Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Бударина, Проблема Малера в поле комплексных чисел с немонотонной правой частью, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 812–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 05:13:18

Проблема Малера в поле комплексных чисел с немонотонной правой частью

Н. В. Бударина

В последние двадцать лет был установлен точный порядок приближения нуля модулями значений целочисленных многочленов от действительной и комплексной переменной. Однако в случае сходимости ряда, состоящего из правых частей неравенств, в классической теореме Хинчина условие монотонности правой части можно опустить. В данной работе показано, что в комплексном случае условие монотонности несущественно и для многочленов произвольной степени.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm4612

Пусть

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

– целочисленный многочлен степени n и высоты $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Обозначим через P_n множество целочисленных многочленов степени, не превосходящей n . Через μA обозначим меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{C}$.

Обозначим через $\mathcal{M}_n(w)$ множество комплексных чисел z , для которых неравенство

$$|P(z)| < H(P)^{-w} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in P_n$. Нетрудно доказать, используя принцип ящиков Дирихле, что при $w < (n-1)/2$ имеем $\mathcal{M}_n(w) = \mathbb{C}$.

В 1932 г. Малер [1] выдвинул гипотезу, что $\mu \mathcal{M}_n(w) = 0$ при $w > (n-1)/2$. Эта гипотеза была доказана Спринджуком (см. [2], [3]).

Далее естественно возникает задача, где в правой части неравенства (1) рассматривается положительная функция $\Psi(x)$ положительного аргумента x . Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество комплексных чисел z , для которых неравенство

$$|P(z)| < \Psi(H(P)) \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in P_n$. В работе Васильева и Берника [4] было доказано, что для монотонно убывающей функции Ψ справедливо

$$\mu \mathcal{L}_n(\Psi) = 0, \tag{3}$$

если ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2} \Psi^2(H)$ сходится. Однако в классической теореме Хинчина [5], касающейся случая $n = 1$, $z \in \mathbb{R}$, при сходимости ряда условие монотонности функции Ψ можно опустить.

В работе Бересневича [6] было показано, что в аналоге неравенства (3) для действительных чисел условие монотонности функции также можно опустить. При этом на последнем этапе существенно использовалась теорема Берника–Клейнбока–Маргулиса [7]. В данной работе доказывается аналог теоремы Бересневича для комплексных чисел.

Обозначим через $\mathcal{P}_n(H)$ множество неприводимых многочленов $P \in \mathcal{P}_n$ высоты $H(P) = H$, удовлетворяющей условию $a_n = H$. Также введем класс многочленов $\mathcal{P}_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(H)$. Пусть

$$\mathcal{A}_n(\Psi) = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < \Psi(H(P)) \text{ для бесконечного числа } P \in \mathcal{P}_n\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Psi(x)$ – положительная функция положительного аргумента x такая, что ряд $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2} \Psi^2(H)$ сходится. Тогда для почти всех $z \in \mathbb{C}$ и $n \geq 3$ неравенство (2) имеет бесконечное число решений в многочленах $P \in \mathcal{P}_n$ только для множества нулевой меры.

Мы даем полное доказательство теоремы, основанное на методе доказательства гипотезы Бейкера [8] и использующее новый прием при рассмотрении классов второго рода [3].

1. Предварительные замечания

Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ – корни многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$. Для доказательства теоремы 1 понадобятся следующие четыре леммы, доказательства которых можно найти в [3], [4], [8].

ЛЕММА 1 [4]. Если $P \in \mathcal{P}_n(H)$, то все корни многочлена P лежат в круге $|z| < 2$.

Для каждого корня β_i , $1 \leq i \leq n$, рассмотрим множество

$$S(\beta_i) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \beta_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |z - \beta_j| \right\}.$$

Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ – комплексные корни $P \in \mathcal{P}_n(H)$ с $\text{Im} \beta_s > 0$, $s = 1, \dots, k$. Зафиксируем корень β_1 многочлена P и упорядочим остальные корни следующим образом:

$$|\beta_1 - \beta_2| \leq \dots \leq |\beta_1 - \beta_k|.$$

ЛЕММА 2 [3]. Пусть $P \in \mathcal{P}_n(H)$ и $z \in S(\beta_1)$. Тогда

$$|z - \beta_1| < 2^{n-1} |P(z)| |P'(\beta_1)|^{-1}, \quad (4)$$

$$|z - \beta_1| < (2^{n-2} |P(z)| |P'(\beta_1)|^{-1} |\beta_1 - \beta_2|)^{1/2}. \quad (5)$$

