Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Каморников, Обобщенные подгруппы Фраттини как корадикалы групп, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 402–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:32:36

Обобщенные подгруппы Фраттини как корадикалы групп

С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Устанавливается, что класс всех регулярных подгрупповых m -функторов совпадает с классом всех X -абнормальных m -функторов, где X пробегает все подклассы класса всех примитивных групп. Изучаются свойства решетки всех регулярных подгрупповых m -функторов, описываются атомы и коатомы этой решетки. Доказывается, что обобщенная подгруппа Фраттини группы G , соответствующая регулярному m -функтору, совпадает с X -корадикалом группы G для некоторого R_0 -замкнутого класса X .

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В данной работе рассматриваются только конечные разрешимые группы (под группой всегда подразумевается конечная разрешимая группа).

Во многих работах, посвященных максимальным подгруппам и их пересечениям, четко прослеживаются два направления.

Первое из них связано с применением идей и методов теории формаций. В его основе лежит понятие $\mathfrak{F}$ -абнормальной максимальной подгруппы. Напомним [1], [2], что если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной, если она содержит $\mathfrak{F}$ -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G , и $\mathfrak{F}$ -абнормальной, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Второе направление занимается изучением свойств максимальных подгрупп, определяемых некоторыми ограничениями на их индексы.

Бесспорно, имеется тесная связь между обоими направлениями. В то же время существуют примеры систем максимальных подгрупп, которые не могут быть охарактеризованы в терминах $\mathfrak{F}$ -абнормальности или $\mathfrak{F}$ -нормальности ни для какой формации $\mathfrak{F}$. Такой пример дают, в частности, максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на заданное простое число p .

Применение функциональных схем исследования свойств максимальных подгрупп позволяет объединить два указанных подхода и по-новому взглянуть на задачи о пересечениях максимальных подгрупп. Центральным на этом пути оказалось следующее определение, аксиоматизирующее свойство инвариантности при гомоморфизмах большинства известных классов максимальных подгрупп.

Согласно [3] подгрупповым m -функтором называется функция Θ , которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G . При этом предполагается, что $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ для любого изоморфизма $\alpha: G \rightarrow G^\alpha$.

Подгрупповой m -функтор Θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

- 1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;
- 2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Множество всех регулярных m -функторов обозначим через $\mathcal{M}_{\text{reg}}$. На этом множестве определим операции пересечения и объединения следующим образом:

$$(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G), \quad (\Theta_1 \cup \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cup \Theta_2(G)$$

для любых двух m -функторов Θ_1 и Θ_2 и любой группы G . Как показано в [3], m -функтор $\bigcap_{i \in I} \Theta_i$ является нижней гранью множества $\{\Theta_i \mid i \in I\}$ в $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, а m -функтор $\bigcup_{i \in I} \Theta_i$ является его верхней гранью. Таким образом, $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ – полная, бесконечно дистрибутивная решетка относительно частичного порядка, определяемого теоретико-множественным включением. Более того, решетка $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ является булевой (см., например, [3]).

В настоящей работе устанавливается, что все регулярные подгрупповые m -функторы исчерпываются $\mathfrak{X}$ -абнормальными m -функторами. Правда, в качестве $\mathfrak{X}$ выступает не формация, а класс примитивных групп. Таким образом, регулярные подгрупповые m -функторы не расширяют класс $\mathfrak{X}$ -абнормальных (или $\mathfrak{X}$ -нормальных) m -функторов, как это казалось ранее; регулярные m -функторы, задаваемые ограничениями на индексы максимальных подгрупп, также являются $\mathfrak{X}$ -абнормальными (или $\mathfrak{X}$ -нормальными). В связи с этим обобщенные подгруппы Фраттини, изучавшиеся разными авторами, на самом деле оказываются $\mathfrak{X}$ -корадикалами.

Кроме того, в работе устанавливается точное строение решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, описываются ее атомы и коатомы, изучается строение соответствующих им обобщенных подгрупп Фраттини. В доказательствах существенно используется тот факт, что в разрешимой группе нефраттиниевы главные факторы дополняемы. В работе используются определения и обозначения, принятые в [3]–[5].

