Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, О приближении многочленами Бернштейна в точках разрыва производных, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 622–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 04:17:46

О приближении многочленами Бернштейна в точках разрыва производных

С. А. Теляковский

Доказано, что в асимптотических формулах для уклонений многочленов Бернштейна от функций в точках разрыва первого рода старшей производной четного порядка значение такой производной можно заменить на полусумму ее пределов справа и слева.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Работа посвящена вопросу о распространении асимптотических формул для уклонений многочленов Бернштейна от дифференцируемых функций на случай, когда старшая производная функции имеет в исследуемой точке разрыв первого рода.

Пусть $f(x)$ – ограниченная на $[0, 1]$ функция и

$$B_n(f, x) := \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) \rho_{n,\nu}(x), \quad \rho_{n,\nu} := \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu},$$

– ее многочлены Бернштейна.

Известно (см., например, [1; теорема 1.1.1]), что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то ее многочлены Бернштейна в этой точке при $n \rightarrow \infty$ сходятся к $f(x_0)$. Хлодовский показал [2; раздел 1, теорема 1.9.1], что если x_0 – точка разрыва первого рода функции f , то многочлены $B_n(f, x_0)$ сходятся к полусумме пределов справа и слева функции f в точке x_0 .

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in [0, 1]$ производную порядка $2i$, $i = 1, 2, \dots$, то согласно результатам Е. В. Вороновской (при $i = 1$) и С. Н. Бернштейна (при $i \geq 2$) для уклонений многочленов Бернштейна $B_n(f, x_0)$ от $f(x_0)$ справедливы асимптотические формулы (см. [1; п. 1.6.1])

$$f(x_0) - B_n(f, x_0) = - \sum_{j=2}^{2i-1} \frac{T_{n,j}(x_0)}{j! n^j} f^{(j)}(x_0) - \frac{1}{i!} \left(\frac{x_0(1-x_0)}{2} \right)^i \frac{1}{n^i} f^{(2i)}(x_0) + o\left(\frac{1}{n^i}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00598) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3810.2008.01).

где

$$T_{n,j}(x) := \sum_{\nu=0}^n (\nu - nx)^j \rho_{n,\nu}(x).$$

Здесь производные понимаются как производные в смысле Пеано.

В настоящей работе показано, что значение производной $f^{(2i)}(x_0)$ в (1.1) можно заменить на полусумму правой и левой производных порядка $2i$ в точке x_0 , если такие односторонние производные существуют.

2. Вспомогательные утверждения. Нам понадобятся следующие предложения.

ЛЕММА 1. Пусть $x \in (0, 1)$, $\delta_n = n^{-2/5}$ и

$$s_{n,i}(x) := \sum_{\nu} \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где суммирование ведется по ν , удовлетворяющим условию $0 < \nu/n - x \leq \delta_n$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^i s_{n,i}(x) = \frac{1}{2} \frac{(2i)!}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2} \right)^i. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $i = 0$ это утверждение доказано в [1; с. 18]. Наши рассуждения для произвольного i будут идти по той же схеме.

Согласно теореме 1.5.2 из [1], если $\alpha > 1/3$, то при каждом $x \in (0, 1)$ равномерно относительно ν , удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{\nu}{n} - x \right| \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_{n,\nu}(x)}{P_{n,\nu}(x)} = 1,$$

в котором

$$P_{n,\nu}(x) = \left(\frac{1}{2\pi x(1-x)n} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{n}{2x(1-x)} \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^2 \right].$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно указанных ν имеет место соотношение эквивалентности

$$\left(\frac{\nu}{n} - x \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x) \approx \left(\frac{n}{2\pi x(1-x)} \right)^{1/2} \int_{\nu/n}^{(\nu+1)/n} (u-x)^{2i} \exp \left[-\frac{n}{2x(1-x)} (u-x)^2 \right] du.$$

Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} s_{n,i}(x) &\approx \left(\frac{n}{2\pi x(1-x)} \right)^{1/2} \int_x^{x+\delta_n} (u-x)^{2i} \exp \left[-\frac{n}{2x(1-x)} (u-x)^2 \right] du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2x(1-x)}{n} \right)^i \int_0^{B_n} v^{2i} e^{-v^2} dv, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$B_n = \delta_n n^{1/2} (2x(1-x))^{-1/2}.$$

