Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Мышкис, О полулинейных обобщенно канонических системах уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 729–738

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:25:43

УДК 517.956.3

О ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ОБОБЩЕННО КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. Д. Мышкис

С помощью метода характеристик доказаны теоремы о непрерывной разрешимости и о свойствах решений начально-граничной задачи для обобщенно канонической системы полулинейных уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа в области общего вида $(m + 1)$ -мерного пространства.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Полулинейная каноническая система уравнений с частными производными гиперболического типа и единственной пространственной переменной имеет общий вид

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} = f_i(x, t, u(x, t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$. Как известно, при постановке начально-граничных задач для этих систем и при исследовании их решений фундаментальную роль играет метод характеристик (см., например, [1], [2], где имеются дальнейшие ссылки). Напомним, что *характеристиками* i -го семейства ($i = 1, \dots, n$) системы уравнений (1) называются интегральные линии обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $dx(t)/dt = \lambda_i(x(t), t)$ в плоскости x, t . После интегрирования i -го уравнения (1) вдоль характеристик i -го семейства для $i = 1, \dots, n$ получается система интегро-функциональных уравнений типа Вольтерра. На этом переходе и основан метод характеристик.

Аналогичный метод для систем уравнений в $\mathbb{R}^{m+1}$ ($m \geq 1$), записанных в форме, которую мы называли *обобщенной канонической*:

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} = f_i(x, t, u(x, t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $n \geq 1$, $x := (x_1, \dots, x_m)$, $u := (u_1, \dots, u_n)$, изучен гораздо меньше. В работах М. Чинквини-Чибарио и Л. Чезари (см. [3], [4], где имеются дальнейшие ссылки) этот метод применялся к доказательству разрешимости задачи Коши и сходных задач для системы уравнений (2) и некоторых более общих (в том числе квазилинейных) систем

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00683а, и Фонда фундаментальных исследований Министерства путей сообщения РФ.

уравнений. При этом характеристики i -го семейства ($i = 1, \dots, n$) – это интегральные линии системы ОДУ $dx_j(t)/dt = \lambda_{ij}(x(t), t)$, $j = 1, \dots, m$, или, короче,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda_i(x, t), \quad (3)$$

где обозначено $\lambda_i(x, t) := (\lambda_{i1}(x, t), \dots, \lambda_{im}(x, t))$. Вдоль такой характеристики левую часть системы (2) можно записать в виде $du_i(t)/dt$, что дает возможность перейти к равносильной системе интегральных уравнений типа Вольтерра.

Задача с начальными и граничными условиями для общей системы уравнений (2), по-видимому, не только не изучалась, но даже не ставилась. Целью настоящей статьи является постановка этой задачи и доказательство основных теорем о ее разрешимости. Мы ограничимся непрерывными обобщенными решениями (определение см. в п. 3), оставив рассмотрение гладких решений и разрывных решений для дальнейших исследований. Отметим, что задача Коши для системы уравнений (2) является частным случаем рассматриваемой здесь общей задачи.

2. Общая постановка задачи. В основу мы положим некоторое непустое замкнутое множество $\Pi \subset \mathbb{R}^{m+1}$, в котором будут происходить все события. Функции λ_{ij} впрямь предполагаются непрерывными в некоторой окрестности множества Π и такими, что в этой окрестности имеет место единственность продолжения решений каждой из n систем уравнений (3) в направлении убывания t , причем при этом продолжении соответствующая интегральная линия не может все время принадлежать Π . Обозначим такое решение для i -й системы (3) с конечной точкой $(x^0, t^0) \in \Pi$ (т.е. $t^0 = \max t$ для этого решения) через $x = \varphi_i(t; x^0, t^0)$ ($t \leq t^0$) и положим

$$\begin{aligned} \chi_i(x^0, t^0) &:= \sup\{t < t^0 : \varphi_i(t; x^0, t^0) \notin \Pi\}, \\ \Phi_i(x^0, t^0) &:= (\varphi_i(\chi_i(x^0, t^0); x^0, t^0), \chi_i(x^0, t^0)). \end{aligned}$$

Ясно, что $\Phi_i(x^0, t^0) \in \partial\Pi$. График этого решения при $\chi_i(x^0, t^0) \leq t < t^0$ назовем *характеристикой* (i -го семейства).