Выберем достаточно малое положительное число ε , и пусть $d > 0$ – фиксированное большое число. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon/d$, $T = [\varepsilon_1^{-1}]$. Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n(H)$ определим вещественные числа ρ_j и целые числа l_j из следующих условий:

$$|\beta_1 - \beta_j| = H^{-\rho_j}, \quad \frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{l_j}{T}, \quad 2 \leq j \leq k,$$

и $\rho_j = l_j = 0$ при $j > k$. Далее, определим числа

$$p_i = \frac{l_{i+1} + \dots + l_n}{T}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Все многочлены $P \in \mathcal{P}_n(H)$, соответствующие одному и тому же вектору $\mathbf{l} = (l_2, \dots, l_n)$, объединим в один класс $\mathcal{P}_n(H, \mathbf{l})$. Определим $\mathcal{P}_n(\mathbf{l}) = \bigcup_{H=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(H, \mathbf{l})$. Нетрудно показать, что число классов $\mathcal{P}_n(H, \mathbf{l})$ конечно [3].

Пусть $K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$. В силу леммы 1 имеем, что $A(\Psi) \subseteq K_0$. Поэтому достаточно доказать теорему для точек $z \in S(\beta_i) \cap K_0$, $1 \leq i \leq n$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением множества $S(\beta_1) \cap K_0$, так как остальные множества $S(\beta_i) \cap K_0$, $2 \leq i \leq n$, устроены аналогичным образом.

Под обозначением $X \ll Y$ мы будем подразумевать, что $X = O(Y)$.

ЛЕММА 3 [8]. Пусть $P \in \mathcal{P}_n(H)$. Тогда

$$H^{1-p_1} \ll |P'(\beta_1)| \ll H^{1-p_1+(n-1)\varepsilon_1},$$

и

$$|P^{(j)}(\beta_1)| \ll H^{1-p_j+(n-j)\varepsilon_1}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

ЛЕММА 4 [8]. Пусть $\delta > 0$, $\sigma > 0$ – вещественные числа, $n \in \mathbb{N}$ и $H = H(\delta, n)$ – достаточно большое вещественное число. Далее, пусть P_1 и P_2 – два целочисленных многочлена степени не более n без общих корней и $\max\{H(P_1), H(P_2)\} \leq H$. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ обозначает круг радиуса $H^{-\sigma}$ с центром в точке β такой, что $\text{Im } \beta \neq 0$. Тогда, если существует такое число $\tau > 0$, что для всех $z \in K$ выполняется неравенство

$$\max\{|P_1(z)|, |P_2(z)|\} < H^{-\tau},$$

то

$$2\tau + 2 + 4 \max(1 + \tau - \sigma, 0) < 2n + \delta.$$

2. Доказательство теоремы 1

Покажем, что $\mu \mathcal{A}_n(\Psi) = 0$ при условии сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2} \Psi^2(H)$. Для $P \in \mathcal{P}_n(H, \mathbf{l})$ обозначим через $B(P)$ множество точек $z \in S(\beta_1) \cap K_0$, удовлетворяющих неравенству $|P(z)| < \Psi(H)$.

Поскольку ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2} \Psi^2(H) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} H^{n-2} \Psi^2(H)$$

сходится, то выражения

$$H^{n-2} \Psi^2(H) \quad \text{и} \quad \sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} H^{n-2} \Psi^2(H)$$

стремятся к 0 при $H \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ соответственно. Поэтому

$$\Psi^2(H) = o(H^{-n+2}) \quad \text{при} \quad H \rightarrow \infty$$

и

$$\sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} \Psi^2(H) H^{n-2} = o(1) \ll 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

В случае, когда $\Psi^2(H) \ll H^{-n+1}$, теорема была доказана в [4]. Поэтому далее будем полагать, что

$$H^{-n+1} \ll \Psi^2(H) \ll H^{-n+2} \quad \text{для } H > H_0.$$

Положим $M = [\epsilon_1^{-1}]$ и разделим область значений $\Psi^2(H)$ на M частей вида

$$H^{-n+1+i/M} \ll \Psi^2(H) \ll H^{-n+1+(i+1)/M}, \quad i = 0, \dots, M-1. \quad (7)$$

