Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, Классификация поверхностей лог Энрикеса с $\delta = 2$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 715–722

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:46:11

УДК 514

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛОГ ЭНРИКВЕСА С $\delta = 2$

С. А. Кудрявцев

Классифицированы поверхности лог Энриквеса с $\delta = 2$.

Библиография: 9 названий.

Введение. Пусть S – проективная логтерминальная поверхность с численно тривиальным каноническим классом $K_S \equiv 0$. Тогда S называется *поверхностью лог Энриквеса*.

Определим следующий инвариант:

$$\delta(S) = \#\left\{E \mid E - \text{исключительный дивизор с дискрепантностью } a(E, 0) \leq -\frac{6}{7}\right\}.$$

Согласно теореме [1, 5.1] имеем $0 \leq \delta(S) \leq 2$. В данной работе получена классификация таких поверхностей с $\delta = 2$ (см. теоремы 2.5 и 2.6).

Эти поверхности часто появляются в различных задачах. Некоторые из них следующие: изучение вырождений поверхностей, изучение КЗ поверхностей (в частности, см. п. 2), изучение многообразий Калаби–Яо и задача (индуктивной) классификации трехмерных строго логканонических особенностей. В последней задаче такие поверхности могут реализовываться как исключительные дивизоры чисто логтерминальных раздутий трехмерных строго логканонических особенностей. Например, в случае гиперповерхностных особенностей всегда $K_S \sim 0$ и S – поверхность КЗ с дювалевскими особенностями или S – поверхность, полученная стягиванием сечения эллиптической поверхности [2].

Метод, которым будут классифицированы эти поверхности, был предложен В. В. Шокуровым в [1]. Он работает в любой размерности для классификации многообразий кодаировой размерности $-\infty$ или 0, экстремальных стягиваний и особенностей.

Поверхностей лог Энриквеса с $\delta = 2$ более 1000, и поэтому перечислить, например, все их минимальные разрешения затруднительно. А подход Шокурова позволяет получить довольно простую и полную классификацию.

Другие методы изучения поверхностей лог Энриквеса см. в [3]–[5]. Во многих работах изучаются автоморфизмы КЗ поверхностей и, как следствие, были получены результаты о структуре поверхностей лог Энриквеса (см., например, [6], [7]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00441, программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96085, и фонда INTAS-OPEN, грант № 2000#269.

Из данной работы также видно, что из классификации “моделей” исключительных поверхностей лог Дель-Пеццо (определение исключительности см. в [1]) можно получить классификацию поверхностей лог Энриквеса.

1. Предварительные сведения и результаты. Все многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Основные определения, обозначения и понятия, использованные в статье, приведены в [8], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть X – нормальное многообразие, а дивизор $D = S + B$ является субграницей, где S – его целая эффективная часть и $\perp B \perp \leq 0$. Дивизор $K_X + D$ называется n -дополняемым, если существует $\mathbb{Q}$ -дивизор D^+ , называемый n -дополнением, который удовлетворяет следующим требованиям:

- (1) $n(K_X + D^+) \sim 0$;
- (2) дивизор $K_X + D^+$ логканоничен;
- (3) $nD^+ \geq nS + \perp(n+1)B\perp$.

ТЕОРЕМА 1.2 [1, 3.1]. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – локальное двумерное лог многообразие (т.е. Z не является точкой), где $f: X \rightarrow Z \ni P$ – стягивание. Предположим, что $-(K_X + D)$ f -численно эффективен и дивизор $K_X + D$ логканоничен. Тогда существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение для $K_X + D$ в некоторой окрестности $f^{-1}(P)$.

ТЕОРЕМА 1.3 [1, §5]. Пусть S – поверхность лог Энриквеса с $\delta = 2$. Обозначим через $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ исключительные кривые с дискрепантностью $a(\tilde{C}_i, 0) \leq -\frac{6}{7}$. Пусть $f: \tilde{S} \rightarrow S$ – частичное разрешение, для которого стягиваются только кривые $\tilde{C}_i$.

