Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 538–551

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:16:19

Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович

Найдены точные значения наилучших L_1 -приближений классов $W^r F$, $r \in \mathbb{N}$, периодических функций, r -я производная которых принадлежит заданному перестановочно-инвариантному множеству F , а также классов $W^r H^\omega$ периодических функций, r -я производная которых имеет заданную выпуклую вверх мажоранту $\omega(t)$ модуля непрерывности, подпространствами полиномиальных сплайнов порядка $m \geq r + 1$ дефекта 2 с узлами в точках $2k\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Показано, что эти подпространства являются экстремальными для поперечников по Колмогорову соответствующих функциональных классов.

Библиография: 28 названий.

1. Необходимые обозначения и определения. Пусть L_p , $1 \leq p \leq \infty$, – пространства 2π -периодических функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$, и пусть $p' = p/(p-1)$.

Пусть H – подпространство пространства L_p и $g \in L_{p'}$. Если для всех $h \in H$

$$\int_0^{2\pi} g(x)h(x) dx = 0,$$

то будем писать $g \perp H$. Если H – подпространство констант, то вместо $g \perp H$ будем использовать обозначение $g \perp 1$.

Пусть множество $F \subset L_1$ таково, что $\{f \in F : f \perp 1\} \neq \emptyset$. Для $r = 1, 2, \dots$ обозначим через $W^r F$ класс функций $f \in L_1$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in F$. Отметим, что если F – единичный шар пространства L_p , то множество $W^r F = W_p^r$ – это стандартный соболевский класс функций, у которых $(r-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$.

Для неотрицательной функции $f \in L_1$ обозначим через $r(f, t)$ неубывающую перестановку (см. [1; с.130]) сужения функции f на промежуток $[0, 2\pi]$. Если g – произвольная функция из L_1 , то положим (см. [2; с.99])

$$\Pi(g, t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t),$$

где $g_{\pm} := \max\{\pm g(t), 0\}$.

Множество $F \in L_1$ назовем Π -инвариантным, если из того, что $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$, следует, что $g \in F$.

Приведем некоторые примеры Π -инвариантных множеств.

ПРИМЕР 1. Π -инвариантен единичный шар в любом вложенном в L_1 симметричном пространстве 2π -периодических функций, в частности, в пространствах L_p , $1 \leq p \leq \infty$, Орлича [3], Лоренца [4] и Марцинкевича [5].

ПРИМЕР 2. Пусть φ – произвольная неотрицательная неубывающая функция, определенная на $[0, +\infty)$. Тогда множество

$$F = F(\varphi) = \left\{ f \in L_1 : \int_0^{2\pi} \varphi(|f(t)|) dt \leq 1 \right\}$$

Π -инвариантно.

ПРИМЕР 3. Пусть f – фиксированная функция из L_1 , $f \perp 1$. Тогда Π -инвариантным является каждое из множеств

$$\begin{aligned} F_{f,\Pi} &= \{g \in L_1 : \Pi(g) = \Pi(f)\}, \\ F_{f,r} &= \{g \in L_1 : r(|g|, t) = r(|f|, t), t \in [0, 2\pi)\}, \\ \bar{F}_{f,r} &= \{g \in L_1 : r(|g|, t) \leq r(|f|, t), t \in [0, 2\pi)\}. \end{aligned}$$

Пусть C^r , $r = 0, 1, \dots$, – пространство r раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $r = 0$) 2π -периодических функций, $\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности (см., например, [6; §6.1]). Класс функций $f \in C^r$, у которых при всех t

$$|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t + \delta)| \leq \omega(\delta), \quad \delta \geq 0,$$

будем обозначать через $W^r H^\omega$.

Наилучшее приближение класса $M \subset L_p$ множеством H из L_p в метрике L_p – это величина

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_p.$$

Величины

$$d_n(M, L_p) = \inf_{H_n} E(M, H)_p, \quad (1.1)$$

где $\inf_{H_n}$ берется по всем подпространствам H_n пространства L_p , размерность которых не превосходит n , называются *поперечниками Колмогорова* класса M в пространстве L_p . Подпространства H_n , которые реализуют точную нижнюю грань в правой части (1.1), называются *экстремальными*.

Для каждого натурального n и $m = 0, 1, \dots$ через T_{2n-1} обозначим пространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$, через $S_{2n,m}^1$ – пространство 2π -периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 1 с узлами в точках $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$, а через $S_{2n,m}^2$, $n, m \in \mathbb{N}$ – пространство 2π -периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 2, с узлами в точках $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi_{\lambda,m}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, – m -й $(2\pi/\lambda)$ -периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{\lambda,0}(t) = \text{sign} \sin \lambda t$.

При фиксированных $\omega(\cdot)$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f_{n,0}(\omega; t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n} - 2t\right), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2}\omega\left(2t - \frac{\pi}{n}\right), & \frac{\pi}{2n} \leq t \leq \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Через $f_{n,r}(\omega; t)$, $r = 1, 2, \dots$, обозначим r -й $(2\pi/n)$ -периодический интеграл от функции $f_{n,0}(\omega; t)$ с нулевым средним значением на периоде.