2. Характеризации регулярных m -функторов. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Максимальная подгруппа M группы G называется

- 1) $\mathfrak{X}$ -нормальной, если $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$;
- 2) $\mathfrak{X}$ -абнормальной, если $G/\text{Core}_G(M) \notin \mathfrak{X}$.

В случае, когда $\mathfrak{X}$ – непустая формация, т.е. класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений с конечным числом сомножителей, данное определение эквивалентно приведенному выше.

По определению (см. [3]), подгрупповой функтор выделяет в каждой группе некоторую систему ее подгрупп, включая и саму группу. Подгрупповой функтор Θ называется $\mathfrak{X}$ -нормальным ($\mathfrak{X}$ -абнормальным), если он выделяет в каждой группе G саму группу G и все ее $\mathfrak{X}$ -нормальные ($\mathfrak{X}$ -абнормальные) максимальные подгруппы.

В дальнейшем через $\mathcal{P}$ будем обозначать класс всех (разрешимых) примитивных групп. Напомним, что группа G называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Как показано в [6], группа G примитивна тогда и только тогда, когда она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая дополняема в G . Это дополнение является максимальной подгруппой группы G с единичным ядром и называется ее *примитиватором*. Понятно, что если M – максимальная подгруппа группы G , то группа $G/\text{Core}_G(M)$ примитивна и $M/\text{Core}_G(M)$ – примитиватор группы $G/\text{Core}_G(M)$.

В дальнейшем любой (в том числе и пустой) подкласс класса $\mathcal{P}$ будем называть *примитивным классом*.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс, и пусть Θ – отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\Theta(G)$, состоящее из группы G и всех тех максимальных подгрупп M группы G , для которых $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$. Тогда

- 1) Θ – регулярный подгрупповой m -функтор;
- 2) m -функтор Θ является $(\mathcal{P} \setminus \mathfrak{X})$ -абнормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ – групповой изоморфизм. Так как $\mathfrak{X}$ – класс групп, то ввиду изоморфизма

$$G^\varphi / \text{Core}_{G^\varphi}(M^\varphi) \simeq G / \text{Core}_G(M)$$

имеем $G^\varphi / \text{Core}_{G^\varphi}(M^\varphi) \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $(\Theta(G))^\varphi = \Theta(G^\varphi)$, т.е. Θ – подгрупповой m -функтор.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G и $M \in \Theta(G)$. Если N не содержится в M , то $MN/N = G/N \in \Theta(G/N)$. Если же $N \subseteq M$, то $N \subseteq \text{Core}_G(M)$. Поэтому

$$G/N / \text{Core}_{G/N}(M/N) = G/N / \text{Core}_G(M)/N \simeq G / \text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $M/N \in \Theta(G/N)$. Верно и обратное. Если $M/N \in \Theta(G/N)$, то $M \in \Theta(G)$. Таким образом, m -функтор Θ является регулярным.

Утверждение 2) следует из определения $(\mathcal{P} \setminus \mathfrak{X})$ -абнормального m -функтора.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Θ – подгрупповой m -функтор. Тогда и только тогда Θ является регулярным, когда он $\mathfrak{X}$ -нормален для некоторого примитивного класса $\mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{X}$ – примитивный класс групп и Θ – $\mathfrak{X}$ -нормальный подгрупповой m -функтор, то в силу леммы 1 m -функтор Θ является регулярным.

Докажем обратное. Пусть Θ – регулярный подгрупповой m -функтор. Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс всех тех примитивных групп A , примитиваторы которых принадлежат $\Theta(A)$. Пусть τ – $\mathfrak{X}$ -нормальный подгрупповой m -функтор. Покажем, что $\Theta = \tau$.

Пусть G – произвольная группа и $M \in \Theta(G)$. В силу регулярности m -функтора Θ имеем

$$M / \text{Core}_G(M) \in \Theta(G / \text{Core}_G(M)).$$

При этом $M / \text{Core}_G(M)$ – примитиватор группы $G / \text{Core}_G(M)$. Отсюда и из определения класса $\mathfrak{X}$ следует, что $G / \text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$, т.е. M – $\mathfrak{X}$ -нормальная максимальная подгруппа группы G . Таким образом, $\Theta(G) \subseteq \tau(G)$.