Тогда существует бирациональное стягивание $g: \tilde{S} \rightarrow \bar{S}$ (см. диаграмму на рис. 1) со следующими свойствами: $\rho(\bar{S}) = 1$, g не стягивает кривые $\tilde{C}_i$. Обозначим $C_i = g(\tilde{C}_i)$. Более того, пара $(\bar{S}, a(\tilde{C}_1, 0)C_1 + a(\tilde{C}_2, 0)C_2)$ является одной из следующих:

- (A₂⁶) $\bar{S} = \mathbb{P}(1, 2, 3)$, $a(\tilde{C}_1, 0) = a(\tilde{C}_2, 0) = -\frac{6}{7}$, C_1 – прямая, заданная $\{x_1 = 0\}$, $C_2 \in |-K_X|$; кривая C_2 имеет обыкновенную двойную точку;
- (I₂²) $\bar{S} = \mathbb{P}(1, 2, 3)$, $a(\tilde{C}_1, 0) = a(\tilde{C}_2, 0) = -\frac{6}{7}$, $C_1 = \{x_3 = 0\}$, $C_2 = \{x_2^2 + a_1x_1^4 + a_2x_1^2x_2 + x_1x_3 = 0\}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

Рис. 1

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Дивизор $K_{\bar{S}} + a(\tilde{C}_1, 0)\tilde{C}_1 + a(\tilde{C}_2, 0)\tilde{C}_2$ логтерминален по Кавамате. Поэтому по теореме 1.2 в каждой точке (локально) существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение. Отсюда по определению дополнения дивизор $K_{\bar{S}} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ логканоничен. Понятно, что $-(K_{\bar{S}} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)$ не численно эффективный дивизор.

Тогда существует экстремальный луч R такой, что $(K_{\bar{S}} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \cdot R > 0$. Стягивание этого луча является бирациональным, причем не стягивается ни одна из кривых $\tilde{C}_i$. Для

доказательства этих утверждений существенно используется теорема 1.2. Повторяя эту процедуру, придем к требуемой модели $\overline{S}$.

Далее классифицируются такие модели. Накладывая условие $K_{\overline{S}} + a(\tilde{C}_1, 0)C_1 + a(\tilde{C}_2, 0)C_2 \equiv 0$, получаем только два случая для $\overline{S}$. Так как логтерминальные особенности являются рациональными, то кривые C_i должны быть рациональными. Отсюда в случае (A_2^6) кривая C_2 должна иметь обыкновенную двойную точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть S – поверхность лог Энриквеса. Минимальный индекс дополняемости I называется *каноническим индексом* S , т.е. $I = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid nK_S \sim 0\}$. Известно, что $I \leq 21$ [3], [4].

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Пусть S – поверхность лог Энриквеса с $\delta = 2$. Тогда $I = 7$.

Итак, задача классификации поверхностей лог Энриквеса с $\delta = 2$ состоит в описании следующих процедур. Сначала рассмотрим частичное разрешение $\tilde{S} \rightarrow \overline{S}$, для которого все исключительные дивизоры E имеют дискрепантность $a(E, \frac{6}{7}C_1 + \frac{6}{7}C_2) = 0$. Затем стянем собственные прообразы C_1 и C_2 . Количество таких процедур конечно ввиду следующего простого факта.

Пусть пара (X, D) логтерминальна по Кавамате. Тогда множество дивизоров E поля функций $\mathcal{K}(X)$ с дискрепантностью $a(E, D) \leq 0$ конечно [9, 3.1.9].

2. Классификация поверхностей лог Энриквеса с $\delta = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (1) Рассмотрим пару $(X, \frac{6}{7}C) \simeq (\mathbb{C}^2, \frac{6}{7}\{x = 0\})/\mathbb{Z}_2(1, 1)$. Тогда выделение для нее всех исключительных кривых с дискрепантностью 0 показано на рис. 2. Собственный прообраз C обозначен через $\overline{C}$. Числа над вершинами обозначают индексы самопересечения исключительной кривой, соответствующей вершине, а числа внизу обозначают ее дискрепантность, взятую с противоположным знаком. Пустые кружки обозначают искомые исключительные кривые с дискрепантностью 0. Их индексы самопересечения равны -1 . Отметим, что $\overline{C}^2 = C^2 - \frac{7}{2}$.

