, а каждый особый слой C_e над вещественной точкой $e \in E(\mathbb{R})$ состоит из двух проективных прямых $C_e^{(1)}, C_e^{(2)}$ с индексами пересечения $(C_e^{(1)})^2 = (C_e^{(2)})^2 = -1$, $C_e^{(1)} \cdot C_e^{(2)} = 1$, причем инволюция $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ отображает прямую $C_e^{(1)}$ в прямую $C_e^{(2)}$. Заметим также, что каждый особый слой C_e находится над точкой из компоненты связности $E(\mathbb{R})$, принадлежащей второму классу. Обозначим через $\omega_1^0, \dots, \omega_r^0 \in H^0(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, $\omega_1^1, \dots, \omega_r^1 \in H^1(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ классы когомологий, определенные компонентами $E_1, \dots, E_r$. Тогда получаем следующую переформулировку разбиения компонент $E_1, \dots, E_r$ на классы. Компонента E_i принадлежит первому классу, если $\mu^*(\omega_i^1) \neq 0$ в $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Если $\mu^*(\omega_i^1) = 0$, но $\mu^*(\omega_i^0) \neq 0$, то E_i принадлежит второму классу. Наконец, если $\mu^*(\omega_i^0) = 0$, то E_i принадлежит третьему классу.

Группа Галуа $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ действует на $X(\mathbb{C}), E(\mathbb{C})$. Положим $Y = X(\mathbb{C})/G$, $F = E(\mathbb{C})/G$, и пусть $\pi: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y, \pi: E(\mathbb{C}) \rightarrow F$ — проекции. Отображение $\mu: X(\mathbb{C}) \rightarrow E(\mathbb{C})$ индуцирует отображение $\mu: Y \rightarrow F$.

ЛЕММА 1. *Гомоморфизм*

$$\mu^*: H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом, размерность ядра которого равна r_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(F, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^1(E(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^0(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu^* & & \cong \downarrow \mu^* & & \downarrow \mu^* \\ 0 & \longrightarrow & H^1(Y, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array}, \quad (1)$$

строки которой точны. Эта диаграмма получается из первой спектральной последовательности для эквивариантных когомологий (см. подробности в [1]). Так как гомоморфизм

$$\mu^*: H^k(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом при $k = 0, 1$, то средний гомоморфизм μ^* в диаграмме (1) является также изоморфизмом. Это утверждение вытекает из рассмотрения второй спектральной последовательности для эквивариантных когомологий. После этих замечаний утверждение леммы следует из диаграммы (1). Лемма доказана.

Множество $X(\mathbb{R})$ можно рассматривать вложенным в Y , поэтому определен гомоморфизм ограничения

$$\beta_Y: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Размерность ядра этого гомоморфизма обозначим через $k^1(Y)$.

ЛЕММА 2. *Выполняется равенство*

$$k^1(Y) = \begin{cases} q - r_1 + r_3, & \text{если } r_1 < r, \\ q - r + 1, & \text{если } r_1 = r. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм ограничения β_Y раскладывается в композицию гомоморфизмов

$$\begin{aligned} H^1(Y, \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{\pi^*} (H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))^G \xrightarrow{(\mu^*)^{-1}} (H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))^G \\ &\xrightarrow{\beta_E} H^1(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\mu^*} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \end{aligned} \quad (2)$$

причем π^* – мономорфизм. Рассмотрим гомоморфизмы ограничения

$$\beta_F: H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad \beta_E: H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow H^1(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2);$$

их образы совпадают и равны гиперплоскости $[E(\mathbb{R})]^\perp$, состоящей из элементов $a \in H^1(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ таких, что $a([E(\mathbb{R})]) = 0$. Пусть $k^1(F)$ – размерность ядра гомоморфизма β_F . Тогда $k^1(F) = q - r + 1$. Из леммы 1 и коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta_F} & [E(\mathbb{R})]^\perp \\ \downarrow \mu^* & & \parallel \\ H^1(Y, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta_E \circ (\mu^*)^{-1} \circ \pi^*} & [E(\mathbb{R})]^\perp \end{array} \quad (3)$$

следует, что ядро гомоморфизма $\beta_E \circ (\mu^*)^{-1} \circ \pi^*$ имеет размерность $q - r + r_3 + 1$. Так как в диаграмме (3) строки являются эпиморфизмами, из разложения (2) и описания гомоморфизма

$$\mu^*: H^1(E(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

следует утверждение леммы о $k^1(Y)$. Лемма доказана.