Естественные добавочные условия к системе уравнений (2) выглядят следующим образом:

$$u_i(x, t) = g_i(x, t, u(x, t)), \quad i \in I(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Pi, \quad (4)$$

где $I(x, t)$ есть множество индексов $i \in I := \{1, \dots, n\}$, для которых $\chi_i(x, t) = t$. Каждая функция g_i должна быть задана на множестве $S_i \times \mathbb{R}^n$, где $S_i = \{(x, t) \in \partial\Pi : \chi_i(x, t) = t\}$, зависеть только от аргументов x , t и $u_j(x, t) : j \in I'(x, t) := I \setminus I(x, t)$. Таким образом, на каждом непустом множестве $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}$ каждая из функций g_{i_j} не должна зависеть от аргументов $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$. В частности, в точках $(x, t) \in \partial\Pi$, для которых $I(x, t) = \emptyset$, т.е. $(x, t) \in \partial\Pi \setminus \bigcup_i S_i$, условие (4) не ставится. Если $I(x, t) = I$, т.е. $(x, t) \in S := \bigcap_i S_i$, то условия (4) приобретают вид $u_i(x, t) = g_i(x, t)$, $i \in I$, – это начальные условия. Если же $\emptyset \subset I(x, t) \subset I$ ($\subset$ понимается как строгое включение), то условия (4) естественно трактовать как краевые (граничные). Таким образом, система уравнений (2) вместе с добавочными условиями (4) представляет собой начально-граничную (смешанную) задачу, причем задача Коши рассматривается здесь как частный случай (она получается, если $\forall (x, t) \in \partial\Pi \Rightarrow I(x, t) \in \{\emptyset, I\}$).

Если решение u задачи (2), (4) непрерывно дифференцируемо в окрестности Π , то интегрируя i -е уравнение (2) при $(x, t) \in \Pi$ вдоль любой характеристики i -го семейства,

а затем, применяя условие (4), приходим к системе интегро-функциональных уравнений типа Вольтерра:

$$u_i(x, t) = g_i(\Phi_i(x, t), u(\Phi_i(x, t))) + \int_{\chi_i(x, t)}^t f_i(\varphi_i(\tau; x, t), \tau, u(\varphi_i(\tau; x, t), \tau)) d\tau, \quad (5)$$

$$i \in I, \quad (x, t) \in \Pi.$$

Обратно, если функция u , непрерывно дифференцируемая в окрестности Π , удовлетворяет системе уравнений (5), то она, очевидно, является решением задачи (2), (4). Это дает основание для того, чтобы функцию $u: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую системе уравнений (5), называть *обобщенным решением* задачи (2), (4), даже если она не является непрерывно дифференцируемой, лишь бы интеграл в правой части уравнения (5) имел смысл.

Обобщенное решение u задачи (2), (4) может быть определено не на всем множестве Π , а только на каком-либо множестве $K \subseteq \Pi$. От K надо требовать, чтобы для любых $(x^0, t^0) \in K, i \in I$, вся характеристика i -го семейства с конечной точкой (x^0, t^0) принадлежала K , причем определение обобщенного решения $u: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи (2), (4) как решения системы уравнений (5) не меняется. Непустое множество K , удовлетворяющее указанным требованиям, будем называть *допустимым*. Ясно, что объединение или непустое пересечение любой совокупности допустимых множеств также является допустимым множеством; если множество K допустимое, то и любое непустое множество вида $\{(x, t) \in K: t \leq \text{const}\}$ допустимое.

3. Непрерывное обобщенное решение. *Непрерывным обобщенным решением* задачи (2), (4) будем называть непрерывную функцию u , определенную на допустимом множестве $K = K_u$ и удовлетворяющую в каждой точке K системе уравнений (5). В дальнейшем для краткости слово “обобщенное” будем опускать.

При рассмотрении непрерывных решений естественно наложить следующее условие на расположение семейства характеристик относительно множества Π .

У. Все функции $\chi_i: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$; см. п. 2) непрерывные.

Из этого условия сразу следует, что все множества S_i (см. п. 2) замкнутые. Кроме того, условие $У$ ограничивает класс рассматриваемых множеств Π . Например, множество Π при условии $У$ не может иметь ограниченных изолированных “пустот”; более точно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнено условие $У$ и множество Π связное, то множество $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \Pi$ не может иметь ограниченных компонент связности, удаленных на положительное расстояние от своего дополнения в $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \Pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – такая компонента и $(\underline{x}, \underline{t})$ (соответственно $(\bar{x}, \bar{t})$) – какая-либо из точек ∂D с наименьшим (наибольшим) возможным значением t . Ясно, что $\Phi_1(\underline{x}, \underline{t}) \notin \partial D$. Из связности множеств D и Π следует, что и множество ∂D связное, а потому и множество $\Phi_1(\partial D)$ как непрерывный образ связного множества также связно. Так как оно содержится в $\partial \Pi$, то $\Phi_1(\partial D) \cap \partial D = \emptyset$; значит, и $\Phi_1(\bar{x}, \bar{t}) \notin \partial D$.

Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы интегральная воронка W системы (3) для $i = 1$ с вершиной в точке $(\bar{x}, \bar{t})$ целиком при $\bar{t} < t \leq \bar{t} + \varepsilon$ принадлежала $\Pi \setminus \partial \Pi$. Тогда, если точка $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in D$ находится достаточно близко от $(\bar{x}, \bar{t})$, то интегральная воронка $\bar{W}$ той

же системы с вершиной в точке $(\tilde{x}, \tilde{t})$ при $\tilde{t} \leq t \leq \bar{t} + \varepsilon$ целиком расположена как угодно близко от W и потому принадлежит $D \cup \Pi$. Возьмем какую-либо характеристику системы (3) с $i = 1$ и конечной точкой $(x^0, \bar{t} + \varepsilon) \in \widetilde{W}$. Тогда $\Phi_1(x^0, \bar{t} + \varepsilon) \in \widetilde{W}$ и потому $\Phi_1(x^0, \bar{t} + \varepsilon) \in \partial D$. Переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к противоречию с доказанным выше.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несколько усложняя доказательство, можно проверить, что требование связности множества Π в формулировке теоремы 1 является излишним.

Отметим для дальнейшего, что если условие $У$ выполнено в Π , то оно выполнено и в каждом допустимом множестве $K \subset \Pi$, а также в каждом множестве вида $\{(x, t) \in \Pi : t \geq \text{const}\}$. Сужение непрерывного решения u задачи (2), (4) в каком-либо допустимом множестве K на непустое множество $K := \{(x, t) \in K : t \geq t_0\}$ является непрерывным решением этой же задачи в K , если недостающие начальные данные при $t = t_0$ задаются самим решением u .

4. Теорема о локальной непрерывной разрешимости задачи (2), (4). Назовем *цепочкой* любую последовательность попарно различных точек $(x^j, t^j) \in \Pi$, $j = 1, \dots, k$ ($k \geq 1$), для которой $(x^j, t^j) \in \{\Phi_1(x^{j-1}, t^{j-1}), \dots, \Phi_n(x^{j-1}, t^{j-1})\}$, $j = 2, \dots, k$; назовем k *длиной* такой цепочки, а (x^1, t^1) – ее *концом*. Через $U(A, \varepsilon)$ будем обозначать ε -окрестность множества A .

ТЕОРЕМА 2. Пусть все функции $[(x, t, u) \mapsto f_i(x, t, u)]: \Pi \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны u , как и функции $[(x, t, u) \mapsto g_i(x, t, u)]: S_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, локально ограничены и локально удовлетворяют по u условию Липшица. Пусть, далее, выполнено условие $У$ и длины всех цепочек локально равномерно ограничены. Наконец, пусть для некоторой точки $(x^0, t^0) \in S$ выполнены условия:

$У_1$. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и открытое в Π допустимое множество K , что

$$U((x^0, t^0), \delta) \cap \Pi \subseteq K \subseteq U((x^0, t^0), \varepsilon);$$

$У_2$. для любых допустимого множества K и функций $u_i \in C(S_i \cap K, \mathbb{R}^n)$, $i \in I$, удовлетворяющих в $\partial\Pi \cap K$ условиям (4), функции $(x, t) \mapsto g_i(x, t, u(x, t))$ непрерывны в $S_i \cap K$, $i \in I$;

$У_3$. в $C(\partial\Pi, \mathbb{R}^n)$ существует функция, удовлетворяющая условиям (4).

Тогда существуют $\delta > 0$, открытое в Π допустимое множество $K \supseteq U((x^0, t^0), \delta) \cap \Pi$ и непрерывное решение $u: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи (2), (4). Это решение единственно на всяком допустимом множестве $\tilde{K}$, для которого $(x^0, t^0) \in \tilde{K} \subseteq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и возьмем в качестве $K = K_\varepsilon$ какое-либо допустимое множество, о котором говорится в условии $У_1$. Определим на множестве функций из $C(K, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих в $\partial\Pi \cap K$ условиям (4), отображение $P = P_\varepsilon$, задаваемое правыми частями системы уравнений (5):

$$(Pu)_i(x, t) := g_i(\Phi_i(x, t), u(\Phi_i(x, t))) + \int_{\chi_i(x, t)}^t f_i(\varphi_i(\tau; x, t), \tau, u(\varphi_i(\tau; x, t), \tau)) d\tau, \\ i \in I, \quad (x, t) \in K. \quad (6)$$

Из непрерывной зависимости решений системы (3) от их конечной точки и из условий Y и Y_2 следует, что P отображает это множество в себя. Кроме того, очевидно, что $[(x, t) \in S \cap K, u \in C(K, \mathbb{R}^n)] \Rightarrow (Pu)(x, t) = g(x, t)$.

