Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Ю. Тарасенко, Предел мер, порождаемых диффузиями с неограниченно возрастающим сносом, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 903–911

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:12:21

Предел мер, порождаемых диффузиями с неограниченно возрастающим сносом

П. Ю. Тарасенко

В данной работе доказано, что последовательность диффузионных процессов в $\mathbb{R}^n$, являющихся броуновскими движениями с бесконечно возрастающим по модулю сносом, направленным в сторону многообразия, сходится по распределению к броуновскому движению на этом многообразии.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbb{M}$ – гладкое компактное m -мерное риманово многообразие без границы, вложенное (согласно теореме Нэша) в n -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Броуновским движением на многообразии называется марковский процесс, переходная полугруппа которого задается генератором $-(1/2)\Delta_{\mathbb{M}}$, где $\Delta_{\mathbb{M}}$ – оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathbb{M}$ (см., например, [1]). Эта статья продолжает серию работ, в которых мера на пространстве траекторий со значениями в $\mathbb{M}$, порождаемая броуновским движением на $\mathbb{M}$, представляется с помощью слабого предела мер на пространстве траекторий в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. [2], [3]).

Обозначим через $\mathbb{M}_\varepsilon$ трубчатую окрестность $\mathbb{M}$, т.е. множество, состоящее из всех точек $\mathbb{R}^n$ таких, что расстояние от каждой из них до многообразия не больше ε .

Пусть $r_0 > 0$ таково, что если $x \in \mathbb{M}_{r_0}$, то существует единственная точка $\bar{x} \in \mathbb{M}$ такая, что

$$\text{dist}(x, \mathbb{M}) \equiv \inf_{y \in \mathbb{M}} \text{dist}(x, y) = \text{dist}(x, \bar{x}),$$

где $\text{dist}(x, y)$ – расстояние между точками x и y в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что отображение $\pi: x \mapsto \bar{x}$ есть ортогональная проекция точки, принадлежащей r_0 -окрестности многообразия, на само многообразие $\mathbb{M}$.

Определим функцию $U_0: \mathbb{M}_{r_0} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$U_0(x) = |x - \bar{x}|^2.$$

Тогда $\nabla U_0(x) = 2(x - \bar{x})$. Пусть $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемое продолжение функции U_0 на все $\mathbb{R}^n$ такое, что градиент $\nabla U(x)$ ограничен и удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $(b_t) = b(t, \omega): \mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ – стандартное броуновское движение в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим семейство диффузионных процессов (b_t^λ) , являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений вида

$$db_t^\lambda = db_t - \frac{\lambda}{2} \nabla(U)(b_t^\lambda) dt, \quad b_0^\lambda = x \in \mathbb{M}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

т.е. являющихся броуновскими движениями с коэффициентом сноса, направленным в сторону многообразия.

Далее доказывается тот факт, что меры, порожденные процессами (b_t^λ) , при стремлении λ к ∞ слабо сходятся к мере, порождаемой броуновским движением на многообразии $\mathbb{M}$.

Для начала докажем вспомогательное утверждение о поведении траектории в $\mathbb{R}^n$ под действием сноса.

2. Приближение траектории к поверхности под действием сноса. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ -значную непрерывную функцию w на $[0, \infty)$ с условием $w(0) = x \in \mathbb{M}$. Обозначим через ξ_m решение уравнения

$$\xi_m(t) = w(t) - \frac{m}{2} \int_0^t \nabla U(\xi_m(s)) ds \quad (2.1)$$

(существование решения следует из липшицевости функции $\nabla U(x)$).

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $T > 0$ фиксировано. И пусть ξ_m является решением уравнения (2.1). Тогда для любого $\varepsilon \in (0, r_0)$ существует положительное число $M \equiv M(\varepsilon)$ такое, что

$$\xi_m(t) \in \mathbb{M}_\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \forall m \geq M.$$

Для доказательства нам потребуются следующие две леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть $0 < \varepsilon \leq r_0/2$. Для любого $x \in \partial \mathbb{M}_\varepsilon$ рассмотрим уравнение

$$\eta(t) = x - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla U(\eta(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Тогда (2.2) имеет единственное решение $\eta(t)$, причем верны следующие равенства:

$$\eta(t) = \bar{x} - (\bar{x} - x) \exp(-t), \quad (2.3)$$

$$|\overline{\eta(t)} - \eta(t)| = \varepsilon \exp(-t). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что (2.3) является решением уравнения (2.2). Единственность решения (2.2) следует из принадлежности ∇U классу Липшица. Равенство (2.4) следует из (2.3) и того, что $\overline{\eta(t)} = \bar{x}$, $t \geq 0$.

