Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Дистрибутивные и мультипликативные модули и кольца, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 425–434

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm46>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:29:08

УДК 512.55

ДИСТРИБУТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫЕ МОДУЛИ И КОЛЬЦА

А. А. Туганбаев

Изучаются кольца, в которых каждый идеал является конечно порожденным мультипликативным правым идеалом.

Библиография: 8 названий.

Все кольца ассоциативны и с ненулевой единицей. Выражения типа “нетерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Через $\text{Lat}(M)$ обозначается решетка всех подмодулей модуля M . Через $\text{Lat}(A_A)$ и $\text{Lat}({}_A A_A)$ обозначаются решетка всех правых идеалов и решетка всех идеалов кольца A . Модуль M называется *дистрибутивным* (или, для краткости, *d-модулем*), если $\text{Lat}(M)$ дистрибутивна. Модуль M_A называется *мультипликативным* (или, для краткости, *m-модулем*), если для каждого его подмодуля N существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$. Правый (левый) идеал B кольца A называется *мультипликативным правым (левым) идеалом* (или, для краткости, *rm-идеалом (lm-идеалом)*), если B_A (${}_B B$) – m -модуль. Идеал, являющийся rm -идеалом и lm -идеалом, называется *m-идеалом*. Ясно, что $M_A - m$ -модуль $\iff M(N : M) = N$ для любого $N \in \text{Lat}(M) \iff Mr(M/N) = N$ для любого $N \in \text{Lat}(M)$. (Для любых подмножеств $X, Y \subseteq M_A$ через $(Y : X)$ обозначается множество $\{a \in A \mid Xa \subseteq Y\} \subseteq A$; в частности, $r(X) = (0 : X)$ – правый аннулятор для X в A .) В общем случае класс m -модулей не сравним по включению с классом d -модулей. Любая квазициклическая абелева группа является немультимпликативным d -модулем над $\mathbb{Z}$. Если $A = k[x, y]$ – кольцо многочленов от двух переменных x, y над полем k , то A_A – недистрибутивный m -модуль, поскольку $(x + y)A \cap (xA + yA) \neq (x + y)A \cap xA + (x + y)A \cap yA$. Над коммутативным кольцом класс всех m -модулей содержит все проективные идеалы [1], все циклические модули (см. лемму 4), все конечно порожденные d -модули (см. [2]) и все идеалы, порожденные идемпотентами (см. [3, с. 757] или лемму 6(7)). О m -модулях над коммутативными кольцами см., например, [1]–[6]. В [7] и [8] затрагиваются m -модули над не обязательно коммутативными кольцами. Основные результаты работы – теоремы А и В.

ТЕОРЕМА А. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) в A каждый правый идеал – конечно порожденный rm -идеал;
- (2) A – нетерово справа кольцо и каждый его первичный идеал это rm -идеал;
- (3) A – дистрибутивное справа нетерово справа кольцо;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

- (4) A инвариантно справа и каждый правый t -модуль – нетеров d -модуль;
 (5) в A каждый правый идеал M является таким gt -идеалом, что $M \neq MP$ для любого максимального идеала P кольца A , содержащего $r(M)$.

ТЕОРЕМА В. (1) Если A – кольцо с коммутативным умножением первичных идеалов, то A – дистрибутивно справа нетерова справа кольцо $\iff A$ – конечное прямое произведение артиновых справа цепных справа колец и таких инвариантных справа областей D_i , что для каждой D_i любое собственное фактор-кольцо области D_i является конечным прямым произведением артиновых справа цепных справа колец.

(2) Пусть кольцо A либо не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, либо имеет лишь конечное число минимальных первичных идеалов. В кольце A все правые идеалы – gt -идеалы и все левые идеалы – gt -идеалы $\iff$ в кольце A все полупервичные идеалы – t -идеалы $\iff A$ – конечное прямое произведение инвариантных артиновых локальных колец главных идеалов и инвариантных нетеровых областей, у которых все ненулевые идеалы являются обратимыми.

(3) Если A – кольцо, то A дистрибутивно справа $\iff$ для любого $P \in \max(A_A)$ любые два P -замкнутых правых идеала кольца A сравнимы по включению.

