Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Локоть, Константы сильной единственности минимальных проекций на гиперплоскости в пространстве ℓ_∞^n ($n \geq 3$), *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 723–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:24:54

УДК 513.88

КОНСТАНТЫ СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_∞^n ($n \geq 3$)

В. В. Локоть

В работе найдены максимальные значения констант сильной единственности минимальных проекций с неединичной нормой на гиперплоскости в пространстве ℓ_∞^n ($n \geq 3$).
Библиография: 3 названия.

Пусть ℓ_∞^n – n -мерное линейное нормированное пространство элементов $x = (x_i)_{i=1}^n$ с нормой $\|x\| = \max |x_i|$, $f = (f_i)_{i=1}^n$ – линейный функционал в ℓ_∞^n , $f \neq 0$, $\|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i|$, $f^{-1}(0) = \{x \in \ell_\infty^n \mid f(x) = \sum_{i=1}^n f_i x_i = 0\}$ – гиперплоскость в ℓ_∞^n .

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [1, леммы 1, 2]. *Любая проекция $\pi_\alpha: \ell_\infty^n \rightarrow f^{-1}(0)$ имеет вид $\pi_\alpha x = x - \alpha f(x)$, $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \ell_\infty^n$, $f(\alpha) = 1$; $\|\pi_\alpha\| = \max T_i$, где*

$$T_i = \sum_{j=1}^n |\delta_{ij} - \alpha_i f_j| = |1 - \alpha_i f_i| + |\alpha_i|(1 - |f_i|).$$

Через Π обозначим множество всех операторов проектирования $\pi_\alpha: \ell_\infty^n \rightarrow f^{-1}(0)$.

В силу симметричности пространства ℓ_∞^n без уменьшения общности будем считать $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [1, теоремы 1, 2]. *Условие $f_n \geq 1/2$ является необходимым и достаточным для существования оператора $\pi_\alpha \in \Pi$ с единичной нормой.*

Если же $f_n < 1/2$, то норма минимальной проекции $\pi_\alpha^{(0)} \in \Pi$ равна $1 + u$, где

$$u = \left(\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} \right)^{-1},$$

$$u \alpha_i^{(0)} = u / (1 - 2f_i).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [2]. *Условие $0 < f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n < 1/2$ является необходимым и достаточным для единственности минимальной проекции $\pi_\alpha \in \Pi$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $\pi_\alpha^{(0)} \in \Pi$ называется *сильно единственным*, если существует число $r \in (0; 1]$ такое, что неравенство

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| + r\|\pi_\alpha - \pi_\alpha^{(0)}\| \leq \|\pi_\alpha\| \quad (1)$$

выполняется для любого $\pi_\alpha \in \Pi$.

Очевидно, что сильно единственный оператор обладает свойством минимальности и единственности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 [3, с. 59]. *Любая минимальная проекция $\pi_\alpha^{(0)} \in \Pi$ с неединичной нормой, обладающая свойством единственности, является и сильно единственной.*

ТЕОРЕМА. *Максимальное значение константы сильной единственности r минимальной проекции $\pi_\alpha^{(0)} \in \Pi$ равно $uf_1(1 - 2f_1)/(1 - 2f_1 - uf_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала получим оценку r сверху.

Для этого определим оператор $\tilde{\pi}_\alpha \in \Pi$ следующим образом.

Положим $0 < \tilde{\alpha}_1 < \alpha_1^{(0)}$, $\tilde{\alpha}_i > \alpha_i^{(0)}$, $i = 2, \dots, n$. В силу условий $\tilde{\alpha}_i > 0$, $f_i > 0$, $\sum_{i=1}^n f_i \tilde{\alpha}_i = 1$ имеем $\tilde{T}_i = 1 + \tilde{\alpha}_i(1 - 2f_i)$, $i = 1, \dots, n$. Потребуем выполнения условия $\tilde{T}_2 = \tilde{T}_3 = \dots = \tilde{T}_n$.

Из равенств

$$\tilde{T}_i = \tilde{T}_n \iff 1 + \tilde{\alpha}_i(1 - 2f_i) = 1 + \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n)$$

выразим $\tilde{\alpha}_i$ через $\tilde{\alpha}_n$. Получим

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_n \frac{1 - 2f_n}{1 - 2f_i}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Значение $\tilde{\alpha}_1$ найдем из условия

$$\sum_{i=1}^n f_i \tilde{\alpha}_i = 1 \iff \tilde{\alpha}_1 f_1 = 1 - \sum_{i=2}^n \frac{\tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n)}{1 - 2f_i} f_i,$$

откуда

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{f_1} \left(1 - \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \left(u^{-1} - \frac{f_1}{1 - 2f_1} \right) \right).$$

Покажем, что $\tilde{T}_1 < \tilde{T}_n$. Действительно,

$$\begin{aligned} & 1 + \tilde{\alpha}_1(1 - 2f_1) < 1 + \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \\ \iff & \left(1 - \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \left(u^{-1} - \frac{f_1}{1 - 2f_1} \right) \right) (1 - 2f_1) < \tilde{\alpha}_n f_1 (1 - 2f_n) \\ \iff & 1 - 2f_1 < \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \left(f_1 + \left(u^{-1} - \frac{f_1}{1 - 2f_1} \right) (1 - 2f_1) \right) \\ \iff & \tilde{\alpha}_n > \frac{u}{1 - 2f_n} = \alpha_n^{(0)}. \end{aligned}$$

Получили верное неравенство.