Так как уравнение (2.1) при $0 \leq t \leq T$ может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_m\left(\frac{t}{m}\right) &= w\left(\frac{t}{m}\right) - \frac{m}{2} \int_0^{t/m} \nabla U(\xi_m(s)) ds \\ &= w\left(\frac{t}{m}\right) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla U\left(\xi_m\left(\frac{s}{m}\right)\right) ds, \quad 0 \leq t \leq mT, \end{aligned}$$

то уравнение (2.1) при $0 \leq t \leq T$ эквивалентно следующему:

$$\tilde{\xi}_m(t) = \tilde{w}(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla U(\tilde{\xi}_m(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq mT, \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{\xi}_m(t) = \xi_m\left(\frac{t}{m}\right), \quad \tilde{w}(t) = w\left(\frac{t}{m}\right).$$

Обозначим через $\Delta_{0,t,h}(w)$ модуль непрерывности функции w , т.е.

$$\Delta_{0,t,h}(w) = \sup\{|w(t_2) - w(t_1)| : 0 \leq t_1 < t_2 \leq t, |t_2 - t_1| \leq h\}.$$

Запись $a \wedge b$ будет обозначать минимум значений a и b .

ЛЕММА 2.2. Пусть $0 < \varepsilon < r_0$. Тогда существует положительное целое число $M \equiv M(\varepsilon)$ такое, что для всех $u \in (0, mT)$ с условием $\tilde{\xi}_m(u) \in \partial\mathbb{M}_{\varepsilon/2}$, траектория $\{\tilde{\xi}_m(t), u \leq t \leq mT\}$ пересечет $\partial\mathbb{M}_{\varepsilon/3}$ до того, как она пересечет $\partial\mathbb{M}_{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в момент времени u , $0 < u < mT$, траектория $\tilde{\xi}_m$ находится на границе $\mathbb{M}_{\varepsilon/2}$, т.е. $\tilde{\xi}_m \in \partial\mathbb{M}_{\varepsilon/2}$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\eta(t) = \tilde{\xi}_m(u) - \frac{1}{2} \int_u^t \nabla U(\eta(s)) ds, \quad t \geq u.$$

По лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \overline{\tilde{\xi}_m(u)} - \left\{ \overline{\tilde{\xi}_m(u)} - \tilde{\xi}_m(u) \right\} \exp\{-(t-u)\}, \\ |\overline{\eta(t)} - \eta(t)| &= \frac{\varepsilon}{2} \exp\{-(t-u)\}. \end{aligned}$$

Значит, положив

$$u' = \inf\{t > u : \eta(t) \in \mathbb{M}_{\varepsilon/4}\},$$

получим $u' = u + \log 2$. С другой стороны, если $u \leq t \leq mT$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_m(t) - \eta(t) &= \tilde{w}(t) - \tilde{w}(u) - \frac{1}{2} \int_u^t \{\nabla U(\tilde{\xi}_m(s)) - \nabla U(\eta(s))\} ds, \\ |\tilde{\xi}_m(t) - \eta(t)| &\leq |\tilde{w}(t) - \tilde{w}(u)| + L \int_u^t |\tilde{\xi}_m(s) - \eta(s)| ds, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где L – половина константы Липшица для функции ∇U . Для $u \leq t \leq (u' \wedge mT)$ верно

$$|\tilde{w}(t) - \tilde{w}(u)| = \left| w\left(\frac{t}{m}\right) - w\left(\frac{u}{m}\right) \right| \leq \Delta_{0,T,1/m}(w).$$

Из непрерывности w следует, что правая часть этого выражения стремится к нулю при стремлении m к ∞ . Таким образом, если взять m настолько большим, что

$$\Delta_{0,T,1/m}(w) < \frac{\varepsilon}{12} \exp(-L),$$

то из (2.6) и леммы Гронуолла будем иметь

$$|\tilde{\xi}_m(t) - \eta(t)| < \frac{\varepsilon}{12} \exp(-L) \exp\{L(t-u)\} < \frac{\varepsilon}{12}, \quad u \leq t \leq (u' \wedge mT).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \left| \overline{\tilde{\xi}_m(t)} - \tilde{\xi}_m(t) \right| &\leq |\overline{\eta(t)} - \tilde{\xi}_m(t)| \\ &\leq |\overline{\eta(t)} - \eta(t)| + |\eta(t) - \tilde{\xi}_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{12} < \varepsilon, \quad u \leq t \leq (u' \wedge mT). \end{aligned}$$