Пусть $e \in E(\mathbb{R})$ и C_e – слой отображения $\mu: X(\mathbb{C}) \rightarrow E(\mathbb{C})$ над точкой e . Класс гомологий $[C_e] \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ не зависит от выбора точки e , обозначим его через c . Если $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, то $g_*(c) = -c$, так как отображение $g: C_e \rightarrow C_e$ меняет ориентацию. Поэтому элемент $c \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ определяет класс когомологий $[c] \in H^1(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$.

ЛЕММА 3. Если $r_2 > 0$, то $[c] = 0$, в противном случае $[c] \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $r_2 > 0$, то существует точка $e \in E(\mathbb{R})$ такая, что слой C_e распадается на комплексные проективные прямые $C_e^{(1)}, C_e^{(2)}$. Так как $g_*([C_e^{(1)}]) = -[C_e^{(2)}]$, имеем равенство

$$[C_e] = [C_e^{(1)}] - g_*([C_e^{(1)}]).$$

Поэтому класс $[c]$ равен нулю в $H^1(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$. Пусть теперь $r_2 = 0$. Тогда расслоение $\mu: X(\mathbb{C}) \rightarrow E(\mathbb{C})$ является косым произведением со слоем комплексная проективная прямая, поэтому

$$H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2,$$

причем класс $c \in H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ будет одной из образующих этой группы. Положим $E^{(1)} = \mu(X(\mathbb{R}))$. Тогда $E^{(1)}$ состоит из компонент первого класса и отображение $\mu: X(\mathbb{R}) \rightarrow E^{(1)}$ является косым произведением со слоем окружность; следовательно, $\chi(X(\mathbb{R})) = 0$. С другой стороны, из формулы Лефшеца о неподвижных точках имеем равенство

$$\chi(X(\mathbb{R})) = 2 + \text{rk } H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_+ - \text{rk } H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_-, \quad (4)$$

где $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\pm}$ – инвариантная и антиинвариантная подгруппы относительно инволюции $g_*: H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Так как $\text{rk } H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 2$ и $\chi(X(\mathbb{R})) = 0$, из равенства (4) следует, что $H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_- = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, поэтому

$$H^1(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/2.$$

Следовательно, класс $[c]$ не равен нулю. Лемма доказана.

Далее мы будем рассматривать эквивариантные гомологии $H_k(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$. Они определяются как полные когомологии бикомплекса (см. [2], [3]). А именно, если C_i – группа цепей с целыми коэффициентами для некоторого эквивариантного клеточного разбиения $X(\mathbb{C})$, то

$$H_k(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker}[d: \bigoplus_{i \geq k} C_i \rightarrow \bigoplus_{i \geq k-1} C_i]}{\text{Im}[d: \bigoplus_{i \geq k+1} C_i \rightarrow \bigoplus_{i \geq k} C_i]},$$

где d – дифференциал, возникающий из бикомплекса

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & \\ 0 & \longrightarrow & C_4 & \xrightarrow{\partial} & C_3 & \xrightarrow{\partial} & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & \\ 0 & \longrightarrow & C_4 & \xrightarrow{\partial} & C_3 & \xrightarrow{\partial} & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & \\ 0 & \longrightarrow & C_4 & \xrightarrow{\partial} & C_3 & \xrightarrow{\partial} & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}.$$

Рассмотрим вторую спектральную последовательность

$$\Pi_{i,j}^2 = H^{-i}(G, H_j(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \implies H_{i+j}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}).$$

Нас интересует дифференциал

$$d_{-1,1}^2: H^1(G, H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^3(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \quad (5)$$

ЛЕММА 4. *Дифференциал (5) равен нулю, если $r_2 > 0$ или $r_1 = r$, в противном случае образ дифференциала (5) порожден классом $[c] \in H^3(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$H^3(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = H^1(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

поэтому класс $[c]$ принадлежит $H^3(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$. В каждой компоненте E_i выберем по точке e_i , причем предполагаем, что слой над ней неособый. Соединим точку e_i с точкой e_j кривой Γ_{ij} в $E(\mathbb{C}) \setminus E(\mathbb{R})$, где $i < j$. Тогда замкнутые кривые $\Gamma_{ij} - g(\Gamma_{ij})$ порождают группу $H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Пусть $\varphi_{ij}: S \rightarrow E(\mathbb{C})$ – отображение окружности, которое определяет кривую $\Gamma_{ij} - g(\Gamma_{ij})$, $\mu: K_{ij} \rightarrow S$ – индуцированное расслоение со слоем комплексная проективная прямая. Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{ij} & \xrightarrow{\Phi_{ij}} & X(\mathbb{C}) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ S & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & E(\mathbb{C}) \end{array}.$$