В силу выбора δ_n имеем $B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому из (2.2) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^i s_{n,i}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x(1-x))^i \int_0^{+\infty} v^{2i} e^{-v^2} dv. \quad (2.3)$$

Так как (см., например, [3; с. 756])

$$\int_0^{+\infty} v^{2i} e^{-v^2} dv = \frac{(2i)!}{i!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2i+1}},$$

то (2.3) равносильно (2.1).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть точка $x \in (0, 1)$, n, i – натуральные числа и N_+ – множество целых ν таких, что $n x < \nu \leq n$, а N_- – множество целых ν таких, что $0 \leq \nu < n x$. Тогда справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^i \sum_{\nu} \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x) = \frac{1}{2} \frac{(2i)!}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2} \right)^i, \quad (2.4)$$

где суммирование ведется или по $\nu \in N_+$ или по $\nu \in N_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [1; теорема 1.5.1], что функция $T_{n,2i}(x)$ является многочленом относительно n степени i , старший коэффициент которого равен

$$\frac{(2i)!}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2} \right)^i.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^i \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x) = \frac{(2i)!}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2} \right)^i. \quad (2.5)$$

Заметим, что если число $n x$ является целым, то оно не входит ни в N_+ , ни в N_- . Так как слагаемое при $\nu = n x$ в сумме из левой части (2.5) равно нулю, то эту сумму можно представить в виде

$$\sum_{\nu \in N_+} + \sum_{\nu \in N_-}.$$

Таким образом, достаточно установить равенство (2.4), когда суммирование ведется или по N_+ , или по N_- . Докажем (2.4) для случая $\nu \in N_+$.

Положим $\delta_n = n^{-2/5}$ и разобьем сумму из (2.4) на две. Пусть $\sum_{(1)}$ – сумма по $\nu \in N_+$, для которых $\nu/n - x \leq \delta_n$, а $\sum_{(2)}$ – сумма по $\nu \in N_+$, для которых $\nu/n - x > \delta_n$.

Согласно лемме 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^i \sum_{(1)} \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x) = \frac{1}{2} \frac{(2i)!}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2} \right)^i. \quad (2.6)$$

При оценке суммы $\sum_{(2)}$ используем следующий результат [1; теорема 1.5.3]: если $x \in (0, 1)$ и

$$0 \leq z \leq \frac{3}{2} \sqrt{nx(1-x)}, \quad (2.7)$$

то

$$\sum_{\nu} \rho_{n,\nu}(x) \leq 2e^{-z^2}, \quad (2.8)$$

где суммирование ведется по ν таким, что

$$|\nu - nx| \geq 2z \sqrt{nx(1-x)}. \quad (2.9)$$

Положим

$$z = \frac{3}{2} (nx(1-x))^{1/4}.$$

Тогда условия (2.7) и (2.9) имеют соответственно вид

$$(nx(1-x))^{1/4} \leq (nx(1-x))^{1/2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\nu}{n} - x \right| \geq 3 \left(\frac{x^3(1-x)^3}{n} \right)^{1/4}.$$

Для чисел ν , входящих в $\sum_{(2)}$, обе эти оценки выполняются, если n достаточно велико.

Значит, согласно (2.8) при таких n справедлива оценка

$$\sum_{(2)} \left(\frac{\nu}{n} - x \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x) \leq \sum_{(2)} \rho_{n,\nu}(x) \leq 2 \exp \left[-\frac{9}{4} (nx(1-x))^{1/2} \right],$$

которая вместе с (2.6) приводит к (2.4).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть точка $x_0 \in (0, 1)$ и

$$J_{n,s}(v, x_0) := \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^s v \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right) \rho_{n,\nu}(x_0), \quad s = 2, 3, \dots,$$

где функция $v(t)$ удовлетворяет условию

$$|v(t)| \leq \omega(|t|), \quad (2.10)$$

в котором $\omega(\delta)$ – некоторый модуль непрерывности. Тогда при

$$n \geq \frac{1}{x_0(1-x_0)}$$

справедлива оценка

$$|J_{n,s}(v, x_0)| \leq \frac{C(s)}{n^{s/2}} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad (2.11)$$