(2) Рассмотрим пару $(X, \frac{6}{7}C) \simeq (\mathbb{C}^2, \frac{6}{7}\{x = 0\})/\mathbb{Z}_3(1, 2)$. Тогда выделение для нее всех исключительных кривых с дискрепантностью 0 показано на рис. 3. Соглашения, как и в пункте (1). Отметим, что $\overline{C}^2 = C^2 - \frac{14}{3}$.

(3) Рассмотрим пару $(X, \frac{6}{7}C_1 + \frac{6}{7}C_2) \simeq (\mathbb{C}^2, \frac{6}{7}\{xy = 0\})$. Тогда выделение для нее всех исключительных кривых с дискрепантностью 0 показано на рис. 4. Соглашения, как и в пункте (1). Отметим, что $\overline{C}_i^2 = C_i^2 - 6$, если $C_1 + C_2$ является (глобально) приводимой кривой, и $\overline{C}^2 = C^2 - 14$, если $C = C_1 + C_2$ является (глобально) неприводимой кривой с обыкновенной двойной точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случаях (1) и (2) рассмотрим вначале минимальное разрешение особенностей $f: Y \rightarrow X$. Тогда $K_Y + \sum d_i D_i = f^*(K_X + \frac{6}{7}C)$, где D_i – неприводимые компоненты. Если $D_i \cdot D_j \neq 0$ для некоторых $i \neq j$ и $d_i + d_j \geq 1$, то раздуем их точку пересечения. После конечного числа таких раздутий мы выделим все исключительные дивизоры с дискрепантностью 0. Следует отметить, что дивизор с дискрепантностью 0 появляется тогда и только тогда, когда $d_i + d_j = 1$.

Из этого предложения тривиальным образом вытекают два следствия.

рис. 6. Обозначения такие же, как и в предложении 2.1. Кривые с дискрепантностью 0 заштрихованы. Их 15 штук и их индекс самопересечения равен -1 .

Рис. 6

Классификация поверхностей лог Энриквеса в случае (A_2^6) . Пусть S – поверхность лог Энриквеса с $\delta = 2$. Предположим, что соответствующая ей модель имеет тип (A_2^6) (см. теорему 1.3). Тогда поверхность S можно получить следующим образом: сначала выделим некоторый набор $\mathcal{T}$ исключительных кривых с дискрепантностью 0, а затем стянем собственные прообразы C_1 и C_2 . Итак, задача классификации таких поверхностей сводится к описанию наборов $\mathcal{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть мы выделили некоторое множество исключительных кривых $\mathcal{T}$ с дискрепантностью 0. Тогда $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$, где $\mathcal{T}_1 \subset \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T}_2 \subset \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $\mathcal{T}_3 \subset \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Каждое число обозначает соответствующую ему исключительную кривую с дискрепантностью 0 (см. рис. 5). Пусть $T_i = |\mathcal{T}_i|$ — количество элементов в множестве и $\overline{T}_i = \max\{t \mid t \in \mathcal{T}_i\}$, $T_i = \min\{t \mid t \in \mathcal{T}_i\}$.

В следующей классификационной теореме наборы для $\mathcal{I}_3$ рассматриваются с точностью до симметрии. Например, если $10 \notin \mathcal{I}_3$, то и $15 \notin \mathcal{I}_3$.

ТЕОРЕМА 2.5. В случае (A_2^6) набор $\mathcal{I}$ должен удовлетворять условию (1) и быть одним из следующих.

- (1) Если $T_1 + T_2 \geq 1$ и $T_3 \geq 1$. Если $T_1 = 0$, то $\mathcal{T}_2 \neq \{9\}$.