2. Некоторые известные результаты. Хорошо известно (см., например, [6; теоремы 4.2.4, 5.4.8, 8.1.13]), что при всех $n, r = 1, 2, \dots$, $1 \leq p \leq \infty$ выполняются равенства

$$E(W_p^r, T_{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}, \quad (2.1)$$

$$E(W_p^r, S_{2n,m}^1)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}, \quad m = r-1, r, \dots, \quad (2.2)$$

$$d_{2n-1}(W_p^r, L_1) = d_{2n}(W_p^r, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \quad (2.3)$$

При этом пространства T_{2n-1} являются экстремальными пространствами для поперечников $d_{2n-1}(W_p^r, L_1)$ и $d_{2n}(W_p^r, L_1)$, а пространства $S_{2n,m}^1$ при всех $m \geq r-1$ – для поперечников $d_{2n}(W_p^r, L_1)$.

Равенство (2.1) при $p = 1$ получено Никольским [7], для $p > 1$ его установил Тайков [8], при $p = \infty$ независимо и другим методом этот результат получила Туровец [9]. Соотношение (2.2) установлено Лигуном [10]. Оценку снизу для нечетных поперечников при $p = 1$ получили независимо Маковоз [11] и Субботин [12], [13], а при $p = \infty$ – Маковоз [14]. Оценка снизу для четных поперечников при $p = 1, \infty$ принадлежит Рубану (см., например [1; гл. 10]). Для $1 < p < \infty$ соотношение (2.3) независимо и разными методами получили Лигун [15], Маковоз [16], Пинкус [17].

В [18] установлено, что для произвольного Π -инвариантного множества F и любых $n, r = 1, 2, \dots$, $m \geq r$ имеют место следующие равенства

$$E(W^r F, T_{2n-1})_1 = E(W^r F, S_{2n,m}^1)_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt,$$

$$d_{2n-1}(W^r F, L_1) = d_{2n}(W^r F, L_1) = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt. \quad (2.4)$$

При этом пространства T_{2n-1} являются экстремальными пространствами для поперечников $d_{2n-1}(W^r F, L_1)$ и $d_{2n}(W^r F, L_1)$, а пространства $S_{2n,m}^1$ при всех $m \geq r$ – для поперечников $d_{2n}(W^r F, L_1)$.

Корнейчук [19]–[21] (см. также [6; теоремы 7.2.2, 7.2.5]) доказал, что для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ при всех $n = 1, 2, \dots$, $r = 0, 1, \dots$, $m \geq r$ имеет место соотношение

$$E(W^r H^\omega, T_{2n-1})_1 = E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^1)_1 = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1. \quad (2.5)$$

Известно также, что

$$d_{2n-1}(W^r H^\omega, L_1) = d_{2n}(W^r H^\omega, L_1) = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1, \quad (2.6)$$

причем поперечники $d_{2n-1}(W^r H^\omega, L_1)$ и $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ реализует подпространство T_{2n-1} , а поперечник $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ – подпространство $S_{2n,m}^1$, $m \geq r$. Оценки снизу для нечетных поперечников получены Моторным и Рубаном [22], а для четных Рубаном [23].

3. Аппроксимация сплайнами дефекта 2. Формулировка результатов.

Напомним, что $S_{2n,m}^2$, $n, m \in \mathbb{N}$, – линейное пространство 2π -периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 2 с узлами в точках $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что размерность этого пространства при любом m равна $2n$ (см., например, [6; следствие 2.3.7]).

В данной работе найдены точные значения наилучших L_1 -приближений классов $W^r F$ и $W^r H^\omega$ сплайнами из $S_{2n,m}^2$ при $m \geq r$ и $m \geq r+1$ соответственно. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n, r = 1, 2, \dots, m = r, r+1, \dots, 1 \leq p \leq \infty$, F – произвольное Π -инвариантное множество 2π -периодических функций. Тогда

$$E(W^r F, S_{2n,m}^2)_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt. \quad (3.1)$$

В частности,

$$E(W_p^r, S_{2n,m}^2)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \quad (3.2)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n, r = 1, 2, \dots, m = r+1, r+2, \dots$, $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^2)_1 = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1.$$

Результаты теорем 1 и 2 вместе с соотношениями (2.4) и (2.6) показывают, что $S_{2n,m}^2$ наряду с T_{2n-1} и $S_{2n,m}^1$ являются экстремальными подпространствами для поперечников $d_{2n}(W^r F, L_1)$ (при $m \geq r$) и $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ (при $m \geq r+1$).

Существенную роль при доказательстве теорем 1 и 2 будет играть следующая лемма, проясняющая смысл ортогональности функции g подпространству $S_{2n,m}^2$.