Доказательства теорем А и В разбиты на ряд утверждений. Приведем необходимые обозначения и определения. Для модуля M через $J(M)$, $\text{End}(M)$ и $\max(M)$ обозначаются его радикал Джекобсона, кольцо эндоморфизмов и множество всех максимальных подмодулей соответственно. Для кольца A через $\max({}_A A_A)$ (соответственно, $\text{Lat}({}_A A_A)$, $\text{mod}(A)$, $S(A)$) обозначается множество всех его максимальных идеалов (соответственно, решетка всех идеалов, категория всех правых A -модулей и множество всех делителей нуля). Кольцо A называется *регулярным*, если $a \in aAa$ для каждого $a \in A$. Кольцо называется *инвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами. Кольцо называется *полупервичным (редуцированным)*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов (элементов). Идеал P кольца A называется *первичным (вполне первичным)*, если произведение двух идеалов (элементов) кольца A лежит в P только в случае, если хотя бы один из этих идеалов (элементов) лежит в P . Ясно, что все вполне первичные идеалы первичны и A – вполне первичный идеал. Кольцо называется *почти целостным*, если оно обладает нильпотентным вполне первичным идеалом. Подмножество S кольца A называется *перестановочным справа*, если для любых $a \in A$ и $s \in S$ существуют такие $b \in A$ и $t \in S$, что $at = sb$. Модуль называется *равномерным*, если в нем любые два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Пусть A – кольцо, $P \in \max(A_A)$, $M \in \text{mod}(A)$ и $X \subseteq M$. Множество X называется *P -замкнутым (в M)*, если X содержит любой такой элемент $m \in M$, что $ta \in X$ для некоторого $a \in A \setminus P$. Через $C_P(M)$ обозначается множество всех P -замкнутых подмножеств в M . Если $Y \subseteq M$, то пересечение всех P -замкнутых подмножеств в M , содержащих Y , является P -замкнутым и называется *P -замыканием* для Y в M .

ЛЕММА 1. Пусть M – правый t -модуль над кольцом A . Тогда

- (1) каждый фактор-модуль M/N – t -модуль;
 (2) если $N \in \text{Lat}(M)$ и $N \cap MB = NB$ для каждого идеала B кольца A , то N – t -модуль;

- (3) если $M \neq MP$ для каждого такого $P \in \max({}_A A_A)$, что $r(M) \subseteq P$, то M конечно порожден;
- (4) если A регулярно, то каждый $N \in \text{Lat}(M)$ – дистрибутивный m -модуль;
- (5) если A – кольцо с условием максимальности для идеалов, то M – нетеров модуль;
- (6) если $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых идеалов B и C кольца A , то отображение $\varphi: B \rightarrow MB$ является сюръективным решеточным гомоморфизмом из решетки $\text{Lat}({}_A A_A)$ на решетку $\text{Lat}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $X \in \text{Lat}(M)$ и $N \subseteq X$. Так как $X = MB$ для некоторого идеала B , то $X/N = (M/N)B$.

(2) Пусть $X \in \text{Lat}(N)$. Так как $X = MB$ для некоторого идеала B , то $X = N \cap MB = NB$.

(3) Пусть $\{P_i\}_{i \in I}$ – множество всех максимальных идеалов в A , содержащих $r(M)$. По условию $M \neq MP_i$ для каждого P_i . Для каждого $i \in I$ существует такой циклический $X_i \in \text{Lat}(M)$, что $X_i \not\subseteq MP_i$. Обозначим через B идеал $\sum_{i \in I} r(M/X_i)$. Тогда $B \supseteq r(M/X_i) \supseteq r(M)$. Допустим, что $A = B$. Тогда существует такое конечное подмножество J в I , что $A = \sum_{j \in J} r(M/X_j)$. Так как M – m -модуль, то $X_j = Mr(M/X_j)$ для каждого $j \in J$. Поэтому $M = MA = M(\sum_{j \in J} r(M/X_j)) = (\sum_{j \in J} Mr(M/X_j)) = \sum_{j \in J} X_j$. Так как $M = \sum_{j \in J} X_j$, то M конечно порожден. Допустим, что $A \neq B$. Существует такой $P \in \max({}_A A_A)$, что $P \supseteq B \supseteq r(M)$. Тогда $P = P_i$ для некоторого $i \in I$ и $r(M/X_i) \subseteq B \subseteq P_i$. Так как M – m -модуль, то $X_i = Mr(M/X_i) \subseteq MP_i$; получили противоречие.

(4) Пусть B – идеал в A и $x \in N \cap MB$. Тогда $x = \sum_{i=1}^n m_i b_i$ для некоторых $m_1, \dots, m_n \in M$ и $b_1, \dots, b_n \in B$. Так как A регулярно, его конечно порожденный левый идеал $C = \sum_{i=1}^n Ab_i$ порождается некоторым идемпотентом e . Пусть $b_i = a_i e$, где $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$. Если $m = \sum_{i=1}^n m_i a_i$, то $x = me \in N$ и $x = xe \in NB$. Поэтому $N \cap MB \subseteq NB \subseteq N \cap MB$. По (2) N – m -модуль. Поэтому в M все подмодули – m -модули. По (3) M – d -модуль. Поэтому N – d -модуль.