Пусть теперь $H \in \tau(G)$. Тогда

$$G / \text{Core}_G(H) \in \mathfrak{X}.$$

Так как группа $G / \text{Core}_G(H)$ примитивна, а $H / \text{Core}_G(H)$ – ее примитиватор, то из определения класса $\mathfrak{X}$ имеем $H / \text{Core}_G(H) \in \Theta(G / \text{Core}_G(H))$. Отсюда и из регулярности m -функтора Θ заключаем, что $H \in \Theta(G)$. Значит, $\tau(G) \subseteq \Theta(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть Θ – подгрупповой m -функтор, и пусть $\mathfrak{X}$ – класс всех тех примитивных групп A , примитиваторы которых принадлежат $\Theta(A)$. Тогда и только тогда Θ является регулярным, когда он $(\mathcal{P} \setminus \mathfrak{X})$ -абнормален.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный класс групп, и пусть $\mathfrak{X}$ – класс, состоящий из всех тех примитивных групп A , примитиваторы которых $\mathfrak{F}$ -нормальны в A . Тогда

- 1) подгрупповой m -функтор Θ является $\mathfrak{F}$ -нормальным тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{X}$ -нормален;
- 2) подгрупповой m -функтор Θ является $\mathfrak{F}$ -абнормальным тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{X}$ -абнормален.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В силу следствия 1.2 множество всех регулярных подгрупповых m -функторов совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$ -нормальных ($\mathfrak{F}$ -абнормальных) m -функторов, если $\mathfrak{F}$ пробегает множество всех классов групп, а также совпадает с множеством всех $\mathfrak{X}$ -нормальных ($\mathfrak{X}$ -абнормальных) m -функторов, если $\mathfrak{X}$ пробегает множество всех примитивных классов групп.

2. Подгрупповой m -функтор Θ является единичным (единицей решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$) тогда и только тогда, когда он является $\mathcal{P}$ -нормальным.

3. Подгрупповой m -функтор Θ является нулевым (нулем решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$) тогда и только тогда, когда он является $\emptyset$ -нормальным.

4. Пусть π – непустое множество простых чисел, и пусть Θ – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π . Тогда Θ регулярен и является $\mathfrak{X}$ -нормальным, где $\mathfrak{X}$ – класс всех примитивных групп, цоколь которых является π' -группой.

3. Строение решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$. Обозначим через $Cl(\mathcal{P})$ множество всех подклассов класса $\mathcal{P}$ всех примитивных групп. На этом множестве естественным образом введем отношение частичного порядка: $\mathfrak{X}_1 \leq \mathfrak{X}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Тогда $Cl(\mathcal{P})$ является полной решеткой, в которой

$$\mathfrak{X}_1 \wedge \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2, \quad \mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2.$$

Минимальным элементом (нулем) этой решетки является пустой класс $\emptyset$. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает класс $\mathcal{P}$. Понятно, что решетка $Cl(\mathcal{P})$ является бесконечно дистрибутивной. Кроме того, любой элемент $\mathfrak{X} \in Cl(\mathcal{P})$ обладает дополнением $\mathcal{P} \setminus \mathfrak{X}$. Поэтому решетка $Cl(\mathcal{P})$ является булевой.

Для ненулевого m -функтора $\Theta \in \mathcal{M}_{\text{reg}}$ определим класс $\mathcal{P}(\Theta)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}(\Theta) = \{A \in \mathcal{P} \mid \text{примитиватор группы } A \text{ принадлежит } \Theta(A)\}.$$

Если Θ – нулевой m -функтор (т.е. $\Theta(G) = \{G\}$ для любой группы G), то полагаем $\mathcal{P}(\Theta) = \emptyset$.

Следующая теорема устанавливает связь между решетками $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ и $Cl(\mathcal{P})$.

ТЕОРЕМА 2. Решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ и $Cl(\mathcal{P})$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что отображение $\varphi: \Theta \rightarrow \mathcal{P}(\Theta)$, сопоставляющее каждому регулярному подгрупповому m -функтору Θ примитивный класс $\mathcal{P}(\Theta)$, является искомым изоморфизмом.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс. Тогда в силу леммы 1 отображение τ , ставящее в соответствие каждой группе G множество $\tau(G)$, содержащее группу G и все те ее максимальные подгруппы M , для которых $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$, является регулярным m -функтором. При этом $\varphi(\tau) = \mathfrak{X}$. Поэтому отображение φ сюръективно.