множитель $C(s)$ в которой зависит только от s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для $\delta > 0$ и произвольной точки x из $[0, 1]$

$$\lambda(x, x_0; \delta) := \left\lceil \frac{|x - x_0|}{\delta} \right\rceil.$$

Тогда

$$\omega(|x - x_0|) \leq \omega(\delta \cdot (\lambda(x, x_0; \delta) + 1)) \leq (\lambda(x, x_0; \delta) + 1) \omega(\delta) \leq \left(\frac{|x - x_0|}{\delta} + 1 \right) \omega(\delta).$$

Пользуясь (2.10) и этой оценкой, находим

$$|J_{n,s}(v, x_0)| \leq \left[\frac{1}{\delta} \sum_{\nu=0}^n \left| \frac{\nu}{n} - x_0 \right|^{s+1} \rho_{n,\nu}(x_0) + \sum_{\nu=0}^n \left| \frac{\nu}{n} - x_0 \right|^s \rho_{n,\nu}(x_0) \right] \omega(\delta). \quad (2.12)$$

В [1; с. 15, формула (9)] доказано, что если $\alpha > 0$, то

$$\sum_{\nu=0}^n \left| \frac{\nu}{n} - x_0 \right|^\alpha \rho_{n,\nu}(x_0) \leq \frac{A_\alpha}{n^{\alpha/2}},$$

где множитель A_α зависит только от α .

Поэтому из (2.12) следует, что

$$|J_{n,s}(v, x_0)| \leq \left[\frac{A_{s+1}}{\delta n^{(s+1)/2}} + \frac{A_s}{n^{s/2}} \right] \omega(\delta).$$

Отсюда при $\delta = 1/\sqrt{n}$ получаем (2.11).

Лемма доказана.

Так как для каждой функции $v(t)$, сходящейся к нулю при $t \rightarrow 0$, существует модуль непрерывности $\omega(\delta)$, для которого выполняется оценка (2.10), то из (2.11) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_{n,2i}(v, x_0) = o\left(\frac{1}{n^i}\right). \quad (2.13)$$

3. Случай, когда разрывна производная четного порядка.

ТЕОРЕМА. Пусть у функции $f(x)$ в точке $x_0 \in (0, 1)$ существуют производные в смысле Пеано до порядка $2i - 1$, $i = 1, 2, \dots$, и при всех t таких, что точки $x_0 + t$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, имеют место представления

$$f(x_0 + t) = \sum_{j=0}^{2i-1} \frac{1}{j!} t^j f^{(j)}(x_0) + \frac{t^{2i}}{(2i)!} (f^{(2i)}(x_0 + 0) + v(t)), \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$f(x_0 + t) = \sum_{j=0}^{2i-1} \frac{1}{j!} t^j f^{(j)}(x_0) + \frac{t^{2i}}{(2i)!} (f^{(2i)}(x_0 - 0) + v(t)), \quad t < 0, \quad (3.2)$$

где функция $v(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Тогда для уклонений многочленов Бернштейна от функции f в точке x_0 справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} f(x_0) - B_n(f, x_0) &= - \sum_{j=2}^{2i-1} \frac{T_{n,j}(x_0)}{j!n^j} f^{(j)}(x_0) - \frac{1}{i!n^i} \left(\frac{x_0(1-x_0)}{2} \right)^i \frac{f^{(2i)}(x_0+0) + f^{(2i)}(x_0-0)}{2} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{n^i}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и в лемме 2, N_+ – множество целых ν , для которых $n x < \nu \leq n$, а N_- – множество целых ν , для которых $0 \leq \nu < n x$.