С другой стороны, если $u' < mT$, то в момент u' имеем

$$\left| \overline{\tilde{\xi}_m(u')} - \tilde{\xi}_m(u') \right| \leq \left| \overline{\eta(u')} - \eta(u') \right| + |\eta(u') - \tilde{\xi}_m(u')| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

То есть $\{\tilde{\xi}_m(t), u \leq t \leq mT\}$ проходит через $\partial\mathbb{M}_{\varepsilon/3}$ до того, как проходит через $\partial\mathbb{M}_{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Теорема 2.1 теперь может быть доказана следующим образом. Определим $M \equiv M(\varepsilon)$ как в лемме 2.2. Предположим, что существует момент времени $\tau \in [0, mT]$ такой, что $\{\tilde{\xi}_m(t), 0 \leq t \leq mT\}$ при некотором $m > M$ проходит через $\partial\mathbb{M}_{\varepsilon}$ в момент τ . Тогда существует момент времени $u < \tau$ такой, что

$$\tilde{\xi}_m(u) \in \partial\mathbb{M}_{\varepsilon/2} \quad \text{и} \quad \tilde{\xi}_m(t) \in \mathbb{M}_{\varepsilon} \setminus \overline{\mathbb{M}_{\varepsilon/2}}, \quad u < t \leq \tau.$$

Но это невозможно, так как противоречит лемме 2.2.

3. Производная проектора на многообразие. Напомним, что r_0 достаточно мало и ортогональная проекция $\pi: \mathbb{M}_{r_0} \rightarrow \mathbb{M}$ корректно определена. Для любой точки $x \in \mathbb{M}$ обозначим через $T_x\mathbb{M}$ касательное пространство к многообразию в точке x ; для точки $x \in \mathbb{M}_{r_0}$ обозначим через $N_x\mathbb{M}$ ортогональное дополнение к касательному пространству в точке $\pi(x)$. В дальнейшем эти пространства будут отождествляться с соответствующими подпространствами $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $k = n - m$ коразмерность $\mathbb{M}$.

Введем следующие обозначения. Для данной точки $a \in \mathbb{M}_{r_0}$ рассмотрим координатную систему $(y^1, \dots, y^n)$ относительно ортонормированного базиса (e_i) с началом в $\pi(a)$ и условием, что первые m базисных векторов образуют ортонормированный базис в касательном пространстве $T_{\pi(a)}\mathbb{M}$. По теореме о неявной функции в этой координатной системе многообразие $\mathbb{M}$ в окрестности точки $\pi(a)$ может быть локально представлено системой уравнений $y^{s+m} = f_s(y^1, \dots, y^m)$ или, иначе говоря, системой уравнений

$$\varphi_s(y) = 0, \quad \text{где} \quad \varphi_s(y^1, \dots, y^m) = y^{m+s} - f_s(y^1, \dots, y^m), \quad s \in 1, \dots, k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем называть такую координатную систему (y^i) *ортогональной координатной системой, связанной с точкой a* , а набор функций f_s (или φ_s) – *локальным представлением $\mathbb{M}$ в точке a относительно этой координатной системы*.

Далее, обозначим через $F_s = \text{Hess } f_s(0)$ гессиан f_s в нуле и обозначим последние k координат точки a в координатной системе (y^i) через $(z^1, \dots, z^k)$ (заметим, что первые m координат точки a равны нулю).

ЛЕММА 3.1. Пусть $a \in \mathbb{M}_{r_0}$. Тогда оператор первой производной проектора на многообразие задается матрицей

$$D\pi(a) = \begin{bmatrix} I_{m \times m} - z^s F_s & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & 0_{k \times k} \end{bmatrix}$$

в координатной системе, связанной с a .