Если $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{M}_{\text{reg}}$ и $\Theta_1 \neq \Theta_2$, то найдется группа D , для которой выполнено $\Theta_1(D) \neq \Theta_2(D)$. Это значит, что в D существует, к примеру, максимальная подгруппа M , принадлежащая $\Theta_1(D)$, но не принадлежащая $\Theta_2(D)$. Поскольку подгрупповые m -функторы Θ_1 и Θ_2 регулярны, примитиватор $M/\text{Core}_D(M)$ группы $\bar{D} = D/\text{Core}_D(M)$ принадлежит $\Theta_1(\bar{D})$, но не принадлежит $\Theta_2(\bar{D})$. Следовательно, $\bar{D} \in \varphi(\Theta_1)$, но $\bar{D} \notin \varphi(\Theta_2)$. Значит, $\varphi(\Theta_1) \neq \varphi(\Theta_2)$. Таким образом, отображение φ является инъективным.

Покажем теперь, что отображение φ является решеточным изоморфизмом. Так как $(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)$ для любой группы G , то

$$\begin{aligned} \varphi(\Theta_1 \wedge \Theta_2) &= \varphi(\Theta_1 \cap \Theta_2) \\ &= \{D \in \mathcal{P} \mid \text{примитиватор группы } D \text{ принадлежит } (\Theta_1 \cap \Theta_2)(D)\} \\ &= \{A \in \mathcal{P} \mid \text{примитиватор группы } A \text{ принадлежит } (\Theta_1(A))\} \\ &\quad \cap \{B \in \mathcal{P} \mid \text{примитиватор группы } B \text{ принадлежит } (\Theta_2(B))\} \\ &= \varphi(\Theta_1) \cap \varphi(\Theta_2) = \varphi(\Theta_1) \wedge \varphi(\Theta_2). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\varphi(\Theta_1 \vee \Theta_2) = \varphi(\Theta_1) \vee \varphi(\Theta_2)$.

Таким образом, отображение φ является изоморфизмом решеток $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ и $Cl(\mathcal{P})$.

Очевидно, решетка $Cl(\mathcal{P})$ является атомной и коатомной. Атомами решетки $Cl(\mathcal{P})$ являются классы вида $\mathfrak{X} = (G)$, где G – примитивная группа, а (G) – класс групп, порожденный группой G , т.е. класс, содержащий вместе с группой G все группы, изоморфные G . Коатомами решетки $Cl(\mathcal{P})$ являются классы вида $\mathcal{P} \setminus (G)$, где G – примитивная группа.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Решетка $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ является атомной и коатомной.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Регулярный подгрупповой m -функтор Θ является атомом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(\Theta) = (G)$ для некоторой примитивной группы G .

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Регулярный подгрупповой m -функтор Θ является коатомом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P} \setminus (G)$ для некоторой примитивной группы G .

ПРИМЕР. Пусть H – циклическая группа простого порядка p , и пусть Θ – атом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathcal{P}(\Theta) = (H)$. Тогда m -функтор Θ выделяет в группе все ее нормальные максимальные подгруппы, имеющие индекс p . Если τ – коатом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathcal{P}(\tau) = \mathcal{P} \setminus (H)$, то τ выделяет в группе все максимальные подгруппы, кроме нормальных максимальных подгрупп индекса p . Очевидно, при этом Θ совпадает с $\mathfrak{N}_p$ -нормальным, а τ – с $\mathfrak{N}_p$ -абнормальным подгрупповым m -функтором, где $\mathfrak{N}_p$ – формация всех p -групп.

4. Обобщенная подгруппа Фраттини относительно атома решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Следуя [5], через $R_0\mathfrak{X}$ обозначим класс всех изоморфных копий конечных подпрямых произведений групп из $\mathfrak{X}$. Понятно, что $G \in R_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в G имеются нормальные подгруппы N_i , $i = 1, 2, \dots, t$, для которых $G/N_i \in \mathfrak{X}$ и $\bigcap_{i=1}^n N_i = 1$. Класс $\mathfrak{X}$ называется R_0 -замкнутым, если $R_0\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [5].

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – R_0 -замкнутый класс, содержащий единичную группу. Тогда для любой группы G множество

$$J = \{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathfrak{X}\},$$

частично упорядоченное по включению, имеет единственный минимальный элемент $\bigcap_{N \in J} N$, который обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$ и называется $\mathfrak{X}$ -корадикалом группы G .