ЛЕММА 1. Для того чтобы 2π -периодическая функция $f \in L_1$ была ортогональна пространству $S_{2n,m}^2$, $n, m \in \mathbb{N}$, необходимо и достаточно, чтобы для $(m+1)$ -й 2π -периодической первообразной $f_{m+1}(t)$ функции $f(t)$

$$f_{m+1}(t_1) = f_{m+1}(t_2) = \dots = f_{m+1}(t_n), \quad f'_{m+1}(t_1) = f'_{m+1}(t_2) = \dots = f'_{m+1}(t_n) = 0.$$

Кроме того, при доказательстве теорем 1 и 2 нами существенно будет использована следующая теорема, которая представляет и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n, l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, $t_j = 2j\pi/n$ для $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_{n,l}(t + \alpha) + \|\varphi_{n,l}\|_\infty$, где α выбрано из условия $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Тогда для любой функции $g \in W_\infty^l$ такой, что

$$g(t_1) = g(t_2) = \dots = g(t_n), \quad g'(t_1) = g'(t_2) = \dots = g'(t_n) = 0,$$

имеют место утверждения

- для любого $t \in \mathbb{R}$ $|g(t) - g(0)| \leq \tilde{\varphi}(t)$, причем, если $|g(t) - g(0)|$ отлична от $\tilde{\varphi}(t)$, то знак равенства имеет место только в точках t_j , $j = 1, 2, \dots, n$;
- $\|g^{(k)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,l-k}\|_\infty$, $k = 1, 2, \dots, l$.

4. Доказательства. Сначала мы докажем лемму 1, затем теорему 3, а уже затем теоремы 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Известно [6; следствие 2.3.6], что любой сплайн s из $S_{2n,m}^2$ единственным образом представим в виде

$$s(t) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j B_{m+1}(t - t_j) + \sum_{j=1}^n b_j B_m(t - t_j), \quad (4.1)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(t) dt, \quad \sum_{j=1}^n a_j = 0,$$

$$B_m(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kt - \pi m/2)}{k^m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

– ядро Бернулли.

Пусть $f \perp S_{2n,m}^2$, т.е.

$$\int_0^{2\pi} f(t)s(t) dt = 0 \quad \text{для любого } s \in S_{2n,m}^2.$$

Прежде всего заметим, что так как $S_{2n,m}^2$ содержит константы, то $f \perp 1$. С учетом (4.1) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(t) \left(a_0 + \sum_{j=1}^n a_j B_{m+1}(t - t_j) + \sum_{j=1}^n b_j B_m(t - t_j) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{2\pi} f(t) B_{m+1}(t - t_j) dt + \sum_{j=1}^n b_j \int_0^{2\pi} f(t) B_m(t - t_j) dt \\ &= \sum_{j=1}^n a_j f_{m+1}(t_j) + \sum_{j=1}^n b_j f'_{m+1}(t_j) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, тогда для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы для любого набора $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ было $\sum_{j=1}^n b_j f'_{m+1}(t_j) = 0$, а это равенство возможно, только если $f'_{m+1}(t_j) = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть теперь $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Равенство $\sum_{j=1}^n a_j f_{m+1}(t_j) = 0$ равносильно ортогональности векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $f_{m+1} = (f_{m+1}(t_1), f_{m+1}(t_2), \dots, f_{m+1}(t_n))$. Условие $\sum_{j=1}^n a_j = 0$ выделяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость с нормальным вектором $(1, 1, \dots, 1)$, который в свою очередь параллелен вектору $\bar{f}_{m+1}$, а следовательно, $f_{m+1}(t_1) = f_{m+1}(t_2) = \dots = f_{m+1}(t_n)$. Необходимость установлена. В силу соотношения (4.2) и условия $\sum_{j=1}^n a_j = 0$ достаточность очевидна.

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\tilde{g}(t) = g(t) - g(0)$. Функции $\tilde{\varphi}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ имеют нули кратности 2 в точках t_j , $j \in \mathbb{Z}$.

Для доказательства утверждения а) предположим, что найдется t_* такое, что $|\tilde{g}(t_*)| > \tilde{\varphi}(t_*)$. При подходящем $0 < |\lambda| < 1$ получим $\lambda \tilde{g}(t_*) = \tilde{\varphi}(t_*)$. Пусть $\delta(t) = \tilde{\varphi}(t) - \lambda \tilde{g}(t)$. Так как $\|\lambda \tilde{g}^{(l)}(t)\|_\infty < 1$, а $\|\tilde{\varphi}^{(l)}(t)\|_\infty = 1$, то ни на одном отрезке $[\alpha, \beta]$ положительной длины функция $\delta^{(l)}(t)$, а значит, и $\delta(t)$ не обращаются тождественно в нуль, так что все нули $\delta(t)$ являются изолированными. Ясно, что функция $\delta(t)$ имеет нуль в точке t_* и нули кратности 2 в точках t_j , $j \in \mathbb{Z}$, т.е. всего на периоде у функции $\delta(t)$ имеется по крайней мере $2n + 1$ нуль с учетом кратности. Тогда у $\delta'(t)$ будет по крайней мере $2n + 1$ различных нулей, а у $\delta^{(l)}(t)$, $l \geq 2$, будет не менее $2n + 2$ перемен знака на периоде. Однако $\delta^{(l)}(t) = \varphi_{n,0}^{(l)}(t) - \lambda \tilde{g}^{(l)}(t)$ имеет на периоде ровно $2n$ перемен знака, и мы получили противоречие, которое доказывает утверждение а).