Пусть число значений H , для которых выполняется неравенство (7), будет больше H^θ . Выберем достаточно большое число t и рассмотрим $2^t \leq H < 2^{t+1}$; тогда мы получим

$$\sum_{2^t \leq H < 2^{t+1}} \Psi^2(H) H^{n-2} > 2^{t(-n+1+i/M+n-2+\theta)} > 2^{t(\theta-1+i/M)}.$$

Если $\theta - 1 + i/M > 0$, то получаем противоречие с (6). Поэтому будем считать, что

$$0 \leq \theta < 1 - \frac{i}{M}. \quad (8)$$

Используя лемму 2 и лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} |z - \beta_1| &\ll \Psi(H) H^{-1+p_1} \ll 2^{t(p_1-n/2-1/2+(i+1)/(2M))}, \\ |z - \beta_1| &\ll (\Psi(H) H^{-1+p_1} H^{-p_2})^{1/2} \ll 2^{t(2p_2-n-1+(i+1)/M+2\epsilon_1)/4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее рассмотрим два случая, в зависимости от того, какая оценка в последней системе является наилучшей.

Случай 1. Вторая оценка будет меньше первой в (9) при условии

$$p_1 + \frac{l_2}{T} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i+1}{2M} + \epsilon_1. \quad (10)$$

Для достаточно большого t определим множество

$$M_t(\mathbf{1}) = \bigcup_{2^t \leq H < 2^{t+1}} \mathcal{P}_n(H, \mathbf{1}).$$

Разобьем множество $S(\beta_1) \cap K_0$ на квадраты K_j со стороной $2^{-\sigma_1 t}$ для $\sigma_1 > 0$. Будем говорить, что многочлен $P \in M_t(\mathbf{1})$ принадлежит квадрату K_j , если существует точка $z \in K_j$, в которой выполняется (2). Сначала рассмотрим квадраты K_j , содержащие не более одного многочлена $P \in M_t(\mathbf{1})$. Число таких квадратов, а значит, и многочленов, не превосходит $2^{2\sigma_1 t}$. Суммируя вторые оценки в (9) для многочленов P в выбранном классе, получим

$$\sum_{P \in M_t(\mathbf{1})} \mu B(P) \ll 2^{t(2\sigma_1+p_2-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+\epsilon_1)}.$$

Если

$$\sigma_1 < \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{p_2}{2} - \frac{i+1}{4M} - \frac{\epsilon_1}{2},$$

то последний ряд сходится, и применение леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство этого случая.

Далее, пусть

$$\sigma_2 = \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{p_2}{2} - \frac{i+1}{4M} - \frac{\epsilon_1}{2} - \gamma_1, \quad \gamma_1 > 0,$$

и рассмотрим квадраты со стороной $2^{-\sigma_2 t}$, содержащие по крайней мере два многочлена. Пусть P_1 и P_2 – различные многочлены класса $M_t(\mathbf{1})$ такие, что для некоторых $z_1, z_2 \in K_j$ для $P_1(z_1)$ и $P_2(z_2)$ выполняется неравенство (2). Используя разложение в ряд Тейлора многочлена P_i , $i = 1, 2$, в окрестности корня β_i , получаем оценку для $|P_i(z_i)|$:

$$\begin{aligned} |P_i(z_i)| &\ll 2^{t(1-p_2+(n-2)\epsilon_1-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+p_2+2\gamma_1+\epsilon_1)} \\ &= 2^{t(1/2-n/2+(i+1)/(2M)+2\gamma_1+(n-1)\epsilon_1)}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4 для многочленов P_1 и P_2 , где

$$\tau = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2} - \frac{i+1}{2M} - 2\gamma_1 - (n-1)\epsilon_1, \quad \sigma = \sigma_2,$$

имеем

$$2\tau + 2 + 4(\tau - \sigma_2 + 1) = 2n + 2 + 2p_2 - 8\gamma_1 - \frac{2(i+1)}{M} - 2(3n-4)\epsilon_1.$$

Если

$$8\gamma_1 + \frac{2(i+1)}{M} + \delta + 3(3n-4)\epsilon_1 \leq 2$$

или

$$\frac{i}{M} \leq 1 - 4\gamma_1 - \frac{1}{M} - \frac{\delta}{2} - \frac{3(3n-4)\epsilon_1}{2},$$