Если Θ – подгрупповой m -функтор, то следуя [3], через $\Phi_{\Theta}(G)$ обозначим обобщенную подгруппу Фраттини, т.е. подгруппу, равную пересечению всех подгрупп, принадлежащих $\Theta(G)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Θ – атом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ и $\mathcal{P}(\Theta) = (H)$, и пусть $\mathfrak{X} = R_0(H) \cup (1)$. Тогда для любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\Theta}(G) = G^{\mathfrak{X}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = \{N \trianglelefteq G \mid G/N \simeq H\} = \emptyset$. Это значит, что группа G не имеет факторгрупп, изоморфных H , а поэтому $\Theta(G) = \{G\}$. Следовательно, $\Phi_{\Theta}(G) = G = G^{\mathfrak{X}}$.

Пусть теперь $J \neq \emptyset$. Тогда для любой нетривиальной подгруппы $N \in J$ примитиватор M/N группы G/N принадлежит $\Theta(G/N)$. В силу регулярности m -функтора Θ имеем $M \in \Theta(G)$. Кроме того, из $\text{Core}_{G/N}(M/N) = 1$ следует, что $\text{Core}_G(M) = N$. Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что

$$\Phi_{\Theta}(G) \subseteq \bigcap_{N \in J} N = G^{\mathfrak{X}}.$$

Допустим, что $\Phi_{\Theta}(G) \subset G^{\mathfrak{X}}$. Пусть $L/\Phi_{\Theta}(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_{\Theta}(G)$, содержащаяся в $G^{\mathfrak{X}}/\Phi_{\Theta}(G)$. Так как

$$\Phi(G/\Phi_{\Theta}(G)) = 1,$$

то $L/\Phi_{\Theta}(G)$ – дополняемый главный фактор группы G . Пусть M – максимальная подгруппа группы G , дополняющая $L/\Phi_{\Theta}(G)$. Предположим, что M не принадлежит $\Theta(G)$. В силу леммы 3.29 из [7]

$$G/\text{Core}_G(M) \simeq [L/\Phi_{\Theta}(G)](G/\text{Core}_G(L/\Phi_{\Theta}(G))).$$

Отсюда следует, что для любой другой максимальной подгруппы D группы G , дополняющей главный фактор $L/\Phi_{\Theta}(G)$, имеет место изоморфизм

$$G/\text{Core}_G(M) \simeq G/\text{Core}_G(D).$$

Так как M не принадлежит $\Theta(G)$, группа $G/\text{Core}_G(M)$ не изоморфна H . Но тогда не изоморфна группе H и группа $G/\text{Core}_G(D)$, а следовательно, максимальная подгруппа $D/\text{Core}_G(D)$ не принадлежит $\Theta(G/\text{Core}_G(D))$. Отсюда в силу регулярности m -функтора Θ заключаем, что D не принадлежит $\Theta(G)$. Итак, все максимальные подгруппы группы $G/\Phi_{\Theta}(G)$, принадлежащие $\Theta(G/\Phi_{\Theta}(G))$, содержат $L/\Phi_{\Theta}(G)$. Отсюда

$$L/\Phi_{\Theta}(G) \subseteq \Phi_{\Theta}(G/\Phi_{\Theta}(G)),$$

что противоречит равенству $\Phi_{\Theta}(G/\Phi_{\Theta}(G)) = 1$.

Таким образом, $M \in \Theta(G)$. Так как $G/\text{Core}_G(M)$ – примитивная группа и $M/\text{Core}_G(M) \in \Theta(G/\text{Core}_G(M))$, то $G/\text{Core}_G(M) \simeq H$. Отсюда и из определения $\mathfrak{X}$ -корадикала следует, что $G^{\mathfrak{X}} \subseteq \text{Core}_G(M)$. Но тогда $L \subseteq G^{\mathfrak{X}} \subseteq \text{Core}_G(M) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, $\Phi_{\Theta}(G) = G^{\mathfrak{X}}$.