4. Разложение Ферми непрерывных семимартингалов. Пусть (y_t) есть $\mathbb{R}^n$ -значный непрерывный семимартингал, начинающийся в точке $a_0 \in \mathbb{M}$. В этом пункте мы сопоставим процессу (y_t) пару процессов (x_t) (со значениями в $\mathbb{M}$) и (z_t) (со значениями в $\mathbb{R}^k$), где первый процесс начинается в точке a_0 и является проекцией на многообразие

$$x_t = \pi(y_t),$$

а второй процесс, начинающийся в нуле, представляет собой ортогональную компоненту $(y_t - x_t)$ процесса (y_t) . Термин “разложение Ферми” заимствован из римановой геометрии, где координатами Ферми называются локальные координаты, адаптированные к геодезическим. В стохастическом случае используется похожая конструкция, впервые использованная в работе [3], основанная на понятии стохастического параллельного переноса вдоль $\mathbb{M}$ -значного семимартингала, траектории которого не обязаны быть гладкими.

Сперва определим стохастический параллельный перенос вектора $\nu \in \mathbb{R}^n$ вдоль $\mathbb{M}$ -значного семимартингала (x_t) согласно [1]. Ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n$ выберем таким образом, что линейная оболочка векторов $(e_1, \dots, e_m)$ будет совпадать с $T_{a_0}\mathbb{M}$, а линейная оболочка векторов $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ будет совпадать с $N_{a_0}\mathbb{M}$. В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ определим P_x – оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространство $T_x\mathbb{M}$ и $Q_x = \text{Id} - P_x$ – ортогональное проектирование $\mathbb{R}^n$ на $N_x\mathbb{M}$. Тогда P и Q являются гладкими функциями из $\mathbb{M}$ в векторное пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (см. [1; лемма 1.24]). Поскольку базис в $\mathbb{R}^n$ фиксирован, мы также можем считать, что P и Q являются гладкими функциями из $\mathbb{M}$ в $\text{gl}(n)$, где gl обозначает линейное пространство всех $(n \times n)$ -матриц с действительными коэффициентами. В дальнейшем мы будем отождествлять матрицы и соответствующие линейные отображения.

Для точки $x \in \mathbb{M}$ и вектора $w \in T_x\mathbb{M}$ определим Γ следующим образом:

$$\Gamma_x(w) = dQ_x(w)P_x + dP_x(w)Q_x \in \text{gl}(n). \quad (4.1)$$

Пусть x_t – непрерывный $\mathbb{M}$ -значный семимартингал, начинающийся в точке $a_0 \in \mathbb{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для данного вектора $\nu \in \mathbb{R}^n$ положим $\nu_t = u_t\nu$, где u_t является решением стохастического дифференциального уравнения Стратоновича

$$\delta u_t + \Gamma_{x_t}(\delta x_t)u_t = 0, \quad u_0 = I \in \text{gl}(n). \quad (4.2)$$

Тогда $\text{gl}(n)$ -значный процесс u_t называется *трансляционной матрицей*, а $\mathbb{R}^n$ -значный процесс ν_t называется *параллельным переносом* вектора ν вдоль x_t .

ЛЕММА 4.1. Верны следующие утверждения:

- 1) система векторов $(u_te_1, \dots, u_te_n)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ такой, что первые m его компонент являются ортонормированным базисом в $T_{x_t}\mathbb{M}$, а последние k компонент являются ортонормированным базисом в $N_{x_t}\mathbb{M}$;
- 2) u^T является решением уравнения $\delta u_t^T = u_t^T \Gamma_{x_t}(\delta x_t)$ с начальным условием $u_0^T = I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [4].

Таким образом, для каждого t координатная система $(u_t e_i)$ является ортогональной координатной системой, связанной с точкой x_t , в смысле определения 3.1.

Далее, пусть $\text{pr}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть линейный оператор, который отображает вектор $u \in \mathbb{R}^n$ в вектор, состоящий из его первых m координат. Аналогично, $\text{pr}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ отображает вектор $u \in \mathbb{R}^n$ в вектор, состоящий из его последних k координат. Обозначим через $\text{pr}_1^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\text{pr}_2^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ правые обратные операторы к pr_1 и pr_2 , т.е. $\text{pr}_1^{-1} \text{pr}_1 = P_{a_0}$ и $\text{pr}_2^{-1} \text{pr}_2 = Q_{a_0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Определим процесс (z_t) как ортогональную компоненту процесса (y_t) , а именно,

$$z_t = \text{pr}_2 u_t^T (y_t - x_t).$$

Пару процессов (x_t) и (z_t) (со значениями в $\mathbb{M}$ и $\mathbb{R}^k$ соответственно) будем называть *разложением Ферми* процесса (y_t) .