Проверим, далее, что для любого достаточно большого числа M справедливо неравенство $\|P^{r-1}u\| \leq M$, если $u \in C(K, \mathbb{R}^n)$, $\|u\| \leq M$, ε достаточно мало, а r – максимальная длина цепочек в K . (Под $\|\cdot\|$ будем понимать для простоты норму в пространстве $C(K, \mathbb{R}^n)$, основанную на норме $|x| := \max_i |x_i|$ векторов. Кроме того, впредь будем считать, что $r \geq 2$, так как при $r = 1$ утверждение теоремы 2 сразу вытекает из ее предположений.) Для этого обозначим через K_j ($j = 1, \dots, r$) множество точек $(x, t) \in K$, для которых длины цепочек с концом в (x, t) не превосходят j . Ясно, что $S \cap K = K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_r = K$.

Если $(x, t) \in K_1$, то $|(Pu)(x, t)| \leq p_1$, где p_1 – верхняя грань функции $|g|$ на $S \cap K$. Если же $(x, t) \in K_2$, то в силу формулы (6) и локальной ограниченности функций f_i получаем, что $|(Pu)(x, t)| \leq p_1 + O(\varepsilon)$, причем оценка $O(\varepsilon)$ здесь и далее равномерна по всем точкам (x, t) и всем функциям $u \in C(K, \mathbb{R})$, ограниченных по норме какой-либо единой константой.

Пусть теперь $(x, t) \in K_3$. Тогда из формулы (6) получаем

$$|(P^2u)(x, t)| = \max_j |g_j(\Phi_j(x, t), (Pu)(\Phi_j(x, t)))| + O(\varepsilon),$$

где все $\Phi_j(x, t) \in K_2$. Представив $(Pu)(\Phi_j(x, t))$ с помощью формулы (6) и воспользовавшись условием Липшица для g_j , получаем

$$\begin{aligned} & |g_j(\Phi_j(x, t), (Pu)(\Phi_j(x, t)))| \\ &= |g_j(\Phi_j(x, t), \dots, g_i(\Phi_i(\Phi_j(x, t), u(\Phi_1(\Phi_j(x, t))))), \dots)| + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

При этом в правой части присутствуют только те значения i , для которых $\Phi_i(\Phi_j(x, t)) \neq \Phi_j(x, t)$, т.е. $i \neq I'(\Phi_j(x, t))$; если таких значений нет, то $\Phi_j(x, t) \in S$ и, следовательно, $(Pu)(\Phi_j(x, t)) = g_j(x, t)$. Для указанных значений i все $\Phi_i(\Phi_j(x, t)) \in K_1$, поэтому первое слагаемое в правой части не зависит от функции u и, в действительности, имеет вид $|g_j(\Phi_j(x, t), \dots, g_i(\Phi_i(\Phi_j(x, t))))|$ либо $|g_j(\Phi_j(x, t), g_j(\Phi_j(x, t)))|$. Обозначив через p_2 наибольшую из верхних граней этих функций по всем $(x, t) \in K_3$, $j \in I$, $i \in I'(\Phi_j(x, t))$, получаем окончательно, что

$$|(P^2u)(x, t)| \leq p_2 + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in K_3,$$

Так как $K_1 \subseteq K_3$, то $p_1 \leq p_2$.

Продолжая такие же рассуждения, получаем, что при $(x, t) \in K_s$, $s = 2, \dots, r$, имеет место оценка

$$|(P^{s-1}u)(x, t)| \leq p_{s-1} + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in K_s,$$

где $p_1 \leq \dots \leq p_{r-1}$ и все константы p_s явно выражаются через итерации функций $\{g_k\}$ и $\{\Phi_i\}$.

Итак, в качестве числа M , о котором говорилось во втором абзаце доказательства теоремы 2, можно взять любое число, большее чем p_{r-1} . Из проведенного рассуждения следует, что при заданном M значение ε можно считать произвольным из некоторого интервала $(0, \varepsilon_M]$.

Зафиксируем такие M и $\varepsilon = \varepsilon_M$ и обозначим через Q множество функций $v \in C(K, \mathbb{R}^n)$, для которых $\|v\| \leq M$ и v в K удовлетворяет условиям (4). Это непустое (в силу условия Y_3) полное метрическое пространство, и из сказанного выше следует, что каждое из отображений P^s , $s = 1, \dots, r-1$, переводит его в себя.

Обозначим через L константу в условии Липшица, о котором говорится в условии теоремы 2, для области $K \times \{u \in \mathbb{R}^n : |u| \leq M\}$. Тогда, взяв $v, w \in Q$, получаем

$$\|Pv - Pw\| \leq L \max_{(x,t) \in K, i \in I'(x,t)} |v(\Phi_i(x,t)) - w(\Phi_i(x,t))| + 2\varepsilon L \|v - w\|$$

(если $I'(x,t) = \emptyset$, то $\Phi_i(x,t) \in S$ и потому $v(\Phi_i(x,t)) - w(\Phi_i(x,t)) = 0$, т.е. такие комбинации значений x, t, i из правой части исключаются).