5. Обобщенная подгруппа Фраттини относительно коатома решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Θ – коатом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, $\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P} \setminus (H)$ и p – простое число, делящее $|\text{Soc}(H)|$. Если $\Phi(G) = 1$ и P – силовская p -подгруппа группы $\Phi_\Theta(G)$, то

- 1) $P \trianglelefteq G$;
- 2) $P = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , $i = 1, 2, \dots, t$;
- 3) $[N_i](G/C_G(N_i)) \simeq H$, $i = 1, 2, \dots, t$;
- 4) $\Phi_\Theta(G)/P = \Phi(G/P)$ – p' -группа;
- 5) если A – дополнение подгруппы P в группе G , то выполнено $\Phi_\Theta(G) = P\Phi(A)$ и $C_{\Phi(A)}(P) = 1$;
- 6) если $\mathfrak{X} = R_0(H) \cup (1)$, то $\Phi_\Theta(G) \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы Фраттини справедливо равенство

$$N_G(P)\Phi_\Theta(G) = G.$$

Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G . Заключим $N_G(P)$ в максимальную подгруппу M группы G . Очевидно, индекс $|G : M|$ не делится на p . С другой стороны, так как $M\Phi_\Theta(G) = G$, то $M \in \tau(G)$, где τ – атом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathcal{P}(\tau) = (H)$. Поэтому $G/\text{Core}_G(M) \simeq H$. Отсюда и из того, что p делит $|\text{Soc}(H)|$, следует, что

$$|G/\text{Core}_G(M) : M/\text{Core}_G(M)| = |G : M|$$

есть степень простого числа p . Пришли к противоречию. Следовательно, $P \trianglelefteq G$. Утверждение 1) доказано.

Так как $\Phi(G) = 1$ и $P \trianglelefteq G$, в силу леммы 7.9 из [4] подгруппа P равна прямому произведению некоторого числа t минимальных нормальных подгрупп N_i группы G . Утверждение 2) доказано.

Если N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в P , то в силу равенства $\Phi(G) = 1$ подгруппа N_i дополняема в G . Если M_i – максимальная подгруппа группы G , дополняющая подгруппу N_i , то из $N_i \subseteq \Phi_\Theta(G)$ следует $M_i \in \tau(G)$. Поэтому $G/\text{Core}_G(M_i) \simeq H$. В силу леммы 3.29 из [7] имеем

$$G/\text{Core}_G(M_i) \simeq [N_i](G/C_G(N_i)).$$

Поэтому $[N_i](G/C_G(N_i)) \simeq H$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Утверждение 3) доказано.

Пусть L/K – главный фактор группы G , причем $P \subseteq K \subset L \subseteq \Phi_\Theta(G)$. Так как P – силовская p -подгруппа группы $\Phi_\Theta(G)$, то L/K – p' -группа. Предположим, что фактор L/K дополняем в G . Пусть D – дополнение для L/K в G . Тогда $G/\text{Core}_G(D) \simeq H$. Поэтому из $|L/K| = |\text{Soc}(H)|$ следует, что L/K – p -группа. Получили противоречие. Следовательно, все G -главные факторы группы $\Phi_\Theta(G)/P$ являются фраттиниевыми, а значит, $\Phi_\Theta(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $\Phi_\Theta(G)/P = \Phi(G/P)$. Утверждение 4) доказано.

В силу леммы 7.9 из [4] подгруппа P дополняема в G . Пусть A – одно из таких дополнений. Так как каждая максимальная подгруппа M группы G , содержащая P ,

имеет вид $M = M_1 P$, где M_1 – максимальная подгруппа A , то $\Phi(G/P) = \Phi(A)P/P$. Отсюда и из утверждения 4) следует, что $\Phi_\Theta(G) = P\Phi(A)$. Кроме того, на основании леммы V.5.12 из [5] справедливо равенство $C_{\Phi(A)}(P) = \Phi(G) = 1$. Утверждение 5) доказано.

Очевидно, подгрупповые m -функторы Θ и τ взаимодополняемы в решетке $\mathcal{M}_{\text{reg}}$. Поэтому $\Phi_\Theta(G) \cap \Phi_\tau(G) = \Phi(G)$. На основании теоремы 3 справедливо равенство $\Phi_\tau(G) = G^{\mathfrak{X}}$. Отсюда имеем, что $\Phi_\Theta(G) \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следующий пример показывает, что в теореме 4 в общем случае факторгруппа $\Phi_\Theta(G)/P$ может быть неединичной. Пусть Θ – коатом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P} \setminus (H)$, где H – голоморф циклической группы порядка 17. Тогда если P – силовская 17-подгруппа группы H , то $\Phi_\Theta(H)/P$ – циклическая группа порядка 8.