С помощью представлений (3.1) и (3.2) получаем

$$\begin{aligned} f(x_0) - B_n(f, x_0) &= \sum_{\nu=0}^n \left(f(x_0) - f\left(\frac{\nu}{n}\right) \right) \rho_{n,\nu}(x_0) \\ &= - \sum_{\nu=0}^n \sum_{j=1}^{2i-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^j f^{(j)}(x_0) \rho_{n,\nu}(x_0) \\ &\quad - \sum_{\nu \in N_+} \frac{1}{(2i)!} \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^{2i} \left[f^{(2i)}(x_0+0) + v\left(\frac{\nu}{n} - x_0\right) \right] \rho_{n,\nu}(x_0) \\ &\quad - \sum_{\nu \in N_-} \frac{1}{(2i)!} \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^{2i} \left[f^{(2i)}(x_0-0) + v\left(\frac{\nu}{n} - x_0\right) \right] \rho_{n,\nu}(x_0). \end{aligned}$$

Поскольку $T_{n,1}(x) \equiv 0$, отсюда находим

$$\begin{aligned} f(x_0) - B_n(f, x_0) &= - \sum_{j=2}^{2i-1} \frac{T_{n,j}(x_0)}{j!n^j} f^{(j)}(x_0) \\ &= - \sum_{\nu \in N_+} \frac{1}{(2i)!} \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x_0) f^{(2i)}(x_0+0) \\ &\quad - \sum_{\nu \in N_-} \frac{1}{(2i)!} \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^{2i} \rho_{n,\nu}(x_0) f^{(2i)}(x_0-0) \\ &\quad - \frac{1}{(2i)!} \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{\nu}{n} - x_0 \right)^{2i} v\left(\frac{\nu}{n} - x_0\right) \rho_{n,\nu}(x_0). \end{aligned}$$

Применяя к трем последним суммам из правой части этого равенства оценки (2.4) и (2.13), приходим к (3.3).

Теорема доказана.

4. Случай, когда разрыв имеет первая производная. Покажем на примере первой производной, что в теореме условие, что разрыв имеет производная четного порядка, было по существу.

В [4; теорема 1] доказано, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 первую производную, то

$$f(x_0) - B_n(f, x_0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Рассмотрим приближение многочленами Бернштейна в точке $1/2$ функции

$$f^*(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Пусть $n \geq 2$ и $m := [n/2]$. Покажем, что

$$f^*\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(f^*, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2m+1}} \binom{2m}{m}. \quad (4.2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} B_n\left(f^*, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^n} \left[\sum_{\nu=0}^m \frac{\nu}{n} \binom{n}{\nu} + \sum_{\nu=m+1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\sum_{\nu=0}^m \frac{\nu}{n} \binom{n}{\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \frac{\nu}{n} \binom{n}{\nu} \right]. \end{aligned}$$

Если $n = 2m + 1$, то

$$B_n\left(f^*, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\nu=0}^m \frac{\nu}{n} \binom{n}{\nu} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\nu=1}^m \binom{n-1}{\nu-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{2m}{\nu}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$2 \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{2m}{\nu} = 2^{2m} - \binom{2m}{m}.$$

Следовательно, для нечетных n равенство (4.2) доказано.

Если $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} B_n\left(f^*, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^n} \left[2 \sum_{\nu=0}^m \frac{\nu}{n} \binom{n}{\nu} - \frac{m}{n} \binom{n}{m} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[2 \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{2m-1}{\nu} - \frac{1}{2} \binom{2m}{m} \right] = \frac{1}{2^n} \left[2^{2m-1} - \frac{1}{2} \binom{2m}{m} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость равенства (4.2) при четных n .

С помощью формулы Стирлинга находим

$$\binom{2m}{m} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} (1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty.$$

Значит, при $n \rightarrow \infty$

$$f^*\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(f^*, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом, в точке разрыва первого рода производной функции $f^*(x)$ оценка (4.1) не выполняется.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Chelsea Publ., New York, 1986.
- [2] I. Chlodovsky, “Sur la représentation des fonctions discontinues par les polynômes de M. S. Bernstein”, *Fund. Math.*, **13** (1929), 62–72.
- [3] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. 2, Физматлит, М., 2002.
- [4] С. А. Теляковский, “О приближении дифференцируемых функций многочленами Бернштейна и многочленами Канторовича”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, Наука, М., 2008, 289–296.

С. А. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

14.03.2008

Исправленный вариант

22.04.2008