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|P^2v - P^2w\| &\leq L \max_{(x,t) \in K, i_1 \in I'(x,t)} |(Pv)(\Phi_{i_1}(x,t)) - (Pw)(\Phi_{i_1}(x,t))| + 2\varepsilon L \|Pv - Pw\| \\ &\leq L^2 \max |v(\Phi_{i_2}(\Phi_{i_1}(x,t))) - w(\Phi_{i_2}(\Phi_{i_1}(x,t)))| \\ &\quad + 4\varepsilon L^2 \|v - w\| + (2\varepsilon L)^2 \|v - w\|; \end{aligned}$$

в правой части максимум берется по $(x,t) \in K, i_1 \in I'(x,t), i_2 \in (\Phi_{i_1}(x,t))$ (с аналогичной предыдущему оговоркой о случае $I' = \emptyset$).

Продолжая таким же образом, получаем при $s \in \mathbb{N}$ оценку

$$\begin{aligned} \|P^s v - P^s w\| &\leq L^s \max |v(\Phi_{i_s}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots)) - w(\Phi_{i_s}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots))| \\ &\quad + \varepsilon L^s q_s(\varepsilon) \|v - w\|, \end{aligned} \quad (7)$$

где q_s — многочлен s -й степени, а максимум берется по $(x,t) \in K, i_1 \in I'(x,t), i_2 \in I'(\Phi_{i_1}(x,t)), \dots, i_s \in I'(\Phi_{i_{s-1}}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots))$ (с той же оговоркой).

Однако $\Phi_{i_{r-1}}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots) \in S$ при всех $(x,t) \in K$, и потому

$$v(\Phi_{i_{r-1}}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots)) = w(\Phi_{i_{r-1}}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots)) = g(\Phi_{i_{r-1}}(\dots(\Phi_{i_1}(x,t))\dots)).$$

Значит, при $s = r-1$ в правой части неравенства (7) первое слагаемое отсутствует. Но за счет уменьшения ε (не влияющего на значение L) можно добиться выполнения неравенства $\varepsilon L^{r-1} q_{r-1}(\varepsilon) < 1$. Отсюда в силу известного обобщения теоремы о сжимающих отображениях получаем, что отображение P имеет в K единственную неподвижную точку, т.е. задача (2), (4) имеет в $K = K_r$ единственное непрерывное решение u , для которого $\|u\| \leq M$.

Покажем, что для любого допустимого множества $\tilde{K}$, для которого $(x^0, t^0) \in \tilde{K} \subseteq K$, функция $u|_{\tilde{K}}$ является единственным непрерывным решением в $\tilde{K}$ задачи (2), (4). В самом деле, пусть это не так и $\tilde{u}: \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является таким решением, причем $\tilde{u}(x,t) \neq u(x,t)$ в K . Обозначим через t^1 наименьшее значение t , для которого $\tilde{u}(x,t) \equiv u(x,t)$ при $t \leq t$, $(x,t) \in \tilde{K}$, а через x^1 — какую-либо точку, для которой $\tilde{u}(x,t) \neq u(x,t)$ в любой близости от (x^1, t^1) . Тогда обе функции $\tilde{u}$ и u являются непрерывными решениями задачи (2), (4) в $K_1 := \{(x,t) \in K : t \geq t^1\}$, для которой начальное условие при $t = t^1$ задается самим решением u . Нетрудно проверить, что условия Y, Y_1, Y_2 и Y_3 с заменой Π и (x^0, t^0) соответственно на K_1 и (x^1, t^1) выполняются, а так как цепочки точек ∂K_1 не могут быть длиннее, чем цепочки точек $\partial \Pi$, то условия теоремы 2 с той же заменой выполнены. Выбрав $M > \max\{\|u|_{\tilde{K}}\|, \|\tilde{u}\|\}$ и применив доказанное выше утверждение о единственности неподвижной точки, приходим к противоречию.

Теорема 2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существенность условия Y для справедливости теоремы 2 очевидна. Чрезмерность требования непрерывности функций g_i вытекает из первого примера в п. 5; поэтому такое требование не ставится. Существенность условия Y_1 не ясна; более того, автор не знает, не вытекает ли это условие из остальных требований (это относится и к условию Y_3 , а также к условию Y_4 из п. 6). Условия Y_2 и Y_3 являются вариантами известного условия согласования начальных условий с граничными нулевого порядка (см. первый пример в п. 5).