Докажем утверждение б). Пусть $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ таково, что $|\tilde{g}'(t_{\max})| = \|\tilde{g}'\|_{\infty}$, и $j \in \mathbb{Z}$ выбрано из условия $t_{\max} \in (t_j, t_{j+1})$. Предположив, что $|\tilde{g}'(t_{\max})| > \|\tilde{\varphi}'\|_{\infty}$, мы сможем указать такое $0 < |\lambda| < 1$, что

$$\lambda \tilde{g}'(t_{\max}) = \|\tilde{\varphi}'\|_{\infty} = \tilde{\varphi}'\left(t_j + \frac{\pi}{2n}\right) = \left|\tilde{\varphi}'\left(t_j - \frac{\pi}{2n}\right)\right|. \quad (4.3)$$

Кроме того,

$$\lambda \tilde{g}'(t_j) = \lambda \tilde{g}'(t_{j+1}) = \tilde{\varphi}'(t_j) = \tilde{\varphi}'(t_{j+1}) = 0. \quad (4.4)$$

Ясно, что функции $\lambda \tilde{g}'(t)$ и $\tilde{\varphi}'(t)$ удовлетворяют условиям теоремы Колмогорова о сравнении производных [24] (см. также [6; теорема 3.3.2]). Учитывая это обстоятельство и соотношения (4.3), (4.4), нетрудно установить (достаточно, например, воспользоваться предложением 5.6.6 из [1]), что

$$t_{\max} \in \left[t_j + \frac{\pi}{2n}, t_{j+1} - \frac{\pi}{2n}\right].$$

Ясно, что найдутся точки $t_j^1 \in [t_j, t_j + \pi/n]$, $t_j^2 \in [t_j + \pi/n, t_{j+1}]$ такие, что

$$\lambda \tilde{g}'(t_j^1) = \lambda \tilde{g}'(t_j^2) = 0, \quad t_{\max} \in (t_j^1, t_j^2), \quad \lambda \tilde{g}'(t) > 0, \quad t \in (t_j^1, t_j^2). \quad (4.5)$$

Снова используя предложение 5.6.6 из [1], заключаем, что

$$t_{\max} - t_j^1 \geq \frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad t_j^2 - t_{\max} \geq \frac{\pi}{2n}$$

и, следовательно,

$$t_j^1 - t_j + t_{j+1} - t_j^2 \leq \frac{\pi}{n}. \quad (4.6)$$

В силу предложения 5.6.5 из [1] с учетом того, что

$$\lambda \tilde{g}'(t) \geq \tilde{\varphi}'\left(t + \frac{\pi}{2n} - t_{\max}\right), \quad t \in \left(t_{\max} - \frac{\pi}{2n}, t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right), \quad (4.7)$$

заключаем, что

$$\int_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda \tilde{g}'(t) dt \geq \int_{t_{\max} - \pi/2n}^{t_{\max} + \pi/2n} \tilde{\varphi}'\left(t + \frac{\pi}{2n} - t_{\max}\right) dt = \int_{t_j}^{t_j + \pi/n} \tilde{\varphi}'(t) dt, \quad (4.8)$$

и так как $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda \tilde{g}'(t) dt = 0$, то

$$\left| \int_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} \lambda \tilde{g}'(t) dt \right| \geq \int_{t_j}^{t_j + \pi/n} \tilde{\varphi}'(t) dt. \quad (4.9)$$

С другой стороны (здесь мы снова используем (4.4) и предложение 5.6.5 из [1]) для $t \in (t_j, t_j^1) \cup (t_j^2, t_{j+1})$ получаем $|\lambda \tilde{g}'(t)| \leq |\tilde{\varphi}'(t)|$. Учитывая это неравенство и (4.6), заключаем, что

$$\left| \int_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} \lambda \tilde{g}'(t) dt \right| \leq \int_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} |\tilde{\varphi}'(t)| dt \leq \int_{t_j}^{t_j + \pi/n} \tilde{\varphi}'(t) dt. \quad (4.10)$$

Сопоставляя (4.9) и (4.10), видим, что

$$\left| \int_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} \lambda \tilde{g}'(t) dt \right| = \left| \int_{t_j}^{t_j + \pi/n} \tilde{\varphi}'(t) dt \right|,$$

но тогда и

$$\int_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda \tilde{g}'(t) dt = \int_{t_j}^{t_j + \pi/n} \tilde{\varphi}'(t) dt. \quad (4.11)$$

Вспоминая, что $\lambda \tilde{g}'(t) \geq \tilde{\varphi}'(t + \pi/2n - t_{\max})$ для всех $t \in [t_{\max} - \pi/2n, t_{\max} + \pi/2n]$, видим, что равенство (4.11) может выполняться только в том случае, когда $\lambda \tilde{g}'(t) = \tilde{\varphi}'(t + \pi/2n - t_{\max})$ для всех $t \in [t_{\max} - \pi/2n, t_{\max} + \pi/2n]$, но это невозможно, так как $|\lambda \tilde{g}^{(l)}(t)| < 1$ для почти всех t .