(5) Допустим, что $\text{Lat}(M)$ содержит бесконечную строго возрастающую цепь $X_1 \subset X_2 \subset \dots$. Так как $X_i = M(X_i : M)$ для всех i , то $\text{Lat}({}_A A_A)$ содержит бесконечную строго возрастающую цепь $(X_1 : M) \subset (X_2 : M) \subset \dots$.

(6) Утверждение проверяется непосредственно.

ЛЕММА 2. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A – mt -идеал;
- (2) A – инвариантное справа кольцо;
- (3) все циклические правые A -модули являются m -модулями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\implies$ (1) следует из того, что $B = AB$ для каждого правого идеала B инвариантного справа кольца A . Импликация (1) $\implies$ (3) следует из леммы 1(1).

(3) $\implies$ (2) Пусть B – правый идеал кольца A . Так как циклический модуль A_A – m -модуль, существует такой идеал C , что $B = AC = C$.

ЛЕММА 3. Для нетерова справа кольца A равносильны условия:

- (1) A дистрибутивно справа;
- (2) в A все правые идеалы – произведения первичных двусторонних идеалов;

- (3) в A все правые идеалы – rm -идеалы;
 (4) в A каждый первичный идеал – rm -идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1), (2) и (3) доказана в утверждениях 7.27(3) и 9.26 из [7]. Импликация (3) $\implies$ (4) очевидна.

(4) $\implies$ (2). Так как A – первичный идеал, по условию A – rm -идеал. По лемме 2 A инвариантно справа. Поэтому достаточно доказать, что в A каждый идеал – произведение первичных идеалов. Пусть $\mathcal{E}$ – множество всех собственных идеалов, не являющихся произведениями первичных идеалов. Допустим, что $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент E . Так как идеал E не первичен, существуют такие идеалы X и Y , что X и Y строго содержат E и $XY \subseteq E$. Так как E – максимальный элемент в $\mathcal{E}$, то X и Y – произведения первичных идеалов, причем каждый из этих первичных идеалов строго содержит идеал E . Существуют такие первичные идеалы $P_1, \dots, P_n$, что $XY = P_1 \cdots P_n \subseteq E$ и каждый первичный идеал P_i строго содержит E . Так как каждый первичный идеал – rm -идеал, то существуют такие идеалы $B_1, \dots, B_n$, что $E = P_i B_i \subseteq B_i$ для любого i . Если хотя бы один из идеалов B_i строго содержит максимальный элемент E множества $\mathcal{E}$, то E – произведение первичных идеалов, поскольку $E = P_i B_i$. Поэтому $B_i = E$ для всех i . Тогда $E = P_i E$ для всех i . Поэтому $XYE = P_1 \cdots P_n E = P_1 \cdots P_{n-1} E = \dots = E \subseteq XY \subseteq E$. Тогда $E = XY = P_1 \cdots P_n$ и E – произведение первичных идеалов. Получили противоречие.

ЛЕММА 4. Для модуля M_A равносильны условия:

- (1) M – d -модуль;
 (2) для любых $x, y \in M$ существует $a \in A$, для которого $xa \in yA$ и $y(1-a) \in xA$;
 (3) для любого $P \in \max(A_A)$ множество $C_P(M)$ линейно упорядочено по включению;
 (4) для любого $P \in \max(A_A)$ и любых $x, y \in M$ P -замыкания в M модулей xA и yA сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\iff$ (2) см. в [7, Proposition 1.17]. Импликация (3) $\implies$ (4) очевидна.

(4) $\implies$ (2). Допустим, что (2) не выполнено для некоторых $x, y \in M$. Тогда $(yA : x) + (xA : y) \subseteq P \in \max(A_A)$. Пусть X и Y – P -замыкания в M модулей xA и yA . Тогда $y \in Y \setminus X$ и $x \in X \setminus Y$. Это противоречит (4).

(2) $\implies$ (3). Пусть $P \in \max(A_A)$, $X, Y \in C_P(M)$, $x \in X$ и $y \in Y$. По (2) существует $a \in A$, для которого $xa \in Y$ и $y(1-a) \in X$. Так как $X, Y \in C_P(M)$ и хотя бы один из элементов a , $1-a$ не лежит в P , то либо $x \in Y$, либо $y \in X$. Поэтому X и Y сравнимы по включению.