Таким образом, $\|\tilde{\pi}_\alpha\| = \max \tilde{T}_i = \tilde{T}_n = 1 + \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n)$.

Так как для любого $x \in \ell_\infty^n$ с единичной нормой

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n |f_i| = 1,$$

а для элемента $x = (\operatorname{sgn} f_i)_{i=1}^n$ $|f(x)| = 1$, то

$$\|\pi_\alpha - \pi_\alpha^{(0)}\| = \sup \| (x - \alpha f(x)) - (x - \alpha^{(0)} f(x)) \| = \sup |f(x)| \|\alpha - \alpha^{(0)}\| = \max B_i,$$

где $B_i = |\alpha_i - \alpha_i^{(0)}|$, $i = 1, \dots, n$.

По построению оператора $\tilde{\pi}_\alpha$ имеем $\tilde{B}_1 = \alpha_1^{(0)} - \tilde{\alpha}_1 = \varepsilon_1 > 0$, $\tilde{B}_i = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)} = \varepsilon_i > 0$, $i = 2, \dots, n$. Из условия $f(\alpha) = 1$ получим

$$0 = \sum_{i=1}^n f_i \tilde{\alpha}_i - \sum_{i=1}^n f_i \alpha_i^{(0)} = \sum_{i=2}^n f_i \varepsilon_i - f_1 \varepsilon_1,$$

откуда

$$f_1 \varepsilon_1 = \sum_{i=2}^n f_i \varepsilon_i.$$

Если $1 < i < j \leq n$, то

$$f_i \leq f_j \iff \frac{1}{1 - 2f_i} \leq \frac{1}{1 - 2f_j},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i - \tilde{B}_j &= \varepsilon_i - \varepsilon_j = (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)}) - (\tilde{\alpha}_j - \alpha_j^{(0)}) \\ &= \left(\frac{\tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n)}{1 - 2f_i} - \frac{u}{1 - 2f_i} \right) - \left(\frac{\tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n)}{1 - 2f_j} - \frac{u}{1 - 2f_j} \right) \\ &= (\tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) - u) \left(\frac{1}{1 - 2f_i} - \frac{1}{1 - 2f_j} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Итак, $\tilde{B}_2 \leq \tilde{B}_3 \leq \dots \leq \tilde{B}_n$. Сравним теперь $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_n$. Покажем, что $\tilde{B}_1 \geq \tilde{B}_n$. Из равенства

$$f_1 \varepsilon_1 = \sum_{i=2}^n f_i \varepsilon_i$$

следует, что

$$f_1 \varepsilon_1 \geq f_1 \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \iff \varepsilon_1 \geq \sum_{i=2}^n \varepsilon_i,$$

откуда $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_n \iff \tilde{B}_1 \geq \tilde{B}_n$.

Следовательно, $\|\tilde{\pi}_\alpha - \pi_\alpha^{(0)}\| = \tilde{B}_1 = \alpha_1^{(0)} - \tilde{\alpha}_1$.

Подставим значения $\|\tilde{\pi}_\alpha\|$ и $\|\tilde{\pi}_\alpha - \pi_\alpha^{(0)}\|$ в (1). Получим

$$\begin{aligned} 1 + u + r(\alpha_1^{(0)} - \tilde{\alpha}_1) &\leq 1 + \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \\ \Leftrightarrow u + r \left(\frac{u}{1 - 2f_1} - \frac{1}{f_1} \left(1 - \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \left(u^{-1} - \frac{f_1}{1 - 2f_1} \right) \right) \right) &\leq \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) \\ \Leftrightarrow r \frac{1 - 2f_1 - uf_1}{uf_1(1 - 2f_1)} (\tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) - u) &\leq \tilde{\alpha}_n(1 - 2f_n) - u, \end{aligned}$$

откуда

$$r \leq \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1}.$$

Неравенство $1 - 2f_1 - uf_1 > 0$ следует из того, что

$$\frac{1}{u} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} > \frac{f_1}{1 - 2f_1}.$$

2) Теперь докажем, что неравенство

$$\begin{aligned} 1 + u + \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \max B_i &\leq \max T_i \\ \Leftrightarrow 1 + u + \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \max |\alpha_i - \alpha_i^{(0)}| &\leq \max \{ |1 - \alpha_i f_i| + |\alpha_i|(1 - f_i) \} \end{aligned} \quad (2)$$

выполняется для любых $\alpha_i \in \mathbb{R}$ таких, что $f(\alpha) = 1$.