то приходим к противоречию с леммой 4. Поэтому далее

$$0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad \theta_1 = \frac{1}{M} + 4\gamma_1 + \frac{\delta}{2} + \frac{3(3n-4)\epsilon_1}{2}.$$

Зафиксируем H такое, что $2^t \leq H < 2^{t+1}$. Число значений H , удовлетворяющих (7), не превосходит $2^{t\theta_1}$. Если квадрат со стороной $2^{-t\sigma_3}$, $\sigma_3 > 0$, содержит не более $3 \cdot 2^{t\theta_1}$ многочленов $P \in M_t(\mathbf{1})$, то для меры множества $B_t = \bigcup_{P \in M_t(\mathbf{1})} B(P)$ получим следующую оценку:

$$\mu B_t \leq \sum_{P \in M_t(\mathbf{1})} \mu B(P) \ll 2^{t(2\sigma_3+p_2-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+\theta_1+\epsilon_1)}. \quad (11)$$

Это дает сходящийся ряд при условии

$$2\sigma_3 < \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - p_2 - \frac{i+1}{2M} - \theta_1 - \epsilon_1.$$

Таким образом, по лемме Бореля–Кантелли мера тех z , которые попадают в бесконечное число множеств B_t , равна нулю.

Пусть

$$\sigma_4 = \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{p_2}{2} - \frac{i+1}{4M} - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\epsilon_1}{2} - \gamma_2, \quad \gamma_2 > 0.$$

Рассмотрим квадраты со стороной $2^{-t\sigma_4}$, содержащие более $3 \cdot 2^{t\theta_1}$ многочленов. По формуле Тейлора для $P(z)$ мы имеем

$$\begin{aligned} |P(z)| &\ll 2^{t(-p_2+(n-2)\epsilon_1-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+p_2+\theta_1+2\gamma_2+\epsilon_1)} \\ &= 2^{t(-n/2+1/2+(i+1)/(2M)+\theta_1+2\gamma_2+(n-1)\epsilon_1)} = 2^{-t\sigma_5}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим новые многочлены

$$R_i(f) = P_{i+1}(f) - P_1(f), \quad \text{где } i = 2, 3.$$

Предположим, что все многочлены R_i неприводимы. Применим лемму 4 для R_2 и R_3 , где $\deg R_i \leq n-1$, $i = 2, 3$, и $|R_i(z)| \ll 2^{-t\sigma_5}$. Из (12) и леммы 4 следует, что

$$\tau = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{(i+1)}{2M} - \theta_1 - 2\gamma_2 - (n-1)\epsilon_1, \quad \sigma = \sigma_4.$$

Это означает, что

$$2\tau + 4(\tau - \sigma_4 + 1) + 2 = 2n + 2 - \frac{2(i+1)}{M} - 4\theta_1 - 8\gamma_2 - 2(3n-4)\epsilon_1 + 2p_2.$$

Выберем константы $\gamma_1, \gamma_2, \epsilon_1, \delta, M$ такими, чтобы выполнялось неравенство

$$16\gamma_1 + \frac{4}{M} + 8\gamma_2 + 9(3n-4)\epsilon_1 + 3\delta < 2.$$

Тогда получаем неравенство

$$2\tau + 4(\tau - \sigma_4 + 1) + 2 > 2(n-1) + \delta,$$

которое противоречит лемме 4. Если многочлены R_i пропорциональны или R_i приводимы, то доказательство этих случаев можно найти в [4], что и завершает доказательство случая.

Случай 2. Теперь предположим, что выполняется неравенство, противоположное неравенству (10):

$$p_1 + \frac{l_2}{T} \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i+1}{2M} + \epsilon_1. \quad (13)$$

Далее оценим $|z - \beta_1|$, используя (4) (эта оценка более точная, чем (5)). Сначала рассмотрим случай, когда

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{4} < p_1 + \frac{l_2}{T} \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i+1}{2M} + \epsilon_1. \quad (14)$$

Разобьем множество $S(\beta_1) \cap K_0$ на квадраты K_j со стороной $2^{-t\sigma_6}$, где $\sigma_6 > 0$, и рассмотрим только те квадраты, которые содержат не более одного многочлена $P \in M_t(\mathbf{1})$. Воспользовавшись первой оценкой (9) и просуммировав ее по всем выбранным квадратам и всем значениям t , получим

$$c(n) \sum_{t=1}^{\infty} 2^{2t(-n/2-1/2+(i+1)/(2M)+p_1+\sigma_6)}.$$

Этот ряд сходится при

$$\sigma_6 < \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i+1}{2M} - p_1,$$

и лемма Бореля–Кантелли завершает доказательство в данном случае.