ЛЕММА 5. Пусть M – правый модуль над кольцом A , причем для любого $P \in \max(A_A)$ множество $A \setminus P$ перестановочно справа и мультипликативно замкнуто. Тогда

- (1) для любых $N \in \text{Lat}(M)$ и $P \in \max(A_A)$ P -замыкание X модуля N в M является подмодулем в M ;
 (2) M – d -модуль $\iff$ для любого $P \in \max(A_A)$ любые два P -замкнутых подмодуля модуля M сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $x, y \in X$ и $a \in A$. Надо доказать, что $xa, x + y \in X$. Существуют $s, s' \in A \setminus P$, для которых $xs, ys' \in N$. По условию $at = sb$ и $sb' = s't' \in A \setminus P$ для некоторых $t, t' \in A \setminus P$ и $b, b' \in A$. Тогда $(xa)t = (xs)b \in N$ и $(x + y)s't' = (xs)b' + (ys')t' \in N$. Поэтому $xa, x + y \in X$.

(2) Следует из (1) и леммы 4.

ЛЕММА 6. Пусть A – инвариантное справа кольцо. Тогда

- (1) $B(1-b) \subseteq (1-b)B$ для каждого правого идеала B кольца A и любого $b \in B$;
- (2) если B – идеал кольца A и M – такой циклический правый A -модуль, что $M = MB$, то $A = B + r(M)$;
- (3) пусть n – натуральное число ≥ 2 , M – n -порожденный A -модуль с образующими $m_1, \dots, m_n$, $N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A$ и B – такой идеал кольца A , что $M = MB$; тогда $A = B + (N : m_n A)$ и $N = NB$;
- (4) если M – конечно порожденный правый A -модуль и B – такой идеал кольца A , что $M = MB$, то $A = B + r(M)$;
- (5) если M – конечно порожденный правый A -модуль, то $M \neq MB$ для каждого собственного идеала B кольца A , содержащего $r(M)$;
- (6) если B – конечно порожденный идеал кольца A и $B = B^2$, то существует такой центральный идемпотент e кольца A , что $B = eA$;
- (7) если M – идеал кольца A , порожденный некоторым множеством идемпотентов, то M – rm -идеал;
- (8) если $M \in \text{mod}(A)$, то M – d -модуль $\iff$ для любого $P \in \text{max}(A_A)$ любые два P -замкнутых подмодуля модуля M сравнимы по включению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $b_1 \in B$. Так как A инвариантно справа, то $(1-b)A$ – идеал в A . Поэтому существует $a \in A$, для которого $b_1(1-b) = (1-b)a$. Тогда $a = (1-b)a + ba = b_1(1-b) + ba \in B$ и $B(1-b) \subseteq (1-b)B$.

(2) Пусть $M = tA$. Так как A инвариантно справа, то $r(M) = r(t)$ и $tA = tAB = tB$ по условию. Поэтому $t(1-b) = 0$ для некоторого $b \in B$. Тогда $A = B + r(t) = A + r(M)$.

(3) Положим

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2, \\ \sum_{i=2}^{n-1} m_i A, & \text{если } n \geq 3. \end{cases}$$

Для каждого m_i $m_i \in M = MB = \sum_{j=1}^n m_j B$ и существует $b_i \in B$, для которого $m_i(1-b_i) \in \sum_{j \neq i} m_j B$. Тогда $m_n A(1-b_n) \subseteq NB = m_1 B + YB$ и $m_1 A(1-b_1) \in YB + m_n B$, поскольку A инвариантно справа; кроме того, $B(1-b_1) \subseteq (1-b_1)B$ по (1). Поэтому $A = B + (N : m_n A)$ и $m_1 A(1-b_1)(1-b_n) \subseteq (YB + m_n B)(1-b_n) \subseteq YB + m_n B(1-b_n) \subseteq YB + m_n(1-b_n)B \subseteq YB + m_1 B = NB$. Тогда существует $b^* \in B$, для которого $m_1(1-b_1)(1-b_n) - m_1 b^* \in YB$ и $m_1[(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in YB$. Положим $b = 1 - [(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in B$. Тогда $m_1 = m_1 b + m_1(1-b) = m_1 b + m_1[(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in m_1 B + YB = NB$. Поэтому $m_1 A \subseteq NB$. Аналогично можно доказать, что $m_i A \subseteq NB$ при $i = 2, \dots, n-1$. Поэтому $N = NB$.

(4) Проведем индукцию по n . При $n = 1$ утверждение следует из (2). Допустим, что $n \geq 2$ и утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n . Пусть $N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A$. По (3) $A = B + (N : m_n A)$ и $N = NB$. По предположению индукции $A = B + r(N)$. Тогда $M(N : m_n A)r(N) = (N + m_n A)(N : m_n A)r(N) = N(N :$

$m_n A)r(N) + m_n A(N : m_n A)r(N) \subseteq Nr(N) = 0$. Поэтому $(N : m_n A)r(N) \subseteq r(M)$ и $A = A \cdot A = (B + (N : m_n A))(B + r(N)) \subseteq B + (N : m_n A)r(N) \subseteq B + r(M) \subseteq A$.