5. Примеры. 1. Рассмотрим систему уравнений с $n = 2$, $m = 1$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

в области $\Pi: 0 \leq x < \infty$, $0 \leq t < \infty$. Здесь $S_1 = \{(0, t): 0 < t < \infty\} \cup \{(x, 0): 0 \leq x < \infty\}$, $S_2 = S = \{(x, 0): 0 \leq x < \infty\}$; $I(0, 1) = \{1\}$ ($0 < t < \infty$), $I(x, 0) = \{1, 2\}$ ($0 \leq x < \infty$). Добавочные условия (4) имеют общий вид:

$$u_1(0, t) = g_1(0, t, u_2(0, t)) \quad (0 < t < \infty), \quad u_j(x, 0) = g_j(x, t) \quad (0 < x < \infty, j = 1, 2).$$

Условие Y_3 означает непрерывность функций $x \mapsto g_j(x, 0)$, $0 \leq x < \infty$, $j = 1, 2$, а также существование непрерывной функции $t \mapsto h(t)$ ($0 \leq t < \infty$), для которой $h(0) = g_2(0, 0)$, а функция $t \mapsto g_1(0, t, h(t))$ ($0 < t < \infty$) непрерывна и стремится к $g_1(0, 0)$ при $t \rightarrow 0^+$. Отсюда, в частности, вытекает хорошо известное условие согласования: $g_1(0, 0, g_2(0, 0)) = g_1(0, 0)$, в котором левая часть понимается как предел. Из условия Y_2 вытекает, в частности, инвариантность условия согласования относительно отображения P , определенного формулой (6).

В применении к системе (8) для выполнения условий теоремы 2 достаточно (и, по-видимому, необходимо), чтобы каждая из задаваемых функций $x \mapsto g_j(x, 0)$, $0 \leq x < \infty$, $j = 1, 2$, и $(t, s) \mapsto g_1(0, t, s)$, $0 < t < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, была непрерывной, последняя функция допускала непрерывное продолжение на $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ и выполнялось указанное выше условие согласования. Однако априорное требование непрерывности функции g_1 на S_1 привело бы к равенству $g_1(0, 0^+, s) \equiv g_1(0, 0)$. В частности, если $g_1|_{x=0}$ не зависит от t , то эта величина не должна зависеть и от s , т.е. она должна быть постоянной. Ясно, что это требование не является естественным для рассматриваемой задачи.

2. Рассмотрим систему уравнений (8) в области $\Pi: 0 \leq x \leq t^2$, $0 \leq t \leq 1/2$ при добавочных условиях

$$u_1(0, t) = (1 - t)u_2(0, t), \quad u_2(t^2, t) = u_1(t^2, t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 1.$$

Ясно, что здесь длины цепочек неограничены, тогда как прочие условия теоремы 2 выполнены. Покажем, что поставленная задача не имеет непрерывного решения ни в какой окрестности точки $(0, 0)$.

В самом деле, пусть решение u определено при $0 \leq x \leq t^2$, $0 \leq t \leq h$ ($\leq 1/2$). Обозначим через a значение функции u_1 в какой-либо точке $(0, t_0)$, $0 < t_0 \leq h$. Тогда значение функции u_2 вдоль характеристики 2-го семейства с уравнением $t = t_0 - x$ равно $a(1 - t_0)^{-1}$. Эта характеристика начинается в точке ее пересечения с правой границей области Π , т.е. в точке $M([1 + 2t_0 - (1 + 4t_0)^{1/2}]/2, [-1 + (1 + 4t_0)^{1/2}]/2)$. Таким образом, $u_2(M) = a(1 - t_0)^{-1}$. Теперь рассмотрим характеристику первого семейства,

заканчивающуюся в точке M . Вдоль нее значение функции u_1 постоянно и равно $u_2(M)$. Эта характеристика начинается в точке $(0, t_1)$, где $t_1 := (1 + 4t_0)^{1/2} - 1 - t_0$. Таким образом, $u_1(0, t_1) = a(1 - t_0)^{-1}$.

Затем, проделав такую же процедуру для точки $(0, t_1)$, получаем точку $(0, t_2)$ и значение $u_1(0, t_2)$ и т.д. Продолжая таким образом, мы получим убывающую последовательность значений $t_j > 0$ и соответствующую последовательность значений компоненты u_1 решения, определяемые рекуррентными соотношениями

$$t_{j+1} = (1 + 4t_j)^{1/2} - 1 - t_j, \quad u_1(0, t_{j+1}) = u_1(0, t_j)(1 - t_j)^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Докажем, что $\prod_{j=0}^{\infty} (1 - t_j)^{-1} = \infty$ и тем самым придем к противоречию с условием $u_1(0, 0) = 1$. Так как $1/2 \geq t_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то достаточно проверить, что $\sum_{j=0}^{\infty} t_j = \infty$. Для доказательства покажем, что $t_j \geq \tau_j := p/(j+1)$ при всех $j = 0, 1, \dots$ и $p := \min\{t_0, 1/16\}$. В самом деле, из рекуррентного соотношения для t_j следует, что $|\Delta t_j| := |t_{j+1} - t_j| = 8t_j^2[1 + (1 + 4t_j)^{1/2}]^{-2} < 8t_j^2$, тогда как $|\Delta \tau_j| = (j+1)[p(j+2)]^{-1}\tau_j^2$. Неравенство $t_0 \geq \tau_0$ очевидно. Поэтому, если указанная оценка t_j неверна, то существует значение $j = r \geq 0$ такое, что $t_r \geq \tau_r$, но $t_{r+1} < \tau_{r+1}$. Отсюда $|\Delta t_j| > |\Delta \tau_j|$, а потому $8t_r^2 > |\Delta t_r| > |\Delta \tau_r| \geq (2p)^{-1}\tau_r^2 \geq (2p)^{-1}t_r^2$ и мы вступаем в противоречие с определением числа p .