Далее через Z_p мы обозначаем циклическую группу простого порядка p , а через $\Delta^{\mathfrak{X}}(G)$ будем обозначать пересечение всех $\mathfrak{X}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G ($\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть Θ – коатом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P} \setminus (Z_p)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi_\Theta(G) = \Delta^{\mathfrak{N}_p}(G)$;
- 2) выполнено

$$\Phi_\Theta(G)/\Phi(G) = N_1/\Phi(G) \times \cdots \times N_t/\Phi(G),$$

где $N_i/\Phi(G) \subseteq Z(G/\Phi(G))$ и $|N_i/\Phi(G)| = p$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$;

- 3) $G/\Phi(G) = \Phi_\Theta(G)/\Phi(G) \times A/\Phi(G)$;
- 4) если $\mathfrak{X} = R_0(Z_p) \cup (1)$, то $G^{\mathfrak{X}} \subseteq A$ и

$$A/G^{\mathfrak{X}} = K_1/G^{\mathfrak{X}} \times \cdots \times K_s/G^{\mathfrak{X}},$$

где $|K_j/G^{\mathfrak{X}}| = p$ для любого $j = 1, 2, \dots, s$.

6. Общий случай. Зафиксируем далее группу G . Через $\mathcal{P}(G)$ обозначим класс всех примитивных групп, изоморфных факторгруппам группы G (если $G = 1$, то $\mathcal{P}(G) = \emptyset$).

ЛЕММА 3. Если Θ_1 и Θ_2 – подгрупповые m -функторы, то

$$\Phi_{\Theta_1 \cup \Theta_2}(G) = \Phi_{\Theta_1}(G) \cap \Phi_{\Theta_2}(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Theta_1(G) = \{G, M_1, \dots, M_n\}$, $\Theta_2(G) = \{G, D_1, \dots, D_k\}$. Тогда

$$\Phi_{\Theta_1 \cup \Theta_2}(G) = (G \cap M_1 \cap \cdots \cap M_n) \cap (G \cap D_1 \cap \cdots \cap D_k) = \Phi_{\Theta_1}(G) \cap \Phi_{\Theta_2}(G).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть Θ – регулярный подгрупповой m -функтор, и пусть

$$\mathcal{P}(\Theta) \cap \mathcal{P}(G) = (H_1, \dots, H_t),$$

где $\{H_1, \dots, H_t\}$ – максимальное множество попарно неизоморфных примитивных групп из $\mathcal{P}(\Theta) \cap \mathcal{P}(G)$. Если Θ_i – атом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathcal{P}(\Theta_i) = (H_i)$, $i = 1, \dots, t$, то

- 1) $\Phi_\Theta(G) = \bigcap_{i=1}^t \Phi_{\Theta_i}(G)$;
- 2) $\Phi_\Theta(G) = \bigcap_{i=1}^t (G^{\mathfrak{X}_i})$, где $\mathfrak{X}_i = R_0(H_i) \cup (1)$;
- 3) $\Phi_\Theta(G) = G^{\mathfrak{X}}$, где $\mathfrak{X} = R_0(\mathcal{P}(\Theta) \cap \mathcal{P}(G)) \cup (1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau = \bigcup_{i=1}^t \Theta_i$. Простая проверка показывает, что выполнено $\Phi_\Theta(G) = \Phi_\tau(G)$. Теперь утверждение 1) прямо следует из леммы 3. На основании теоремы 3, $\Phi_{\Theta_i}(G) = G^{\mathfrak{X}_i}$. Отсюда следует, что $\Phi_\Theta(G) = \bigcap_{i=1}^t (G^{\mathfrak{X}_i})$. Утверждение 3) вытекает из определения $\mathfrak{X}$ -корадикала и того, что $G^{\mathfrak{X}} = \bigcap_{i=1}^t (G^{\mathfrak{X}_i})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 3 следует, что множество

$$\{\Phi_\Theta(G) \mid \Theta \in \mathcal{M}_{\text{reg}}\}$$

частично упорядоченное по включению, является нижней полурешеткой, а следовательно, и полной решеткой. Нулем этой решетки является подгруппа Фраттини $\Phi(G)$, а единицей – сама группа G .