(5) Утверждение следует из (4).

(6) Так как B – конечно порожденный идеал инвариантного справа кольца A , то B – конечно порожденный правый идеал. По (4) $A = B + r(B)$. Поэтому существует $e \in B$, для которого $B(1 - e) = 0$. В частности, $e(1 - e) = 0$ и $e = e^2$. Так как eA и $(1 - e)A$ – идеалы инвариантного справа кольца A , идемпотент e централен.

(7) Пусть $M = \sum_{i \in I} e_i A$ ($e_i^2 = e_i$) и B – правый идеал кольца A , содержащийся в M . Так как A инвариантно справа, то $MB \subseteq B$. Поэтому достаточно доказать, что $B \subseteq MB$. Пусть $b \in B$. Существует такое конечное подмножество $\{e_1, \dots, e_n\}$ в $\{e_i\}_{i \in I}$, что $b = \sum_{i=1}^n e_i a_i$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in A$. Так как A инвариантно справа, все идемпотенты e_i центральны. Тогда $(1 - e_1) \cdot \dots \cdot (1 - e_n)b = 0$ и $b = (1 - (1 - e_1) \cdot \dots \cdot (1 - e_n))b \in (\sum_{i=1}^n e_i A)b \subseteq MB$. Поэтому $B \subseteq MB$.

(8) Так как A инвариантно справа, для любого $P \in \max(A_A)$ множество $A \setminus P$ перестановочно справа и мультипликативно замкнуто. Теперь применяем лемму 5(2).

ЛЕММА 7. Пусть M – правый модуль над дистрибутивным справа инвариантным справа кольцом A . Тогда

- (1) $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых правых идеалов B и C из A ;
- (2) если M – t -модуль, то M – d -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [7, 7.27(4)], а (2) следует из (1) и леммы 1(6).

ЛЕММА 8. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A – дистрибутивное справа нетерово справа кольцо и каждое фактор-кольцо кольца A является конечным прямым произведением областей и артиновых справа цепных справа колец;
- (2) A – дистрибутивное справа нетерово справа кольцо и для любого его фактор-кольца R с первичным радикалом N верно, что либо R – артиново справа кольцо, либо N не является существенным правым идеалом кольца R ;
- (3) A – конечное прямое произведение артиновых справа цепных справа колец и таких инвариантных справа областей D_i , что для каждого D_i любое собственное фактор-кольцо области D_i является конечным прямым произведением артиновых справа цепных справа колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (3) $\Rightarrow$ (1) и (1) $\Rightarrow$ (2) очевидны. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) доказана в [7, 9.27(4)].

ЛЕММА 9. Пусть A – дистрибутивное справа нетерово справа неразложимое кольцо. Допустим, что A не является областью и A не является артиновым справа цепным справа кольцом. Тогда A имеет такой ненулевой вполне первичный нильпотентный идеал X и максимальный идеал Y , что $X = YX \subsetneq Y$, $XY \in \max(X)$ и $XY \neq YX$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 A инвариантно справа. В [7, 9.20(1)] доказано, что A имеет такой ненулевой вполне первичный нильпотентный идеал X , что $X = yX$ для каждого $y \in A \setminus X$. Допустим, что $X \notin \max({}_A A_A)$. Ненулевой модуль X_A имеет максимальный подмодуль K . Обозначим через Y идеал $r(X/K)$ кольца A . Так как A

инвариантно справа и A -модуль X/K прост, то $Y \in \max({}_A A_A)$. Тогда $XY \subseteq K \neq X$. Так как $X \notin \max({}_A A_A)$, то $Y \not\subseteq X$. Существует $y \in Y \setminus X$. Тогда $X = yX \subseteq YX \subseteq X$. Поэтому $X = YX$. Допустим, что X – максимальный идеал инвариантного справа кольца A . Тогда A – нетерово справа полупримальное локальное кольцо. Поэтому A артиново справа с единственным собственным первичным идеалом J . Из леммы 3 следует, что A – цепное справа кольцо. Получили противоречие.