Таким образом, нами доказана справедливость неравенства $\|g'\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n,l}\|_{\infty}$, откуда, используя теорему сравнения [6; теорема 3.3.2], получим неравенства

$$\|g^{(k)}\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n,l-k}\|_{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Используя теорему двойственности Никольского [25] для наилучшего L_1 -приближения подпространством (см. также [6; теорема 1.4.1]), получим

$$E := E(W^r F, S_{2n,m}^2)_1 = \sup_{f \in W^r F} \sup_{\|g\|_{\infty} \leq 1, g \perp S_{2n,m}^2} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

После r -кратного интегрирования по частям с использованием леммы 1 можем написать

$$E = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^r \\ g^{(r)} \perp S_{2n,m}^2}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^{m+1} \\ g(t_1) = \dots = g(t_n) \\ g'(t_1) = \dots = g'(t_n) = 0}} \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t) dt,$$

где $t_j = 2j\pi/n$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая предложение 1.3.4 из [26], окончательно получаем

$$E = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^r \\ g^{(r)} \perp S_{2n,m}^2}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \sup_{\substack{g \in W_{\infty}^{m+1} \\ g(t_1) = \dots = g(t_n) \\ g'(t_1) = \dots = g'(t_n) = 0}} \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(g^{(m-r+1)}, t) dt. \quad (4.12)$$

Покажем, что для любой функции $g \in W_{\infty}^{m+1}$ такой, что $g(t_1) = \dots = g(t_n)$ и $g'(t_1) = \dots = g'(t_n) = 0$, имеет место неравенство

$$\int_0^t r((g^{(m-r+1)})_{\pm}, u) du \leq \int_0^t r((\varphi_{n,r})_{\pm}, u) du, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.13)$$

Если $m > r$, то используя утверждение б) теоремы 3 при $l = m + 1$, получим $\|g^{(m-r)}\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_{\infty}$. Таким образом, выполняются условия теоремы 3.3.4 из [6], в силу которой неравенство (4.13) имеет место.

В случае $m = r$ сравним интегралы

$$\int_0^t r(g'_{\pm}, u) du \quad \text{и} \quad \int_0^t r((\varphi_{n,r})_{\pm}, u) du, \quad t \in [0, 2\pi],$$

непосредственно.

Пусть $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_{n,r+1}(t + \mu) + \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, где μ выбрано из условия $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Отметим, что $r((\tilde{\varphi}')_+, t) = r((\varphi_{n,r})_+, t)$ для всех $t \in [0, 2\pi]$.

Обозначим через g'_j и $\tilde{\varphi}'_j$ сужения на $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, функций g' и $\tilde{\varphi}'$ соответственно.

Сначала докажем, что для всех $j = 0, 1, \dots, n-1$ имеет место неравенство

$$\int_0^t r((g'_j)_\pm, u) du \leq \int_0^t r((\tilde{\varphi}'_j)_\pm, u) du, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]. \quad (4.14)$$

В первую очередь отметим, что для всех $j = 0, 1, \dots, n-1$ имеет место соотношение

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_\pm(t) dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tilde{\varphi}'_j)_\pm(t) dt. \quad (4.15)$$

Действительно, в силу условия $\int_{t_j}^{t_{j+1}} g'_j(t) dt = 0$ видим, что $\text{supp}((g'_j)_\pm) \neq \emptyset$, если g'_j – не тождественный нуль на $[t_j, t_{j+1}]$. Пусть, для определенности,

$$\text{mes supp}((g'_j)_+) \geq \text{mes supp}((\tilde{\varphi}'_j)_+) \quad \text{и} \quad \text{mes supp}((g'_j)_-) \leq \text{mes supp}((\tilde{\varphi}'_j)_-).$$

Используя предложение 5.6.5 из [1], нетрудно убедиться в том, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_-(t) dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\tilde{\varphi}'_j)_-(t) dt \quad (4.16)$$

и, более того, что справедливо неравенство (4.14) для отрицательных частей. Учитывая (4.16) и тот факт, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_+(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_-(t) dt,$$

получим (4.15). Докажем, что (4.14) имеет место и для положительных частей, т.е.

$$\int_0^t r((g'_j)_+, u) du \leq \int_0^t r((\tilde{\varphi}'_j)_+, u) du, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right], \quad (4.17)$$

для каждого $j = 0, 1, \dots, n-1$. При этом будем следовать схеме доказательства теоремы 6.8.1 из [1].

Положим

$$\delta(t) = r((\tilde{\varphi}'_j)_+, t) - r((g'_j)_+, t), \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right].$$

Если $\delta(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, 2\pi/n]$, то справедливость (4.17) очевидна. Заметим, что когда $\delta(t)$ меняет знак на промежутке $(0, 2\pi/n)$, справедливость (4.17) достаточно установить лишь во всех точках промежутка $(0, 2\pi/n)$, являющихся нулями $\delta(t)$ и правыми концами интервалов, на которых $\delta(t) < 0$.

Пусть $\delta(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (0, 2\pi/n)$ и найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\delta(t) < 0$ для $0 < \xi - \varepsilon < t < \xi$.