На расслоении $\mu: K_{ij} \rightarrow S$ действует инволюция $g: K_{ij} \rightarrow K_{ij}$, которая может быть трех видов: множество $(K_{ij})^G$ состоит из двух окружностей, или из одной окружности, или пустое. Рассмотрим дифференциал

$$d_{-1,1}^2: H^1(G, H_1(K_{ij}, \mathbb{Z})) \rightarrow H^3(G, H_2(K_{ij}, \mathbb{Z})). \quad (6)$$

Заметим, что расслоение $\mu: K_{ij} \rightarrow S$ тривиальное и

$$H^1(G, H_1(K_{ij}, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2, \quad H^3(G, H_2(K_{ij}, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/2.$$

Непосредственно проверяется, что дифференциал (6) ненулевой только для расслоения K_{ij} второго вида, т.е. когда множество $(K_{ij})^G$ состоит из одной окружности. Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i < j} H^1(G, H_1(K_{ij}, \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_{-1,1}^2} & \bigoplus_{i < j} H^3(G, H_2(K_{ij}, \mathbb{Z})) \\ \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* \\ H^1(G, H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) & \xrightarrow{d_{-1,1}^2} & H^3(G, H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \end{array},$$

где гомоморфизмы Φ_* индуцированы эквивариантными отображениями $\Phi_{ij}: K_{ij} \rightarrow X(\mathbb{C})$. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \Phi_* \left(\bigoplus_{i < j} H^1(G, H_1(K_{ij}, \mathbb{Z})) \right) &= H^1(G, H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \\ \Phi_* (H^3(G, H_2(K_{ij}, \mathbb{Z}))) &= (\mathbb{Z}/2) \cdot [c], \end{aligned}$$

поэтому утверждение леммы 4 следует из описания дифференциала (6) и леммы 3. Лемма доказана.

3. Доказательство теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как для нашей поверхности $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, то имеем равенство (см. [4]) $\mathrm{Br}(X) = H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\mathrm{tors}$, где $\mathbb{Z}_-$ – G -модуль $\mathbb{Z}$, на котором инволюция g действует умножением на -1 , а $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\mathrm{tors}$ – подгруппа кручения группы эквивариантных когомологий. Группа $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, поэтому группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\mathrm{tors}$ 2-периодическая (см. [4]). С другой стороны, в [5] для 2-периодической подгруппы ${}_2\mathrm{Br}(X)$ группы Брауэра установлено равенство

$$\dim {}_2\mathrm{Br}(X) = \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + 2s - 1,$$

где $\rho_0(X)$ – число Лефшеца; для нашей поверхности оно равно нулю, так как $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$ (см. [4]). Следовательно,

$$\mathrm{Br}(X) = (\mathbb{Z}/2)^l,$$

где $l = 2s - 1 + k^1(Y) - q(X)$. Применим лемму 2 и заметим, что при $r_1 = r$ имеем равенство $r = s$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Структура группы Витта вещественной проективной поверхности найдена в [6], а в работе [7] показано, как находить инварианты, с помощью которых описывается группа $W(X)$ в [6]. Пусть

$$\begin{aligned} k_{12} &= \dim F^1 H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) + \dim(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \\ k_{13} &= \dim H^1(Y, \mathbb{F}_2), \\ k_{23} &= \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + s - 1, \end{aligned}$$

где пространство $F^1 H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ равно пересечению образа отображения цикла

$$\mathrm{cl}: \mathrm{Pic} X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \quad (7)$$

с ядром гомоморфизма забывания вещественной структуры

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \quad (8)$$

Тогда выполняется равенство

$$W(X) = \mathbb{Z}^s \oplus (\mathbb{Z}/2)^m \oplus (\mathbb{Z}/4)^n,$$

где $m = 2k_{12} - k_{13} + k_{23}$, $n = k_{13} - k_{12}$. Заметим, что

$$\dim(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \dim(1 + g^*)H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = q - r + 1. \quad (9)$$

Из леммы 1 имеем

$$\dim H^1(Y, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(F, \mathbb{F}_2) = q + r_3,$$