ЛЕММА 10. Пусть A – кольцо, у которого каждый первичный идеал – rt -идеал. Тогда

- (1) если P и Q – первичные идеалы кольца A и $P \not\subseteq Q$, то $P \cap Q = PQ$;
- (2) если P и Q – первичные идеалы кольца A и $P \neq Q$, то либо $Q = PQ \subsetneq P$, либо $P = QP \subsetneq Q$, либо $PQ = QP = P \cap Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как P и Q – rt -идеалы, то $P \cap Q = PB = QC$ для некоторых идеалов B и C . Так как $P \not\subseteq Q$ и PB лежит в первичном идеале Q , то $B \subseteq Q$. Поэтому $P \cap Q = PB \subseteq PQ \subseteq P \cap Q$. Тогда $P \cap Q = PQ$.

(2) Если P и Q не сравнимы по включению, то по (1) $PQ = QP = P \cap Q$. Поэтому можно считать, что $Q \subsetneq P$. Тогда $P \not\subseteq Q$ и $Q = P \cap Q = PQ$ по (1).

ЛЕММА 11. Пусть A – инвариантное кольцо, X – его ненулевой идеал, Q – классическое кольцо частных кольца A . Тогда

- (1) если X – t -идеал, содержащий $x \in S(A)$, то идеал X обратим в Q и является конечно порожденным проективным правым (левым) идеалом;
- (2) идеал X обратим в $Q \iff X$ – t -идеал, содержащий $x \in S(A)$;
- (3) если X – rt -идеал, то $PX \subsetneq X$ для некоторого $P \in \max(A_A)$;
- (4) если X – первичный rt -идеал и $X \subseteq J(A)$, то A – локальное кольцо и $J(A) = X = xA = Ax$ для некоторого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Существуют такие идеалы B и C , что $XB = xA = Ax = CX$. Поэтому $X(Bx^{-1}) = A = (x^{-1}C)X$. Тогда (1) следует из утверждения 7.35(2) в [7].

(2) По (1) достаточно доказать $\implies$. По условию $XX^* = X^*X = A$ для некоторого подбимодуля X^* в ${}_A Q_A$ и $1 = \sum_{i=1}^n m_i q_i$ для некоторых $m_1, \dots, m_n \in X$ и $q_1, \dots, q_n \in X^*$. Существуют такие $a_1, \dots, a_n \in A$ и $x \in S(A)$, что $q_i = a_i x^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому $x = \sum_{i=1}^n m_i q_i x = \sum_{i=1}^n m_i a_i \in X$. Пусть Y – идеал инвариантного кольца A , лежащий в X , $B = X^*Y \subseteq A$ и $C = YX^* \subseteq A$. Тогда $Y = XX^*Y = XB = YX^*X = CY$ и X – t -идеал.

(3) Пусть $0 \neq y \in X$ и $Y = yA = Ay$. Тогда $PY \neq Y$ для некоторого $P \in \max({}_A A)$ = $\max(A_A)$. Так как X – rt -идеал, то $Y = XB$ для некоторого идеала B . Если $X = PX$, то $Y = XB = PXB = PY \neq Y$ и получаем противоречие.

(4) По (3) $PX \subsetneq X$ для некоторого $P \in \max(A_A)$. Если $P \not\subseteq X$, то по лемме 10(1) $X \subseteq P \cap X = PX \subsetneq X$ и получаем противоречие. Поэтому $P \subseteq X \subseteq J(A) \subseteq P$, $X = P = J(A)$ – единственный максимальный правый идеал и A локально. По (3) существует $x \in X \setminus X^2$. Так как X – rt -идеал и $x \notin X^2$, то $xA = XB$ для некоторого идеала $B \not\subseteq X$. Тогда $B = A$ и $X = XB = xA = Ax$.

ЛЕММА 12. Пусть A – инвариантное кольцо с ненулевым первичным радикалом X , причем X – g -идеал и в A все максимальные идеалы – g -идеалы. Тогда

- (1) либо A – цепное артиново кольцо главных идеалов, либо $A/X = P/X \times Q/X$, где P/X – ненулевое редуцированное кольцо и Q/X – тело;
- (2) если A/X – неразложимое кольцо, то A – цепное артиново кольцо главных идеалов;
- (3) если A – неразложимое кольцо, то A – цепное артиново кольцо главных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как A/X – инвариантное полупервичное кольцо, то A/X редуцировано. По лемме 11(3) существует $P \in \max(A_A)$, для которого $PX \subsetneq X \subseteq J(A) \subseteq P$. Так как P – g -идеал, то $X = PQ \subseteq P \cap Q$ для некоторого идеала Q . Тогда $(P \cap Q)^2$ содержится в полупервичном идеале X . Поэтому $P \cap Q \subseteq X \subseteq P \cap Q$. Тогда $X = P \cap Q \subsetneq Q$, поскольку $PX \subsetneq X$. Допустим, что $X = P$. По лемме 11(4) A локально и $J(A) = X = xA = Ax$ для некоторого $x \in X$. Кроме того, $x^n = 0$ для некоторого n . Тогда $X^n = 0$ и множество всех собственных правых (левых) идеалов кольца A совпадает со множеством степеней идеала X и A – цепное артиново кольцо главных идеалов. Остается случай, когда $X \subsetneq P$ и $X = PQ = P \cap Q \subsetneq Q$. Тогда Q не лежит в максимальном идеале P . Поэтому $A = P + Q$ и $A/X = P/X \times Q/X$, где ненулевое прямое слагаемое P/X редуцированного кольца A/X является редуцированным кольцом и Q/X – тело, поскольку $Q/X \cong (A/X)/(P/X) \cong A/P$.