Положим

$$z = r((g'_j)_+, \xi) = r((\tilde{\varphi}'_j)_+, \xi).$$

Тогда

$$\int_0^\xi r((g'_j)_+, t) dt = \int_{e_j(z)}^\xi (g'_j)_+(t) dt,$$

где

$$e_j(z) = \{t \in (t_j, t_{j+1}) : (g'_j)_+(t) > z\},$$

причем $\text{mes } e_j(z) = \xi$.

Множество $e_j(z)$ состоит из непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset (t_j, t_{j+1})$ таких, что

$$(g'_j)_+(a_k) = (g'_j)_+(b_k) = r((g'_j)_+, x) = z, \quad (g'_j)_+(t) > z, \quad t \in (a_k, b_k). \quad (4.18)$$

Покажем, что при сделанных предположениях такой интервал единственный.

Предположим, что в множестве $e_j(x)$ найдется по крайней мере два непересекающихся интервала (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , удовлетворяющих условиям (4.18). Можно выбрать h настолько малым, что при $k = 1, 2$ внутри (a_k, b_k) существует интервал $(a'_k, b'_k) \subset e_j(z + h)$, причем, если

$$z + h = (g'_j)_+(a'_k) = (g'_j)_+(b'_k) = r((g'_j)_+, \xi - \gamma_0),$$

то для $\xi - \gamma_0 < t < \xi$ будет $\delta(t) < 0$. В силу последнего условия, если $r((\tilde{\varphi}'_j)_+, \xi - \gamma) = z + h$, то $\gamma > \gamma_0$. Очевидно,

$$\gamma_0 = b_1 - b'_1 + b_2 - b'_2 + a'_1 - a_1 + a'_2 - a_2.$$

Выберем на промежутке монотонности $[t_j, t_j + \pi/2n]$ функции $(\tilde{\varphi}'_j)_+$ точки α и α' таким образом, чтобы было

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}'_j)_+(\alpha) &= (g'_j)_+(a_k) = (g'_j)_+(b_k) = z, & k &= 1, 2, \\ (\tilde{\varphi}'_j)_+(\alpha') &= (g'_j)_+(a'_k) = (g'_j)_+(b'_k) = z + h, & k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда в силу предложения 5.6.6 из [1] будем иметь

$$|a'_k - a_k| \geq |\alpha' - \alpha|, \quad |b_k - b'_k| \geq |\alpha' - \alpha|, \quad k = 1, 2,$$

и, значит,

$$\gamma_0 \geq 4|\alpha' - \alpha| = 2\gamma > \gamma,$$

что противоречит условию $\gamma_0 < \gamma$.

Итак, множество $e_j(z)$ состоит из одного интервала (a, b) , поэтому отрезок $[c, d] \subset [t_j, t_{j+1}]$, который содержит этот интервал и удовлетворяет условиям

$$(g'_j)_+(c) = (g'_j)_+(d) = 0, \quad (g'_j)_+(t) > 0, \quad c < t < d,$$

тоже единственный. Применив предложение 5.6.5 из [1], получим неравенство

$$\int_c^a (g'_j)_+(t) dt + \int_b^d (g'_j)_+(t) dt \geq 2 \int_{t_j}^\alpha (\tilde{\varphi}'_j)_+(t) dt,$$

на основании которого, используя (4.15), можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^\xi r((\tilde{\varphi}'_j)_+, t) dt &= \int_{t_j}^{t_j + \pi/n} (\tilde{\varphi}'_j)_+(t) dt - 2 \int_{t_j}^\alpha (\tilde{\varphi}'_j)_+(t) dt \\ &\geq \int_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_+(t) dt - \int_c^a (g'_j)_+(t) dt - \int_b^d (g'_j)_+(t) dt \\ &= \int_0^\xi r((g'_j)_+, t) dt, \end{aligned}$$

откуда сразу следует (4.17). Таким образом, нами доказано, что для любого $j = 0, 1, \dots, n-1$ имеет место (4.14).

Теперь докажем, что для любой функции $g \in W_{\infty}^{r+1}$ такой, что

$$g(t_1) = g(t_2) = \dots = g(t_n), \quad g'(t_1) = g'(t_2) = \dots = g'(t_n) = 0,$$

имеет место неравенство

$$\int_0^t r((g')_{\pm}, u) du \leq \int_0^t r((\tilde{\varphi}')_{\pm}, u) du = \int_0^t r((\varphi_{n,r})_{\pm}, u) du, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (4.19)$$

Доказательство проведем для положительных частей. Случай отрицательных частей разбирается аналогично.