- (2) Пусть $T_2 = 0$ и $T_3 = 1$. Тогда $10 \in \mathcal{I}_3$.
- (3) Пусть $T_2 \geq 1$ и $T_3 = 1$. Если $\overline{T}_2 \leq 6$, то $10 \in \mathcal{I}_3$. Если $\overline{T}_2 = 7$, то $\{10, 11\} \cap \mathcal{I}_3 \neq \emptyset$. Если $\overline{T}_2 = 8$ или 9 , то $\mathcal{I}_3 \neq \emptyset$ любое.
- (4) Пусть $T_2 = 0$ и $T_3 = 2$. Тогда $10 \in \mathcal{I}_3$ либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 14\}$ и $\mathcal{I}_1 \neq \{3\}$.
- (5) Пусть $T_2 \geq 1$ и $T_3 = 2$. Тогда $10 \in \mathcal{I}_3$, либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 14\}$, либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 13\}$ и $\overline{T}_2 \geq 5$, либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 12\}$ и $\{7, 8, 9\} \cap \mathcal{I}_2 \neq \emptyset$, либо $\mathcal{I}_3 = \{12, 13\}$ и $\{8, 9\} \cap \mathcal{I}_2 \neq \emptyset$.
- (6) Пусть $T_2 = 0$ и $T_3 = 3$. Тогда $10 \in \mathcal{I}_3$ либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 12, 14\}$ и $\mathcal{I}_1 \neq \{3\}$.
- (7) Пусть $T_2 \geq 1$ и $T_3 = 3$. Тогда $10 \in \mathcal{I}_3$, либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 12, 14\}$, либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 12, 13\}$ и $\overline{T}_2 \geq 5$.
- (8) Пусть $T_2 = 0$ и $T_4 = 4$. Тогда $10 \in \mathcal{I}_3$ либо $\mathcal{I}_3 = \{11, 12, 13, 14\}$ и $\mathcal{I}_1 \neq \{3\}$.
- (9) Если $T_2 \geq 1$ и $T_3 \geq 4$ либо $T_3 \geq 5$, то подходят все случаи, конечно учитывая условие (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – выделение некоторого набора $\mathcal{T}$. Собственные прообразы C_i обозначим через $\tilde{C}_i$. Имеем $C_1^2 = \frac{1}{6}$ и $C_2^2 = 6$. Очевидное требование для набора $\mathcal{T}$ – это $\tilde{C}_i^2 < 0$. Поэтому $T_1 + T_2 \geq 1$ и $T_3 \geq 1$. Отсюда всегда $\tilde{C}_1^2 < 0$, кроме одного случая $T_1 = 0$ и $\mathcal{T}_2 = \{9\}$. Для него $\tilde{C}_1^2 = 0$. Оставшиеся случаи выписаны из требования $\tilde{C}_2^2 < 0$. При этом $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ нельзя стянуть только в случае, возникающем в условиях (4), (6), (8). Для него $T_2 = 0$, $2 \leq T_3 \leq 4$, $\mathcal{T}_1 = \{3\}$, $10 \notin \mathcal{I}_3 \supset \{11, 14\}$. На минимальном разрешении эта конфигурация изображена на рис. 7. Действительно, определитель матрицы пересечений равен 0, хотя $\tilde{C}_1^2 = \tilde{C}_2^2 = -1$.

Классификация поверхностей лог Энрикеса в случае (I_2^2) . Соглашения те же самые, что и в определении 2.4, только надо смотреть рис. 6. Случай $T_2 = 0$, $T_3 \geq 1$ симметричен случаю $T_2 \geq 1$, $T_3 = 0$ и поэтому не рассматривается.

ТЕОРЕМА 2.6. В случае (I_2^2) набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять условию (1) и быть одним из следующих.