(2) Следует из (1).

(3) Так как A неразложимо и инвариантно, A не имеет нетривиальных идемпотентов. Кроме того, все нетривиальные идемпотенты кольца A/X поднимаются до нетривиальных идемпотентов в A , поскольку X – нильидеал. Поэтому A/X – неразложимое кольцо. По (2) A – цепное артиново кольцо главных идеалов.

ЛЕММА 13. Пусть A – инвариантное справа кольцо. Если A не является нетеровым справа, то A имеет такой собственный вполне первичный идеал B , что B не конечно порожден, а каждый идеал кольца A , строго содержащий B , конечно порожден. Следовательно, если все вполне первичные идеалы кольца A конечно порождены, то A нетерово справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{B_i\}_{i \in I}$ – непустое множество всех собственных идеалов, не являющихся конечно порожденными. Так как объединение любой цепи элементов множества $\{B_i\}_{i \in I}$ содержится в этом множестве, по лемме Цорна $\{B_i\}_{i \in I}$ содержит некоторый максимальный элемент B . Пусть $x \in A \setminus B$ и $Y = (B : x)$. Достаточно доказать, что $Y \subseteq B$. Допустим противное. Тогда $xy \in B$ для некоторого $y \in Y \setminus B$. Так как $xB \subseteq B$ и $y \in Y \setminus B$, идеалы Y и $xA + B$ строго содержат B . Поэтому существуют такие $y_1, \dots, y_m \in Y$ и $b_1, \dots, b_n \in B$, что $Y = \sum_{i=1}^m y_i A$ и $xA + B = xA + \sum_{j=1}^n b_j A$. Тогда $B \cap xA = xY = \sum_{i=1}^m (xy_i)A$ и $B = B \cap (xA + B) = B \cap (xA + \sum_{j=1}^n b_j A) = B \cap xA + \sum_{j=1}^n b_j A = \sum_{i=1}^m (xy_i)A + \sum_{j=1}^n b_j A$. Поэтому B конечно порожден. Получили противоречие.

ЛЕММА 14. (1) Пусть все полупервичные идеалы кольца A являются g -идеалами, причем либо A равномерно, либо A обладает только одним минимальным первичным идеалом. Тогда A – либо инвариантная область, либо инвариантное цепное артиново кольцо главных идеалов.

(2) Если X – первичный идеал кольца A и все вполне первичные идеалы кольца A являются m -идеалами, то A/X – инвариантная нетерова область, у которой все ненулевые идеалы обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 кольцо A инвариантно.

(1) Пусть A – не область и X – первичный радикал кольца A . Так как X – полупервичный идеал, то X – rm -идеал по условию. Допустим, что A равномерно. Так как A – не область и любое инвариантное равномерное полупервичное кольцо является областью, то $X \neq 0$. По лемме 12(3) A – цепное артиново кольцо главных идеалов. Допустим, что A обладает только одним минимальным первичным идеалом. Тогда X – первичный идеал. По лемме 12(2) A – цепное артиново кольцо главных идеалов.

(2) Инвариантное первичное кольцо A/X является областью, у которой все вполне первичные идеалы – m -идеалы. По лемме 11(1) все ненулевые вполне первичные идеалы области A/X конечно порождены и обратимы. По лемме 13 A/X – нетерова область. По лемме 3 каждый ненулевой идеал B/X области A/X – произведение ненулевых вполне первичных обратимых идеалов. Поэтому B/X обратим.

ЛЕММА 15. Пусть в кольце A все полупервичные идеалы являются m -идеалами. Тогда

- (1) если $X_1, \dots, X_n$ – такие идеалы кольца A , что все фактор-кольца A/X_i нетеровы справа, то $A/(\bigcap_{i=1}^n X_i)$ – конечное прямое произведение инвариантных цепных артиновых колец главных идеалов и инвариантных нетеровых областей, у которых все ненулевые идеалы обратимы;
- (2) если либо A обладает только конечным числом минимальных первичных идеалов, либо A не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, то A – конечное прямое произведение инвариантных цепных артиновых колец главных идеалов и инвариантных нетеровых областей, у которых все ненулевые идеалы обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 кольцо A инвариантно.