5. Сходимость броуновских движений со сносом к броуновскому движению на многообразии. Итак, как было сказано во введении, (b_t^λ) – броуновское движение со сносом к многообразию $\mathbb{M}$, т.е. решение следующего уравнения

$$b_t^\lambda = x + b_t - \frac{\lambda}{2} \int_0^t \nabla U(b_u^\lambda) du, \quad x \in \mathbb{M}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где (b_t) – стандартное броуновское движение в $\mathbb{R}^n$. В этом пункте мы докажем, что семейство процессов (b_t^λ) сходится по распределению к броуновскому движению на многообразии $\mathbb{M}$.

Сперва заметим, что согласно теореме 2.1 из того, что почти все траектории броуновского движения непрерывны, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и для почти любой броуновской траектории $b(\omega)$ существует положительное число $\Lambda = \Lambda(\varepsilon, \omega)$ такое, что при любом $\lambda > \Lambda$ соответствующая траектория процесса (b_t^λ) находится в ε -окрестности многообразия $\mathbb{M}$.

Обозначим через τ^λ момент выхода процесса (b_t^λ) из $\mathbb{M}_{r_0}$. Пусть (r_t^λ) обозначает процесс (b_t^λ) , остановленный в момент времени τ^λ , т.е. $(r_t^\lambda) = (b_{t \wedge \tau^\lambda}^\lambda)$. Тогда (r_t^λ) будет семимартингалом, и его разложение Ферми, которое мы обозначим через $(x_t^\lambda, z_t^\lambda)$, корректно определено.

Символом $\mathcal{L}$ обозначим распределение процесса в пространстве траекторий.

ЛЕММА 5.1. *Имеют место равенства*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}(b_t^\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}(r_t^\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_t^\lambda)$$

при условии, что хотя бы один из пределов существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя утверждение теоремы 2.1, получаем, что первое равенство следует из того, что для любого ω , всех $t \in [0, T]$ и достаточно больших λ выполнено $b_t^\lambda(\omega) = r_t^\lambda(\omega)$. Второе – из того, что для любых ω и $\varepsilon > 0$ $|r_t^\lambda(\omega) - x_t^\lambda(\omega)| < \varepsilon$ при достаточно больших λ .

ТЕОРЕМА 5.1. *Последовательность процессов (x_t^λ) , $0 \leq t \leq T$, при стремлении $\lambda \rightarrow \infty$ сходится к броуновскому движению на многообразии $\mathbb{M}$ в топологии локально равномерной сходимости по вероятности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим стохастический дифференциал Ито процесса (x_t^λ) :

$$\begin{aligned} dx_t^\lambda &= d\pi(r_t^\lambda) = D\pi(r_t^\lambda) dr_t^\lambda + \frac{1}{2} DD\pi(r_t^\lambda) dr_t^\lambda dr_t^\lambda \\ &= u_t^\lambda \text{pr}_1^{-1}[I - (z_t^\lambda)^s F_s(x_y^\lambda, u_t^\lambda)]^{-1} \text{pr}_1(u_t^\lambda)^T (db_t + \lambda \nabla U(r_t^\lambda) dt) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta\pi(x_y^\lambda + u_t^\lambda \text{pr}_2^{-1} z_t^\lambda) dt \\ &= u_t^\lambda \text{pr}_1^{-1}[I - (z_t^\lambda)^s F_s(x_y^\lambda, u_t^\lambda)]^{-1} \text{pr}_1(u_t^\lambda)^T db_t + \frac{1}{2} \Delta\pi(x_y^\lambda + u_t^\lambda \text{pr}_2^{-1} z_t^\lambda) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, процесс $(x_y^\lambda, u_t^\lambda)$ является решением следующей системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \delta u_t^\lambda + \Gamma_{x_y^\lambda}(\delta x_y^\lambda) u_t^\lambda = 0, \\ dx_t^\lambda = u_t^\lambda \text{pr}_1^{-1}[I - (z_t^\lambda)^s F_s(x_y^\lambda, u_t^\lambda)]^{-1} \text{pr}_1(u_t^\lambda)^T db_t + \frac{1}{2} \Delta\pi(x_y^\lambda + u_t^\lambda \text{pr}_2^{-1} z_t^\lambda) dt, \\ u_0^\lambda = I, \\ x_0^\lambda = a_0. \end{cases}$$