Следующий пример показывает, что отображение

$$\varphi: \Theta \mapsto \Phi_\Theta(G)$$

не является антигомоморфизмом решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ в решетку нормальных подгрупп группы G .

ПРИМЕР. Пусть G – группа, изоморфная симметрической группе третьей степени, и пусть Θ_1 – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, индекс которых не делится на 3, а Θ_2 – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, индекс которых не делится на 2. Если Q – силовская 3-подгруппа группы G , а P – силовская 2-подгруппа группы G , то

$$\Theta_1(G) = \{G, Q\}, \quad \Theta_2(G) = \{G, P^x \mid x \in G\}.$$

Поэтому

$$\Phi_{\Theta_1}(G) = Q, \quad \Phi_{\Theta_2}(G) = 1, \quad \Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_2}(G) = G.$$

Значит, $\Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_2}(G) \neq \Phi_{\Theta_1}(G)\Phi_{\Theta_2}(G)$.

Следующий пример показывает, что в общем случае решетка

$$\{\Phi_\Theta(G) \mid \Theta \in \mathcal{M}_{\text{reg}}\}$$

не является подрешеткой решетки всех нормальных подгрупп группы G .

ПРИМЕР. Пусть G – группа из предыдущего примера, и пусть $D = A \times G$, где A – циклическая группа порядка 2. Если Θ_1 – нормальный подгрупповой m -функтор (т.е. m -функтор, выделяющий все нормальные максимальные подгруппы), Θ_2 – его дополнение в решетке $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, то

$$\Phi_{\Theta_1}(D) = Q, \quad \Phi_{\Theta_2}(D) = A.$$

Предположим, что $\Phi_{\Theta_1}(D)\Phi_{\Theta_2}(D) \in \{\Phi_\Theta(D) \mid \Theta \in \mathcal{M}_{\text{reg}}\}$. Тогда найдется регулярный подгрупповой m -функтор Θ , для которого справедливо равенство

$$\Phi_\Theta(D) = \Phi_{\Theta_1}(D)\Phi_{\Theta_2}(D).$$

Так как $|D : \Phi_\Theta(D)| = 2$, то $\Theta(D) \supseteq \{D, A \times Q\}$. Но ввиду того, что Θ – подгрупповой m -функтор, подгруппа PQ также принадлежит $\Theta(D)$. Пришли к противоречию. Следовательно, подгруппа $\Phi_{\Theta_1}(D)\Phi_{\Theta_2}(D)$ не принадлежит решетке $\{\Phi_\Theta(D) \mid \Theta \in \mathcal{M}_{\text{reg}}\}$.

Из строения решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ (теорема 2) следует, что любой регулярный подгрупповой m -функтор может быть сконструирован как из атомов, так и коатомов решетки M_{reg} . В силу теоремы 5 подгруппа $\Phi_{\Theta}(G)$ группы G может быть построена из подгрупп $\Phi_{\Theta_i}(G)$, где Θ_i – такие атомы решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$, что $\Theta = \bigcup_{i \in I} \Theta_i$. На основании приведенных примеров для коатомов Θ_i решетки $\mathcal{M}_{\text{reg}}$ аналогичное представление подгруппы $\Phi_{\Theta}(G)$ произведением соответствующих подгрупп $\Phi_{\Theta_i}(G)$ невозможно.

Условие разрешимости групп в данной работе является существенным. Связано это с тем, что по теореме Оре [8] в разрешимой примитивной группе все примитиваторы сопряжены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Carter, T. Hawkes, “The $\mathfrak{F}$ -normalisers of a finite soluble group”, *J. Algebra*, **5:2** (1967), 175–202.
- [2] Л. А. Шеметков, “Ступенчатые формации групп”, *Матем. сб.*, **94:4** (1974), 628–648.
- [3] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Белорусская наука, Минск, 2003.
- [4] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [5] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.
- [6] R. Baer, “Classes of finite groups and their properties”, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 115–187.
- [7] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.
- [8] O. Ore, “Contributions to the theory of groups of finite order”, *Duke Math. J.*, **5:2** (1939), 431–460.

С. Ф. Каморников

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины, Беларусь

E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступило

30.08.2007