Для $\gamma_3 > 0$ выберем

$$\sigma_7 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i+1}{2M} - p_1 - \gamma_3.$$

Рассмотрим квадраты, которые содержат по крайней мере два многочлена. Выберем два из них, скажем P и Q , и воспользуемся формулой Тейлора для оценок значений $|P(z)|$ и $|Q(z)|$ на квадрате со стороной $2^{-t\sigma_7}$. Получим

$$\max(|P(z)|, |Q(z)|) \ll 2^{t(-n/2+1/2+(i+1)/(2M)+\gamma_3+(n-1)\varepsilon_1)}.$$

Далее, применяя лемму 4 для значений параметров

$$\tau = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i+1}{2M} - \gamma_3 - (n-1)\varepsilon_1, \quad \sigma = \sigma_7,$$

получим

$$2\tau + 2 + 4(\tau - \sigma_7 + 1) = n + 1 + 4p_1 - \frac{i+1}{M} - 2\gamma_3 - 6(n-1)\varepsilon_1 < 2n + \delta.$$

В силу того, что $2p_1 \geq l_2/T + p_1 > n/2 - 1/4$, получаем противоречие, если

$$\frac{i+1}{M} + 2\gamma_3 + 6(n-1)\varepsilon_1 + \delta < \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Поскольку

$$\frac{1}{M} + 2\gamma_3 + 6(n-1)\varepsilon_1 + \delta$$

произвольно мало, то пусть значение последнего выражения не превосходит $1/10$. Тогда из (15) следует, что $i/M < 2/5$. Далее, если $i/M \geq 2/5$, то согласно (8) получаем

$$0 \leq \theta < \frac{3}{5}. \quad (16)$$

Зафиксируем H такое, что $2^t \leq H < 2^{t+1}$. Согласно (16) число значений H , удовлетворяющих (7), не превосходит $2^{3t/5}$. Рассуждения проведем аналогично доказательству (11). Разобьем множество $S(\beta_1) \cap K_0$ на квадраты K_j со стороной $2^{-t\sigma_8}$, $\sigma_8 > 0$. Предположим, что квадрат K_j содержит не более $3 \cdot 2^{3t/5}$ многочленов. Тогда верхняя оценка для меры множества B_t будет подобна оценке, полученной ранее в (11), т.е.

$$c(n)2^{t(-n-1+2p_1+i+1/M+3/5+2\sigma_8)}.$$

Суммируя по t , получаем сходящийся ряд, если

$$2\sigma_8 < n + 1 - \frac{i+1}{M} - \frac{3}{5} - 2p_1;$$

лемма Бореля–Кантелли завершает доказательство данного случая.

Предположим, что

$$\sigma_9 = \frac{n}{2} + \frac{1}{5} - p_1 - \frac{i+1}{2M} - \gamma_4, \quad \gamma_4 > 0.$$

Рассмотрим квадраты K_j со стороной $2^{-t\sigma_9}$, которые содержат более $3 \cdot 2^{3t/5}$ многочленов P_i , $1 \leq i \leq L$, $L > 3 \cdot 2^{3t/5}$. Разложим каждый из них в ряд Тейлора на K_j и получим верхнюю оценку для $|P_i(z)|$, а именно,

$$\begin{aligned} |P_i(z)| &\ll 2^{t(1-p_1+(n-1)\varepsilon_1-n/2-1/5+p_1+(i+1)/(2M)+\gamma_4)} \\ &= 2^{t(4/5-n/2+(i+1)/(2M)+\gamma_4+(n-1)\varepsilon_1)}, \quad 1 \leq i \leq L. \end{aligned}$$

По крайней мере три многочлена P_{1i} , P_{2i} и P_{3i} обладают равной высотой (т.е. $a_n = H$), поэтому многочлены

$$R_1(f) = P_{2i}(f) - P_{1i}(f) \quad \text{и} \quad R_2(f) = P_{3i}(f) - P_{1i}(f)$$

удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$|R_i(z)| \ll 2^{t(4/5-n/2+(i+1)/(2M)+\gamma_4+(n-1)\varepsilon_1)}, \quad \deg R_i(z) \leq n-1, \quad i = 1, 2.$$

Предположим, что многочлены R_i неприводимы. Применим лемму 4 при

$$\tau = -\frac{4}{5} + \frac{n}{2} - \frac{i+1}{2M} - \gamma_4 - (n-1)\varepsilon_1, \quad \sigma = \sigma_9.$$

Тогда

$$2\tau + 4(\tau - \sigma_9 + 1) + 2 = n + \frac{2}{5} + 4p_1 - \frac{i+1}{M} - 2\gamma_4 - 6(n-1)\varepsilon_1.$$

Поскольку

$$\frac{i+1}{M} \leq 1, \quad 2p_1 \geq \frac{l_2}{T} + p_1 \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{4},$$

то правая часть в уравнении, записанном выше, превосходит

$$2n - 11/10 - 2\gamma_4 - 6(n-1)\varepsilon_1.$$

Выберем $\gamma_4 + 3(n-1)\varepsilon_1 < 1/10$, тогда для $\delta < 7/10$ получаем противоречие с неравенством

$$2\tau + 4(\tau - \sigma_9 - 1) + 2 < 2(n-1) + \delta$$

из леммы 4. Если многочлены R_i пропорциональны или R_i приводимы, то доказательство этих случаев можно найти в [4], что и завершает доказательство случая (14).

Далее, если

$$\frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{4} < p_1 + \frac{l_2}{T} \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, \quad (17)$$

для $n \geq 4$, то зафиксируем любое достаточно большое целое число H и разобьем множество K_0 на квадраты K_j со стороной $H^{-l_2/T}$. Число таких квадратов $\ll H^{l_2/T}$. Пусть квадрат K_j содержит H^{θ_2} многочленов. Тогда

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(1)} \mu B(P) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{\theta_2} H^{2l_2/T} H^{2(p_1-1)} \Psi^2(H) \ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-2} \Psi^2(H) H^{\theta_2-n+2l_2/T+2p_1}. \quad (18)$$

Ряд (18) будет сходиться при $\theta_2 < u$, $u = n - 2l_2/T - 2p_1$. Поэтому по лемме Бореля–Кантелли множество тех z , которые принадлежат бесконечному числу $B(P)$, имеет меру нуль. Из условия (17) получаем, что $u \geq 1/2$, и нам остается рассмотреть случай, когда $\theta_2 > u$. Доказательство теоремы здесь аналогично доказательству предложения 2 из [4]. В заключение заметим, что для $n \geq 3$ если

$$\epsilon \leq p_1 + \frac{l_2}{T} \leq \frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{4}, \quad 0 \leq p_1 + \frac{l_2}{T} < \epsilon,$$

то доказательство совпадает с доказательством предложения 3 и предложения 4 из [4] соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, “Über das Maß der Menge aller S -Zahlen”, *Math. Ann.*, **106**:1 (1932), 131–139.
- [2] В. Г. Спринджук, “О гипотезе Малера”, *ДАН СССР*, **154**:4 (1964), 783–786.
- [3] В. Г. Спринджук, *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск, 1967.
- [4] В. И. Берник, Д. В. Васильев, “Теорема Хинчина для целочисленных полиномов комплексной переменной”, Тр. ин-та матем. НАН Беларуси, **3**, Ин-т матем. НАН Беларуси, Минск, 1999, 10–20.
- [5] A. I. Khintchine, “Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen”, *Math. Ann.*, **92**:1-2 (1924), 115–125.
- [6] V. V. Beresnevich, “On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation”, *Acta Arith.*, **117**:1 (2005), 71–80.
- [7] V. I. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis, “Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions”, *Int. Math. Res. Notices*, **9** (2001), 453–486.
- [8] V. I. Bernik, “The exact order of approximating zero by values of integral polynomials”, *Acta Arith.*, **53**:1 (1989), 17–28.

Н. В. Бударина

Хабаровское отделение Института прикладной
математики ДВО РАН,
Dublin Institute of Technology, Ирландия
E-mail: buda77@mail.ru

Поступило

11.03.2008

Исправленный вариант

04.06.2012