(1) Пусть $\bar{A} = A/(\bigcap_{i=1}^n X_i)$. Так как все модули $(A/X_i)_A$ нетеровы, то $\bar{A}$ – нетеров модуль. Поэтому $\bar{A}$ – нетерово справа кольцо, у которого все полупервичные идеалы являются m -идеалами. Из леммы 9 следует, что $\bar{A} = \bar{A}_1 \times \dots \times \bar{A}_n$, где все кольца $\bar{A}_i$ почти целостны. Так как каждое кольцо $\bar{A}_i$ обладает единственным минимальным первичным идеалом, по лемме 14 $\bar{A}_i$ – либо инвариантное цепное артиново кольцо главных идеалов, либо инвариантная нетерова область, у которой все ненулевые идеалы обратимы.

(2) Допустим, что инвариантное кольцо A не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Тогда A содержит такие идеалы $B_1, \dots, B_n$, что все фактор-кольца A/B_i равномерны и $\bigcap_{i=1}^n B_i = 0$. По лемме 14 все кольца A/B_i нетеровы. Теперь (2) следует из (1). Допустим, что множество всех минимальных первичных идеалов кольца A конечно и равно $\{X_i\}_{i=1}^n$. Пусть $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$ – первичный радикал кольца A . По лемме 14(2) все фактор-кольца A/X_i нетеровы. По (1) кольцо A/X нетерово. Из леммы 9 следует, что A/X – конечное прямое произведение почти целостных колец. Кроме того, A/X полупервично и X – нильидеал. Поэтому A/X – конечное прямое произведение областей и $A = A_1 \times \dots \times A_n$, где первичный радикал каждого кольца A_i является первичным идеалом в A_i . Теперь (2) следует из леммы 14.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ А. Эквивалентность условий (1)–(3) следует из леммы 3. Импликация (1) $\implies$ (5) следует из леммы 2 и леммы 6(5). Импликация

(5) $\implies$ (1) следует из леммы 1(3). Импликация (4) $\implies$ (3) следует из леммы 2. Импликация ((1) + (3)) $\implies$ (4) следует из леммы 1(5), леммы 2 и леммы 7(2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть кольцо A либо не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, либо имеет лишь конечное число минимальных первичных идеалов. Равносильны условия:

- (1) A – нетерова дистрибутивное кольцо;
- (2) в кольце A все правые идеалы – gt -идеалы и все левые идеалы – lt -идеалы;
- (3) в кольце A все полупервичные идеалы – t -идеалы;
- (4) A – конечное прямое произведение инвариантных артиновых локальных колец главных идеалов и инвариантных нетеровых областей, у которых все ненулевые идеалы являются обратимыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (1) $\iff$ (2) следует из теоремы А. Импликация (2) $\implies$ (3) очевидна. Импликация (3) $\implies$ (4) следует из леммы 15(2). Импликация (4) $\implies$ (2) следует из лемм 11(2) и 2.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ В. (1) Импликация $\Leftarrow$ проверяется непосредственно. Докажем $\implies$. Так как каждое фактор-кольцо дистрибутивного справа нетерова справа кольца с коммутативным умножением первичных идеалов обладает теми же свойствами и является конечным прямым произведением неразложимых колец, по лемме 8 достаточно доказать, что каждый неразложимый прямой сомножитель $\bar{A}$ кольца A является либо областью, либо артиновым справа цепным справа кольцом. Это следует из леммы 9.

(2) Следует из предложения 16.

(3) В утверждении 7.7(1) из [7] доказано, что для любого максимального правого идеала P дистрибутивного справа кольца A множество $A \setminus P$ перестановочно справа и мультипликативно замкнуто. Теперь применяем лемму 5(2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smith W. W. Projective ideals of finite type // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1057–1061.
- [2] Barnard A. Multiplication modules // J. Algebra. 1981. V. 71. № 1. P. 174–178.
- [3] El-Bast Z. A., Smith P. F. Multiplication modules // Comm. Algebra. 1988. V. 16. № 4. P. 755–779.
- [4] Anderson D. D. Some remarks on multiplication ideals // Math. Japonica. 1980. V. 4. № 4. P. 463–469.
- [5] Smith P. F. Some remarks on multiplication modules // Arch. Math. 1988. V. 50. № 3. P. 223–235.
- [6] Smith P. F. Multiplication modules and projective modules // Period. Math. Hungar. 1994. V. 29. № 2. P. 163–168.
- [7] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publ., 1998.
- [8] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publ., 1999.