- (1) $T_2 + T_3 \geq 1$.
- (2) Пусть $T_3 = 0$ и $T_1 = 0$. Тогда $\underline{T}_2 \leq 5$ и $9 \in \mathcal{T}_2$.
- (3) Пусть $T_3 = 0$ и $T_1 = 1$. Тогда $\mathcal{T}_1 = \{1\}$ и $9 \in \mathcal{T}_2$, либо $\mathcal{T}_1 = \{2\}$ и $\underline{T}_2 \leq 5$, либо $\mathcal{T}_1 = \{3\}$ и $4 \in \mathcal{T}_2 \cap \{8, 9\} \neq \emptyset$, либо $\mathcal{T}_1 = \{3\}$ и $\{5, 9\} \subset \mathcal{T}_2$.
- (4) Пусть $T_3 = 0$ и $T_1 = 2$. Тогда $\mathcal{T}_1 = \{1, 2\}$, либо $\mathcal{T}_1 = \{1, 3\}$ и $\mathcal{T}_2 \cap \{8, 9\}$, либо $\mathcal{T}_1 = \{2, 3\}$ и $\underline{T}_2 \leq 5$.
- (5) Пусть $T_3 = 0$ и $T_1 = 3$. Тогда подходят все случаи.
- (6) Пусть $T_2, T_3 \geq 1$ и $T_1 = 0$. Тогда набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять следующим двум условиям.
 Υ_1 . ($\underline{T}_2 \leq 5$, $\mathcal{T}_3$ любое), либо ($\underline{T}_2 = 6$, $\underline{T}_3 \leq 14$), либо ($7 \leq \underline{T}_2 \leq 8$, $\underline{T}_3 \leq 12$),
либо ($\underline{T}_2 = 9$, $\underline{T}_3 \leq 11$).
 Υ_2 . ($\overline{T}_2 = 4$, $T_3 = 15$), либо ($5 \leq \overline{T}_2 \leq 7$, $\overline{T}_3 \geq 14$), либо ($\overline{T}_2 = 8$, $\overline{T}_3 \geq 11$),
либо ($\overline{T}_2 = 9$, $\mathcal{T}_3$ любое).
- (7) Пусть $T_2, T_3 \geq 1$ и $\mathcal{T}_1 = \{1\}$. Тогда набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять условию Υ_2 .
- (8) Пусть $T_2, T_3 \geq 1$ и $2 \in \mathcal{T}_1$. Тогда набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять условию Υ_1 .

- (9) Пусть $T_2, T_3 \geq 1$ и $\mathcal{T}_1 = \{3\}$. Тогда набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять условию Υ_1 и следующему условию Υ_3 .
 Υ_3 . ($\overline{T_2} = 4, \overline{T_3} \geq 14$), либо ($5 \leq \overline{T_2} \leq 6, \overline{T_3} \geq 13$), либо ($\overline{T_2} = 7, \overline{T_3} \geq 11$),
 либо ($\overline{T_2} \geq 8, \mathcal{T}_3$ любое).
- (10) Пусть $T_2, T_3 \geq 1$ и $\{1, 2\} \subset \mathcal{T}_1$. Тогда подходят все случаи.
- (11) Пусть $T_2, T_3 \geq 1$ и $\mathcal{T}_1 = \{1, 3\}$. Тогда набор $\mathcal{T}$ должен удовлетворять условию Υ_3 .

Рис. 7

Рис. 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – выделение некоторого набора $\mathcal{T}$. Собственные прообразы C_i обозначим через $\tilde{C}_i$. Имеем $C_1^2 = \frac{3}{2}$ и $C_2^2 = \frac{8}{3}$. Если $T_2 = T_3 = 0$, то $\tilde{C}_1^2 < 0$ и $\tilde{C}_2^2 < 0$ только в случае $\{1, 2\} \subset \mathcal{T}_1$. На минимальном разрешении имеем конфигурацию, изображенную на рис. 8. Определитель матрицы пересечений равен 0 и поэтому всегда $T_2 + T_3 \geq 1$. Оставшиеся условия выписаны из требований $\tilde{C}_1^2 < 0$ и $\tilde{C}_2^2 < 0$. При этом $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ нельзя стянуть только в следующем случае: $T_3 = 0$, $\mathcal{T}_1 = \{3\}$, $\overline{T_2} = 5, \overline{T_2} = 8$. Эта конфигурация изображена на рис. 7; она возникает в случае (3).