Пусть $t \in [0, 2\pi]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, обозначим

$$\sigma_j(t) = \text{mes}\{u \in [t_j, t_{j+1}] : (g'_j)_+(u) \geq r((g')_+, t)\},$$

тогда

$$t = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j(t).$$

Для $t \in [0, 2\pi]$, учитывая неравенство (4.17), можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^t r((g')_+, u) du &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\sigma_j(t)} r((g'_j)_+, u) du \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\sigma_j(t)} r((\tilde{\varphi}'_j)_+, u) du = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\sigma_j(t)} r((\tilde{\varphi}'_0)_+, u) du. \end{aligned}$$

Отметим, что функция

$$F(t) = \int_0^t r((\tilde{\varphi}'_0)_+, u) du$$

выпукла вверх на $[0, 2\pi/n]$. Применяя неравенство Йенсена, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{\sigma_j(t)} r((\tilde{\varphi}'_0)_+, u) du &\leq n \int_0^{(1/n) \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j(t)} r((\tilde{\varphi}'_0)_+, u) du \\ &= n \int_0^{t/n} r((\tilde{\varphi}'_j)_+, u) du = \int_0^t r((\tilde{\varphi}')_+, u) du. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (4.19) установлено, и, следовательно, (4.13) выполняется также для $m = r$.

Из (4.13) следует, что функции $g^{(m-r+1)}$, $m \geq r$, и $\varphi_{n,r}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3.13 (см. [26]), из которой следует, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $t \in [0, 2\pi]$ выполняются неравенства

$$\int_0^t r((g^{(m-r+1)} - \lambda)_{\pm}, u) du \leq \int_0^t r((\varphi_{n,r} - \lambda)_{\pm}, u) du. \quad (4.20)$$

Используя предложение 1.3.14 из [26], можем написать

$$\int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(g^{(m-r+1)}, t) dt \leq \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt.$$

Из (4.12) и последнего неравенства сразу следует оценка сверху для E :

$$E \leq \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt.$$

Оценка снизу очевидно следует из неравенства

$$d_{2n}(W^r F, L_1) \leq E(W^r F, S_{2n,m}^2)_1$$

и соотношения (2.4).

Таким образом, соотношение (3.1) доказано. Что касается соотношения (3.2), то оно следует из равенства

$$\sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1 \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t) dt = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (4.14), по-видимому, представляет и самостоятельный интерес. Отметим, что подобные интегральные представления для перестановок функций $f \in W_\infty^{r+1}$ таких, что $\|f\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, на отрезках длины π/n были получены в [27; теорема 2], а на произвольных отрезках длины меньшей длины периода в [28].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Используя теорему двойственности для наилучшего L_1 -приближения подпространством [6; теорема 1.4.1], получим

$$E := E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^2)_1 = \sup_{f \in W^r H^\omega} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leq 1 \\ g \perp S_{2n,m}^2}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

После r -кратного интегрирования по частям с использованием леммы 1 можем написать

$$E = \sup_{\substack{f \in H^\omega \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_\infty^r \\ g^{(r)} \perp S_{2n,m}^2}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \sup_{\substack{f \in H^\omega \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W_\infty^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_n) \\ g'(t_1)=\dots=g'(t_n)=0}} \int_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t) dt. \quad (4.21)$$

Через $R(f, t)$ будем обозначать через Σ перестановку 2π -периодической функции f на промежутке длины 2π [6; с. 294].

Из (4.21), применяя теорему 7.5.1 из [1], получим

$$E \leq \sup_{\substack{g \in W_\infty^{m+1} \\ g(t_1)=\dots=g(t_n) \\ g'(t_1)=\dots=g'(t_n)=0}} \int_0^{2\pi} R(g^{(m-r)}, t) \omega'(t) dt. \quad (4.22)$$

Оценим правую часть (4.22). Пусть сначала $m \geq r + 2$, $g \in W_\infty^{m+1}$ и

$$g(t_1) = g(t_2) = \dots = g(t_n), \quad g'(t_1) = g'(t_2) = \dots = g'(t_n) = 0. \quad (4.23)$$

Тогда функция g удовлетворяет условиям теоремы 3, в силу которой

$$\|g^{(m-r)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty,$$

и, следовательно,

$$\max_{a,b \in [0,2\pi]} \left| \int_a^b g^{(m-r)}(t) dt \right| \leq 2 \|g^{(m-r-1)}\|_{\infty} \leq 2 \|\varphi_{n,r+2}\|_{\infty}.$$

Значит, для такой функции g выполняются условия теоремы 6.8.5 из [1], в силу которой

$$\int_0^{2\pi} R(g^{(m-r)}, t) \omega'(t) dt \leq \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t) \omega'(t) dt. \quad (4.24)$$

Пусть теперь $m = r + 1$. В этом случае неравенство (4.24) мы установим непосредственно.

Так как $g \in W_{\infty}^{r+2}$ и удовлетворяет условию (4.23), то по теореме 3 $\|g'\|_{\infty} \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_{\infty}$. Теперь в силу теоремы 6.8.4 из [1] заключаем, что для любого $x \in (0, \pi/n)$ выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$|R'(g', x)| \leq |R'(\varphi_{n,r+1}, x)| \quad (4.25)$$