поэтому

$$k_{13} = q + r_3. \quad (10)$$

А из леммы 2 получаем

$$k_{23} = \begin{cases} s - r_1 + r_3 - 1, & \text{если } r_1 < r, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, остается вычислить

$$\dim F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Отображение цикла (7) раскладывается в композицию

$$\text{Pic } X \xrightarrow{\text{cl}} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{R} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где R – гомоморфизм редукции. Из равенства $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$ следует, что гомоморфизм

$$\text{cl}: \text{Pic } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$$

эпиморфен (см. [8]). Следовательно, образ отображения цикла (7) равен образу гомоморфизма редукции

$$R: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Пусть $F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – ядро гомоморфизма (8), а $F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ – ядро гомоморфизма

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-).$$

Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \hookrightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \\ \downarrow R & & \downarrow R & & \downarrow R \\ 0 \rightarrow F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \hookrightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \end{array}, \quad (12)$$

строки которой точные. Так как группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, левый гомоморфизм R в диаграмме (12) мономорфен. Поэтому

$$\dim R(F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) = \dim F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)),$$

где второе равенство следует из второй спектральной последовательности. Из равенств

$$\dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \dim H^1(G, H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = r - 1$$

получаем равенство

$$R(F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) = r - 1. \quad (13)$$

Рассмотрим группу

$$\alpha^{-1}(2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))/2H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) + F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Гомоморфизм редукции R отображает ее изоморфно на группу

$$F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) / R(F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)), \quad (14)$$

а гомоморфизм α отображает изоморфно на группу

$$\alpha(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \cap 2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / 2\alpha(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)).$$

Группа $\alpha(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-))$ равна ядру дифференциала

$$d_2^{0,2}: H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \rightarrow H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)),$$

а группа $\text{Ker } d_2^{0,2} \cap 2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ равна группе $2(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G)$. Таким образом, группа (14) изоморфна группе

$$2(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G) / 2 \text{Ker } d_2^{0,2} = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G / \text{Ker } d_2^{0,2}.$$

Применим равенство (13). Тогда получим

$$\dim F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \dim(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G / \text{Ker } d_2^{0,2}) + r + 1. \quad (15)$$

Теперь мы хотим показать, что из леммы 4 следует равенство

$$\dim(H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G / \text{Ker } d_2^{0,2}) = \begin{cases} 0, & \text{если } r_2 > 0 \text{ или } r_1 = r, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16)$$

Прежде всего заметим, что равенство (16) равносильно равенству

$$\dim(\Pi_2^{1,2}(\mathbb{Z}) / \text{Ker } d_2^{1,2}(\mathbb{Z})) = \begin{cases} 0, & \text{если } r_2 > 0 \text{ или } r_1 = r, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (17)$$

где $\Pi_2^{1,2}(\mathbb{Z}) = H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$, а $d_2^{1,2}(\mathbb{Z})$ – дифференциал из спектральной последовательности для эквивариантных когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Применим $\cup$ -произведение. Тогда получим, что равенство (17) равносильно равенству (см. [9])

$$\dim \text{Im } d_2^{1,3}(\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & \text{если } r_2 > 0 \text{ или } r_1 = r, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (18)$$

Применим двойственность Пуанкаре для эквивариантных (ко)гомологий. Тогда получим, что равенство (18) равносильно лемме 4. Итак, равенство (16) установлено, поэтому соотношение (15) дает равенство

$$\dim F^1 H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \begin{cases} r - 1, & \text{если } r_2 > 0 \text{ или } r_1 = r, \\ r & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Применим равенство (9). Получим

$$k_{12} = \begin{cases} q, & \text{если } r_2 > 0 \text{ или } r_1 = r, \\ q + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (19)$$

Осталось заметить, что из равенств (19), (10), (11) следует теорема 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–374.
- [2] Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and Its Applications. Yaroslavl, 1992. P. 114–136.
- [3] van Hamel J. Equivariant Borel–Moore homology and Poincaré duality for discrete transformation groups. Preprint.
- [4] Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
- [5] Краснов В. А. О группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 935–938.
- [6] Sujatha R. Witt groups of real projective surfaces // Math. Ann. 1990. V. 288. P. 89–101.
- [7] Краснов В. А. Этальные и эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [8] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
- [9] Калинин И. О. Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 91–110.

Ярославский государственный университет

Поступило
20.01.1998