3. Рассмотрим систему уравнений с $n = 4, m = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= f_1(x, t, u), & \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= f_2(x, t, u), & \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= f_3(x, t, u), \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} &= f_4(x, t, u) \end{aligned}$$

в области $\Pi: \{(x, t): x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq t < \infty\}$. Здесь $S_1 = \{(x, 0): x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cup \{(x, t): x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \geq 0, 0 < t < \infty\}$, а S_2, S_3 и S_4 получаются из S_1 последовательными поворотами на угол $\pi/2$ вокруг оси t в положительном направлении. Этим определяются аргументы функций g_j .

Для дальнейшего обозначим через $D_1(D_2; D_3; D_4)$ полосы $\{(x, t): x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0$ (соответственно $x_1 < 0, x_2 > 0; x_1 < 0, x_2 < 0; x_1 > 0, x_2 < 0\}, 0 < t < \infty\}$, а через $\overline{D}_j$ — замыкание множества D_j . Тогда для выполнения условий теоремы 2 достаточно (и, по-видимому, необходимо), чтобы

- 1) все функции $x \mapsto g_j(x)$ были непрерывными;
- 2) функции $(x, t, s_3, s_4) \mapsto g_j(x, t, s_3, s_4)$, $j = 1, 2$, допускали непрерывное продолжение с D_1 на $\overline{D}_1$, и на $\overline{D}_1 \cap S$ выполнялись условия согласования: $g_j(x, 0, g_3(x), g_4(x)) = g_j(x)$, $j = 1, 2$; аналогичные требования выполнялись в D_2, D_3 и D_4 ;
- 3) на луче $(1, 0, t), 0 \leq t < \infty$, функции $(t, s_2, s_3) \mapsto g_1((1, 0), t, s_2, s_3)$ и $(t, s_3, s_4) \mapsto g_1((1, 0), t, s_3, s_4)$ совпадали и потому первая не зависела от s_4 , а вторая — от s_3 ; аналогичные требования выполнялись для лучей $(0, 1, t)$, $(-1, 0, t)$ и $(0, -1, t)$, $0 \leq t < \infty$.

6. Нелокальные утверждения. В этом пункте будем без особой оговорки считать, что выполнены все предположения теоремы 2, причем условия Y_1 и Y_2 справедливы для любой точки $(x^0, t^0) \in S$, и, кроме того, выполнено следующее условие.

Y_4 . Для любой точки $(x^0, t^0) \in \Pi$ существует содержащее ее ограниченное допустимое множество.

ТЕОРЕМА 3. Пусть непрерывные решения задачи (2), (4) существуют в допустимых множествах K_1 и K_2 . Тогда в $K_1 \cap K_2$ эти решения совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим упомянутые решения соответственно через u^1 и u^2 , и пусть $u^1(x^0, t^0) \neq u^2(x^0, t^0)$, где $(x^0, t^0) \in K_1 \cap K_2$. Выберем на основе условия Y_4 ограниченное допустимое множество K так, что $(x^0, t^0) \in K$; в силу условия Y можно считать K замкнутым. Теперь получение противоречия не отличается от проведенного в последнем абзаце доказательства теоремы 2.

Назовем непрерывное решение $u: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи (2), (4) *непродолжимым*, если D открыто в Π и u является расширением любого другого непрерывного решения той же задачи с открытой в Π областью определения. (При $m = 1$ такое решение было исследовано в докладе [5].)

ТЕОРЕМА 4. Непродолжимое непрерывное решение $u: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи (2), (4) существует и единственно, причем $S \subseteq D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве D – области определения искомого решения – возьмем объединение всех открытых в Π областей определения непрерывных решений задачи (2), (4). В силу теоремы 3 все эти решения определяют на D единую функцию, которая, очевидно, и является единственным непрерывным непродолжимым решением задачи (2), (4). Включение $S \subseteq D$ очевидно.

Следующая теорема говорит о поведении непродолжимого непрерывного решения u вблизи точек границы его области определения, внутренних для Π .