Из того, что $\|z_t^\lambda\| \leq r_0$, следует, что коэффициенты системы ограничены и, следовательно, эта система имеет единственное решение $(u_t^\lambda, x_y^\lambda)$. Из леммы 5.2, доказанной ниже, следует, что $(u_t^\lambda, x_y^\lambda)$ сходится локально равномерно по вероятности к решению следующей системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \delta \bar{u}_t + \Gamma_{\bar{x}_t}(\delta \bar{x}_t) \bar{u}_t = 0, \\ d\bar{x}_t = \bar{u}_t P_{a_0} db_t^* + \frac{1}{2} \Delta\pi(\bar{x}_t) dt, \\ \bar{u}_0 = I, \\ \bar{x}_0 = a_0. \end{cases}$$

Остается показать, что процесс $(\bar{x}_t)$ является броуновским движением на многообразии $\mathbb{M}$. Так как по лемме 4.1 $\bar{u}_t \in o_{\bar{x}_t}(n)$, мы получаем, что

$$\bar{u}_t P_{a_0} db_t^* = P_{\bar{x}_t} \bar{u}_t db_t^* = P_{\bar{x}_t} db_t^{**},$$

где (b_t^{**}) – другое n -мерное броуновское движение, начинающееся в точке a_0 . Далее, заметим, что для любой точки $x \in M$ из леммы 3.1 следует, что $P_x = D\pi(x)$ и, следовательно, дифференциальное уравнение Ито для процесса $(\bar{x}_t)$ будет выглядеть так:

$$\begin{cases} d\bar{x}_t = D\pi(\bar{x}_t) db_t^{**} + \frac{1}{2} \Delta\pi(\bar{x}_t) dt, \\ \bar{x}_0 = a_0. \end{cases}$$

Вычислим коэффициент сноса s для стохастического дифференциального уравнения Стратоновича. Используя соотношения

$$\begin{aligned} \partial_q \pi^j(x) &= \delta_q^j && \text{при } j, q \leq m, \\ \partial_q \pi^j(x) &= 0 && \text{при иных } j, q, \end{aligned}$$

согласно [4] (теорема 30.1) получаем

$$\begin{aligned} 2c^i &= \Delta\pi^i(x) - \sum_{q=1}^n \partial_q \pi^j \partial_j (\partial_q \pi^i)(x) \\ &= \Delta\pi^i(x) - \sum_{j=1}^m \partial_{jj} \pi^i(x, 0) = \sum_{j=m+1}^n \partial_{jj} \pi^i(x) = 0, \end{aligned}$$

поскольку π постоянно вдоль нормали. Таким образом, стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича для процесса $(\bar{x}_t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \delta\bar{x}_t = P_{\bar{x}_t} \delta b_t^{**}, \\ \bar{x}_0 = a_0. \end{cases}$$

Откуда согласно [1] (теорема 4.23) следует, что процесс $(\bar{x}_t)$ является броуновским движением на многообразии.

ЛЕММА 5.2. *Имеет место сходимость $(x_y^\lambda, u_t^\lambda) \rightarrow (\bar{x}_t, \bar{u}_t)$ локально равномерно по вероятности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим процессы $(x_y^\lambda, u_t^\lambda)$ и $(\bar{x}_t, \bar{u}_t)$ через (a_t^λ) и $(\bar{a}_t)$ соответственно. Тогда процессы (a_t^λ) и $(\bar{a}_t)$ являются решениями следующих стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} da_t^\lambda &= f_1(a_t^\lambda, z_t^\lambda) db_t^* + f_2(a_t^\lambda, z_t^\lambda) dt, \\ d\bar{a}_t &= f_1(\bar{a}_t, 0) db_t^* + f_2(\bar{a}_t, 0) dt \end{aligned}$$

с одинаковыми начальными условиями, где f_i – сокращенная запись коэффициентов.

Положим

$$\varphi^\lambda(t) = \mathbf{E} \sup_{s \leq t} \|a_s^\lambda - \bar{a}_s\|.$$

Достаточно показать, что $\varphi_\lambda(t) \rightarrow 0$ при всех $t > 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$. Легко видеть, что

$$f_i(x, z) \rightarrow f_i(x, 0) \quad \text{при } z \rightarrow 0$$

равномерно по $x \in \mathbb{M}$ и что функции $f_i(x, 0)$ удовлетворяют условию Липшица. Введем функцию, зависящую от параметра λ и элементарного события ω :

$$\delta^\lambda(\omega) = \sup_{t \leq T, i=1,2} \|f_i(a_t^\lambda, z_t^\lambda) - f_i(a_t^\lambda, 0)\|.$$

Из приближения броуновских траекторий к многообразию при $\lambda \rightarrow \infty$ следует сходимость почти всюду функции $\delta^\lambda(\omega)$ к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Откуда по теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем, что $\mathbf{E}(\delta^\lambda(\omega))^2 \rightarrow 0$.