Пусть $\max B_i = B_s = |\alpha_s - \alpha_s^{(0)}|$. Рассмотрим два случая:

- а) $\alpha_s \geq \alpha_s^{(0)}$;
- б) $\alpha_s \leq \alpha_s^{(0)}$.

а) Так как

$$\|\pi_\alpha\| = \max T_i \geq T_s = |1 - \alpha_s f_s| + |\alpha_s|(1 - f_s) \geq 1 + \alpha_s(1 - 2f_s),$$

то достаточно доказать неравенство

$$\begin{aligned} 1 + u + \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} (\alpha_s - \alpha_s^{(0)}) &\leq 1 + \alpha_s(1 - 2f_s) \\ \Leftrightarrow \alpha_s \left(1 - 2f_s - \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \right) &\geq u \left(1 - \frac{f_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \cdot \frac{u}{1 - 2f_s} \right). \end{aligned}$$

Поделив левую и правую части неравенства на

$$\frac{(1 - 2f_1 - uf_1)(1 - 2f_s) - uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1},$$

получим $\alpha_s \geq u/(1 - 2f_s) = \alpha_s^{(0)}$ – верное неравенство.

Неравенство

$$(1 - 2f_1 - uf_1)(1 - 2f_s) - uf_1(1 - 2f_1) > 0 \iff \frac{1}{u} > \frac{2f_1(1 - f_1 - f_s)}{(1 - 2f_1)(1 - 2f_s)}$$

следует из того, что

$$\frac{1}{u} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} > \frac{f_1}{1 - 2f_1} + \frac{f_s}{1 - 2f_s} \geq \frac{2f_1(1 - f_1 - f_s)}{(1 - 2f_1)(1 - 2f_s)}.$$

б) Правую часть неравенства (2) оценим снизу следующим образом:

$$\|\pi_\alpha\| = \max_i T_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_i T_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_i (1 + \alpha_i(1 - 2f_i)),$$

где

$$\mu_i \geq 0, \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_i = 1.$$

Положим

$$\mu_i = \frac{tf_i}{1 - 2f_i}.$$

Значение t найдем из условия

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_i = 1 &\iff t \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} = 1 \\ &\iff t \left(\frac{1}{u} - \frac{f_s}{1 - 2f_s} \right) = 1 \iff t = \frac{u(1 - 2f_s)}{1 - 2f_s - uf_s}. \end{aligned}$$

Остается доказать неравенство

$$\begin{aligned} 1 + u + \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1}(\alpha_s^{(0)} - \alpha_s) &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \mu_i (1 + \alpha_i(1 - 2f_i)) \\ &\iff u + \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \left(\frac{u}{1 - 2f_s} - \alpha_s \right) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \frac{u(1 - 2f_s)\alpha_i f_i}{1 - 2f_s - uf_s} \\ &\iff 1 + \frac{f_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \left(\frac{u}{1 - 2f_s} - \alpha_s \right) \leq \frac{1 - 2f_s}{1 - 2f_s - uf_s} (1 - \alpha_s f_s) \\ &\iff \frac{f_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \left(\frac{u}{1 - 2f_s} - \alpha_s \right) \leq \frac{f_s(u - (1 - 2f_s)\alpha_s)}{1 - 2f_s - uf_s} \\ &\iff \frac{f_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1} \leq \frac{f_s(1 - 2f_s)}{1 - 2f_s - uf_s} \\ &\iff (f_s - f_1)((1 - 2f_1)(1 - 2f_s) + 2f_1 f_s u) \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [3] получена оценка снизу для константы сильной единственности

$$r \geq \frac{(1 - 2f_n)f_1}{1 - f_1}.$$

Покажем, что

$$\frac{(1 - 2f_n)f_1}{1 - f_1} \leq \frac{uf_1(1 - 2f_1)}{1 - 2f_1 - uf_1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (1 - 2f_n)(1 - 2f_1 - uf_1) &\leq u(1 - 2f_1)(1 - f_1) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} (1 - 2f_n)(1 - 2f_1) &\leq (1 - 2f_1)(1 - f_1) + f_1(1 - 2f_n) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=2}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} (1 - 2f_n) &\leq 1 - f_1. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{i=2}^n \frac{f_i}{1 - 2f_i} (1 - 2f_n) \leq \sum_{i=2}^n f_i = 1 - f_1,$$

то неравенство доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blatter J., Cheney E. W. Minimal projections onto hyperplanes in sequence spaces // Ann. Mat. Pura Appl. 1974. V. 101. P. 215–217.
- [2] Odinnec V. P. On the uniqueness of minimal projections in ℓ_∞^n ($n \geq 3$) // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. № 7–8. P. 347–350.
- [3] Lewicki G. Best Approximation in Spaces of Bounded Linear Operators. Diss. Math. V. XXXCCC. Warszawa, 1994.

Мурманский государственный педагогический институт

Поступило
25.07.2001