или

$$R(g', x) \leq R(\varphi_{n,r+1}, x). \quad (4.26)$$

Это означает, что разность $\delta(x) = R(\varphi_{n,r+1}, x) - R(g', x)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ либо неотрицательна либо меняет знак с “+” на “-” в единственной точке $t_0 \in [0, 2\pi]$. Отметим, что в случае, когда $\delta(x) \geq 0$ для всех $t_0 \in [0, 2\pi]$, выполнение неравенства (4.24) очевидно. Рассмотрим случай, когда $\delta(x)$ меняет знак на $[0, 2\pi]$. Из полученного при доказательстве теоремы 1 неравенства (4.19) при $t = 2\pi$ следует, что

$$\int_0^{2\pi} r(g'_{\pm}, u) du \leq \int_0^{2\pi} r((\varphi_{n,r+1})_{\pm}, u) du,$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} r(g', u) du \leq \int_0^{2\pi} r((\varphi_{n,r+1}), u) du. \quad (4.27)$$

Учитывая тот факт [1; с. 131, 141], что для $\psi \in L_1$

$$\|\psi\|_1 = \int_0^{2\pi} r(\psi, u) du = \int_0^{2\pi} R(\psi, u) du,$$

на основании (4.27) можем утверждать, что $\int_0^{2\pi} \delta(t) dt \geq 0$. Рассуждая далее, как при доказательстве теоремы 6.7.6 из [1], имеем (ниже через $\omega'_+(t)$ обозначена правая производная функции $\omega(t)$, которая в силу выпуклости вверх функции $\omega(t)$ существует в каждой точке)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \omega'(t) R(\varphi_{n,r+1}, t) dt - \int_0^{2\pi} \omega'(t) R(g', t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \omega'(t) \delta(t) dt = \int_0^{t_0} \omega'(t) \delta(t) dt + \int_{t_0}^{2\pi} \omega'(t) \delta(t) dt \\ &\geq \omega'(t_0) \int_0^{t_0} \delta(t) dt + \omega'(t_0) \int_{t_0}^{2\pi} \delta(t) dt = \omega'(t_0) \int_0^{2\pi} \delta(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Справедливость (4.24) установлена и при $m = r + 1$. Учитывая (4.22), (4.24), а также равенство [6; с. 299]

$$\|f_{n,m}(\omega; \cdot)\|_1 = \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,m+1}, t) \omega'(t) dt,$$

получаем оценку сверху для величин $E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^2)_1$:

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m}^2)_1 = E \leq \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t) \omega'(t) dt = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1.$$

Оценка снизу следует из неравенства

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,r}^2)_1 \geq d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$$

и (2.3).

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.
- [2] Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Аппроксимация с ограничениями*, Наукова думка, Киев, 1982.
- [3] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1958.
- [4] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [5] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [6] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [7] С. М. Никольский, "Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [8] Л. В. Тайков, "О приближении в среднем некоторых классов аналитических функций", *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН, **88**, Наука, М., 1967, 61–70.
- [9] С. П. Туровец, "О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций", *Докл. АН УССР. Сер. А*, **5** (1968), 417–421.
- [10] А. А. Ligun, "Inequalities for upper bounds of functions", *Anal. Math.*, **2**:1 (1976), 11–40.
- [11] Ю. И. Маковоз, "Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L ", *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1969, № 4, 19–28.
- [12] Ю. Н. Субботин, "Поперечник класса $W^r L$ в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями", *Матем. заметки*, **7**:1 (1970), 43–52.
- [13] Ю. Н. Субботин, "Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников", *Приближение периодических функций*, Тр. МИАН, **109**, Наука, М., 1971, 35–60.
- [14] Ю. И. Маковоз, "Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах", *Матем. сб.*, **87**:1 (1972), 136–142.
- [15] А. А. Лигун, "О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций", *Матем. заметки*, **27**:1 (1980), 61–75.
- [16] Ю. И. Маковоз, "Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля", *Матем. заметки*, **26**:5 (1979), 805–812.
- [17] A. Pinkus, "On n -widths of periodic functions", *J. Analyse Math.*, **35** (1979), 209–235.
- [18] V. F. Babenko, "Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives", *Anal. Math.*, **13**:4 (1987), 281–306.

- [19] Н. П. Корнейчук, “Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L ”, *Докл. АН СССР*, **190** (1970), 269–271.
- [20] Н. П. Корнейчук, “Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:1 (1971), 93–124.
- [21] Н. П. Корнейчук, “Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L ”, *Матем. заметки*, **20**:5 (1976), 655–664.
- [22] В. П. Моторный, В. И. Рубан, “Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L ”, *Матем. заметки*, **17**:4 (1975), 531–543.
- [23] В. И. Рубан, “Поперечники множеств в пространствах периодических функций”, *Докл. АН СССР*, **225**:1 (1980), 34–35.
- [24] А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале”, *Ученые записки Моск. гос. ун-та. Матем.*, **30**:3 (1939), 3–16.
- [25] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [26] Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [27] В. И. Иванов, “Приближение функций из C^n сплайнами минимального дефекта”, *Матем. заметки*, **43**:6 (1988), 746–756.
- [28] А. В. Московский, “Некоторые экстремальные свойства дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов на отрезках меньших периода”, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **2**:1 (1996), 169–175.

В. Ф. Бабенко

Днепропетровский национальный университет,

г. Днепропетровск,

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,

г. Донецк

E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Поступило

07.03.2008

Н. В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет

E-mail: nparfinovich@mail.ru