Заметим, что, если $\|f_i(a_1, z) - f_i(a_1, 0)\| \leq \delta$, то для всех $a_1, a_2 \in \mathbb{M}$ верно

$$\begin{aligned} \|f_i(a_1, z) - f_i(a_2, 0)\|^2 &\leq 2\|f_i(a_1, z) - f_i(a_1, 0)\|^2 + 2\|f_i(a_1, 0) - f_i(a_2, 0)\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2c\|a_1 - a_2\|^2, \end{aligned}$$

где $\sqrt{c}$ – постоянная Липшица для обеих функций $f_i(x, 0)$ одновременно.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Зафиксируем Λ такое, что при всех $\lambda > \Lambda$ выполнено

$$4TE(\delta^\lambda(\omega))^2 < \varepsilon.$$

Тогда, согласно [5] (следствие 11.2.2) имеем

$$\begin{aligned} \varphi^\lambda(t) &= \mathbf{E} \sup_{s \leq t} \left\| \int_0^s [f_1(a_u^\lambda, z_u^\lambda) - f_1(\bar{a}_u, 0)] db_u^* + \int_0^s [f_2(a_u^\lambda, z_u^\lambda) - f_2(\bar{a}_u, 0)] du \right\|^2 \\ &\leq c_1 \mathbf{E} \int_0^t \|f_1(a_u^\lambda, z_u^\lambda) - f_1(\bar{a}_u, 0)\|^2 du + c_1 \int_0^t \|f_2(a_u^\lambda, z_u^\lambda) - f_2(\bar{a}_u, 0)\|^2 du \\ &\leq 4c_1 t \mathbf{E} \delta^2(\omega) + 4c_1 c \mathbf{E} \int_0^t \|a_u^\lambda - \bar{a}_u\| du \leq c_1 \varepsilon + c_2 \int_0^t \varphi_\varepsilon(u) du \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$ и $\lambda > \Lambda$, где c_1 и c_2 – положительные постоянные, не зависящие от λ . Тогда по лемме Гронуолла имеем

$$\varphi^\lambda(t) \leq \varepsilon c_1 \exp^{c_2 t}$$

для всех $\lambda > \Lambda$. Следовательно, $\varphi^\lambda(t) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и процессы $(x_y^\lambda, u_t^\lambda)$ сходятся к $(\bar{x}_t, \bar{u}_t)$ локально равномерно по вероятности.

Поскольку локально равномерная сходимость по вероятности влечет сходимость по распределению, то, учитывая утверждение леммы 5.1, имеем окончательный результат:

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Слабый предел последовательности мер, порождаемых диффузиями со сносом (b_t^λ) , $0 \leq t \leq T$, на пространстве функций $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, при стремлении λ к ∞ есть мера на $C([0, T], \mathbb{M})$, порождаемая броуновским движением на многообразии $\mathbb{M}$.*

Пользуясь случаем, автор благодарит О.Г. Смолянова за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. K. Driver, *A Primer on Riemannian Geometry and Stochastic Analysis on Path Spaces*, Preprint, Univ. of California, San Diego, CA, 2003, 60 p.
- [2] О.Г. Смолянов, Х. фон Вайцзеккер, О. Виттих, “Поверхностные меры и начально-краевые задачи, порождаемые диффузиями со сносом”, *Докл. РАН*, **415**:6 (2007), 737–741.
- [3] N. A. Sidorova, O. G. Smolyanov, H. v. Weizsäcker, O. Wittich, “The surface limit of Brownian motion in tubular neighborhoods of an embedded Riemannian manifold”, *J. Funct. Anal.*, **206**:2 (2004), 391–413.
- [4] L. C. G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*. Vol. 2. *Itô Calculus*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [5] H. v. Weizsäcker, G. Winkler, *Stochastic Integrals. An Introduction*, Adv. Lectures Math., Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990.

П. Ю. Тарасенко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pj_tarase@mail.ru

Поступило

20.02.2008

Исправленный вариант

20.01.2009