ТЕОРЕМА 5. Пусть точка (x^0, t^0) содержится в замыкании множества $\partial D \setminus \partial \Pi$, и предел при $k \rightarrow \infty$ любой сходящейся последовательности вида $(x^0 - x^k)/(t^0 - t^k)$, где $t^k \rightarrow (t^0)^-$, $x^k \rightarrow x^0$, $(x^k, t^k) \notin D$ (если такие последовательности существуют), не принадлежит выпуклой оболочке множества $\{\lambda_1(x^0, t^0), \dots, \lambda_n(x^0, t^0)\}$. Тогда решение u не ограничено при $t < t^0$ в пересечении D с любой окрестностью точки (x^0, t^0) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия теоремы 5 выполнены, но ее утверждение неверно. Будем сначала считать, что $(x^0, t^0) \notin \partial \Pi$, и обозначим через A выпуклую оболочку, упомянутую в формулировке теоремы, а через A_p замыкание ее p -окрестности ($p > 0$). Зафиксируем p столь малым, что для множества A_p справедливо свойство, указанное для A в формулировке теоремы. Обозначим, далее, через B_h ($h > 0$) замкнутый конус с вершиной в точке $(x_0 + h^2 a, t_0 + h^2)$ и основанием $C_h := (x_0 - h A_p, t_0 - h)$, где $a \in A$ – фиксированная точка.

Ясно, что если h достаточно мало, то $B_p \subset \Pi$, $C_h \subset D$, а все характеристики с концевыми точками в B_h , продолженные в сторону убывания t , достигают C_h , не выходя из B_h . Поэтому задача (2), (4), рассмотренная в B_h , содержит только начальные условия, поставленные при $t = t_0$, т.е. это задача Коши. Будем считать, что начальные условия задаются изучаемым решением u . Тогда, пользуясь допущением об ограниченности u в некоторой окрестности точки (x^0, t^0) при $t < t_0$, с помощью стандартных рассуждений получаем существование непрерывного решения задачи (2), (4) в B_h , если h достаточно мало. Но точка (x^0, t^0) является внутренней для конуса B_h . Поэтому мы получаем продолжение непрерывного решения задачи (2), (4) на некоторую полную окрестность точки (x^0, t^0) , что противоречит предположению о $(x^0, t^0) \in \partial D$.

Случай, когда $(x^0, t^0) \in \partial\Pi$, рассматривается аналогично, но в качестве множества B_h надо взять пересечение описанного выше конуса с Π , а задача (2), (4) в B_h становится начально-граничной. После переноса начального условия на основание конуса множество B_h для полученной задачи оказывается допустимым. В остальном схема рассуждений аналогична указанной выше и следует доказательству теоремы 2.

Теорема 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть условие Липшица, о котором говорится в теореме 2, является глобальным, а при любом $t \in \mathbb{R}$ множество $\Pi \cap \{(x, \tau): \tau \leq t\}$ ограниченное. Тогда $D = \Pi$ (см. теорему 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непродолжимое непрерывное решение задачи (2), (4), причем $D \neq \Pi$. Положим $t_0 := \min\{t: (\forall x: (x, t) \in D)\}$, $T := \min\{t: (\forall x: (x, t) \in \Pi \setminus D)\}$, $U(t) := \min\{|u_j(x, t)|: (x, t) \in D\}$, $t_0 \leq t < T$. Тогда $-\infty < t < T < \infty$ и из теоремы 5 следует, что $U(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T-$. Покажем, что последнее невозможно.

В самом деле, применяя при $(x, t) \in D$, $t < T$ условие Липшица и учитывая локальную ограниченность функций g_i и f_i получаем, что

$$|u_i(x, t)| \leq K_1 + L \max_j |u_j(\Phi_i(x, t))| + L \int_{\chi_i(x, t)}^t \max_j |u_j(\varphi_i(\tau; x, t), \tau)| d\tau,$$

где L — константа в условии Липшица, а K_1 — постоянная, зависящая только от значения T . Применим к u_j в правой части такую же оценку, а затем проведем итерацию этой процедуры. Учитывая локальную ограниченность длин цепочек в Π , мы через конечное число шагов придем к неравенству вида

$$|u_i(x, t)| \leq K_r + L^r \int_{t_0}^t U(\tau) d\tau \Rightarrow U(t) \leq K_r + L^r \int_{t_0}^t U(\tau) d\tau.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронвуолла, получаем ограниченность функции $t \mapsto U(t)$ при $t < T$, т.е. противоречие с нашим предположением.

Теорема 6 доказана.

Выражаю благодарность А.М. Филимонову за литературные указания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [2] Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Матем. сб. 1960. Т. 50. №4. С. 423–442.
- [3] Cesari L. A boundary-value problem for quasilinear hyperbolic systems // Riv. Nat. Univ. Parma. 1974. V. 3. №3. P. 107–131.
- [4] Cesari L. A boundary-value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1974. V. 4. №1. P. 311–358.
- [5] Мышкис А.Д. О максимальной области разрешимости смешанной задачи для почти линейной гиперболической системы с двумя независимыми переменными // Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными. Новосибирск: СО АН СССР, 1963. С. 1–10.