Из теорем 2.5 и 2.6 имеем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть S – поверхность лог Энриквеса с $\delta = 2$. Тогда $1 \leq \rho(S) \leq 14$.

Поверхности лог Энриквеса и K3 поверхности. Пусть S – поверхность лог Энриквеса с $\delta = 2$. Рассмотрим ее каноническое накрытие $\varphi: \hat{S} = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\bigoplus_{i=0}^{I-1} \mathcal{O}_S(-iK_S)) \rightarrow S$, где I – индекс S . Так как $I = 7$ (следствие 1.5), то $\hat{S}$ – K3 поверхность не хуже, чем с дювалевскими особенностями [3], [4] и

- (1) φ – накрытие Галуа степени 7, этальное над $S - \text{Sing } S$;
- (2) существует образующая g группы Галуа $\text{Gal}(\hat{S}/S) \cong \mathbb{Z}_7$ такая, что $g^* \omega_{\hat{S}} = \varepsilon_7 \omega_{\hat{S}}$, где ε_7 – первообразный корень степени 7 из 1, а $\omega_{\hat{S}}$ – нигде ненулевая регулярная 2-форма на $\hat{S}$.

Пусть $\Delta(S)$ – исключительное множество χ , где χ – минимальное разрешение $\hat{S}$. Тогда $\Delta(S)$ является объединением непересекающихся дивизоров Дынкинских типов $\mathbb{A}_i, \mathbb{D}_j, \mathbb{E}_k$. Итак, $\Delta(S) = (\oplus \mathbb{A}_\alpha) \oplus (\oplus \mathbb{D}_\beta) \oplus (\oplus \mathbb{E}_\gamma)$. Определим $\text{rank } \Delta(S) = \sum \alpha + \sum \beta + \sum \gamma$.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть S – поверхность лог Энриквеса с $\delta = 2$. Тогда $\text{rank } \Delta(S) + \rho(S) = 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, 15\}$. Поверхность, соответствующую этому набору, обозначим через S' . Тогда в случаях (A_6^2) и (I_2^2) имеем один и тот же тип $\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_1$, т.е. $\text{rank } \Delta(S') + \rho(S') = 2 + 14 = 16$. Любая поверхность S получается из S' стягиванием некоторых кривых из набора $\mathcal{T}$. При стягивании каждой кривой $\text{rank } \Delta$ увеличивается на 1. Поэтому требуемое равенство сохраняется.

ПРИМЕР 2.9. Пусть $\mathcal{S} = \{8, 12\}$. Тогда $\rho(S) = 1$ и $\Delta(S) = \mathbb{E}_7 \oplus \mathbb{E}_8$ в обоих случаях (A_2^6) и (I_2^2) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Другой подход к описанию поверхностей лог Энриквеса смотрите в [5]. В частности, см. [5, § 5] в случае поверхностей индекса 7.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shokurov V. V. Complements on surfaces // J. Math. Sci. 2000. V. 102. № 2. P. 3876–3932.
- [2] Кудрявцев С. А. Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей, I // Изв. РАН. 2002. Т. 66. № 5; // E-print [math.AG/0201025](#), 2002.
- [3] Blache R. The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 137–179.
- [4] Zhang D.-Q. Logarithmic Enriques surfaces // J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31. P. 419–466.
- [5] Zhang D.-Q. Logarithmic Enriques surfaces, II // J. Math. Kyoto Univ. 1993. V. 33. P. 357–397.
- [6] Oguiso K., Zhang D.-Q. On Vorontsov's theorem on K3 surfaces with non-symplectic group actions // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 1571–1580.
- [7] Oguiso K., Zhang D.-Q. K3 surfaces with order 11 automorphisms // E-print [math.AG/9907020](#), 1999.
- [8] Kollar J. *et al.* Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Astérisque. V. 211. Paris: Soc. Math. France, 1992.
- [9] Prokhorov Yu. G. Lectures on Complements on Log Surfaces. MSJ Memoirs. V. 10, 2001.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 E-mail: kudryav@mech.math.msu.su

Поступило
 07.05.2002