Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пихтильников, О первичном радикале PI -представимых групп, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 739–744

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:19:46

УДК 512.544.37

О ПЕРВИЧНОМ РАДИКАЛЕ PI -ПРЕДСТАВИМЫХ ГРУПП

С. А. Пихтильков

В работе вводится понятие PI -представимых групп – подгрупп обратимых элементов PI -алгебры над полем. Показано, что в PI -представимых группах существует наибольшая локально-разрешимая нормальная подгруппа, которая совпадает с первичным радикалом группы. В конечно порожденной PI -представимой группе первичный радикал разрешим. Класс PI -представимых групп является обобщением класса линейных групп, так как в таких группах наибольшая локально разрешимая нормальная подгруппа может не быть разрешимой.

Библиография: 20 названий.

Хорошо известно, что существует определенное сходство между группами и алгебрами Ли. Часто удается находить для алгебр Ли аналоги теорем, доказанных для групп. Значительно реже бывает перенос результатов в обратном направлении. В этой работе вводится класс PI -представимых групп и для него доказывается аналог результата о первичном радикале специальных алгебр Ли [1].

Радикалом для групп G называется такой класс нормальных подгрупп $R(G)$, что $R(G/R(G)) = 1$.

Удобной для доказательства различных теорем является подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ – множество необразующих элементов группы G [2], которая является радикалом для групп. Тем не менее, представляется интересным использовать другие радикалы.

Радикальными свойствами обладают наибольшие разрешимая и локально разрешимая нормальные подгруппы в тех случаях, когда они существуют. Известно, например, что наибольшая разрешимая нормальная подгруппа существует для линейных групп над полем [3, теорема 45.1.3]. В этом случае условия разрешимости и локальной разрешимости совпадают. В общем случае может не существовать наибольшей локально разрешимой нормальной подгруппы [4].

Различные радикалы для групп исследовались в работах [5]–[11] и других.

Группы следующего класса содержат наибольшую локально разрешимую подгруппу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть группа G вложена в алгебру эндоморфизмов векторного пространства M над полем, $G \subseteq \text{End}_F(M)$. Обозначим через $A(G)$ ассоциативную алгебру, порожденную множеством G в алгебре $\text{End}_F(M)$. Скажем, что группа G является PI -представимой над полем F , если существует такое векторное пространство M и такое вложение группы G в алгебру эндоморфизмов M , что алгебра $A(G)$ является PI -алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нормальная подгруппа P группы G называется *первичной*, если вложение $[A, B] \subseteq P$, где $A \triangleleft G$ и $B \triangleleft G$ – нормальные подгруппы, влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Скажем, что факторгруппа G/P является *первичной*, если нормальная подгруппа P *первична*.

Следующая теорема является аналогом теоремы, доказанной для групп с кручением [11].

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа G является PI -представимой над полем F . Тогда

- 1) в группе G существует наибольшая локально разрешимая нормальная подгруппа $R(G)$;
- 2) локально разрешимый радикал $R(G)$ совпадает с пересечением всех первичных нормальных подгрупп группы G ;
- 3) если группа G конечно порождена, то радикал $R(G)$ является разрешимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть группа G вложена в алгебру эндоморфизмов векторного пространства M над полем, $G \subseteq \text{End}_F(M)$ и алгебра $A = A(G)$ является PI -алгеброй. Обозначим через $P = P(A)$ первичный радикал алгебры A . Согласно теореме 1.7.3 из [12] идеал P является локально нильпотентным. Рассмотрим отображение $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$, где $\bar{G}$ образ группы G при гомоморфизме $A \rightarrow A/P$.

Ядро гомоморфизма φ состоит из элементов вида $1 - a$, $a \in P$. Пусть $[s, t]_g = sts^{-1}t^{-1}$ – коммутатор элементов в группе. Запишем групповой коммутатор элементов $1 - a$ и $1 - b$, где $a, b \in P$. Получим

$$[1 - a, 1 - b]_g = (1 - a)(1 - b)(1 + a + a^2 + \dots + a^n)(1 + b + b^2 + \dots + b^m),$$

где m, n – некоторые натуральные числа.

Коммутатор $[1 - a, 1 - b]_g$ не содержит элементов a и b первой степени. Коммутатор $[[1 - a, 1 - b]_g, [1 - c, 1 - d]_g]_g$ не содержит слагаемых первой, второй и третьей степени от a, b, c, d и так далее. Из этого и локальной нильпотентности идеала P следует локальная разрешимость нормальной подгруппы $\text{Ker } \varphi$.

Представим алгебру A/P в виде подпрямого произведения первичных алгебр A_α , $\alpha \in I$. Пусть $\bar{G}_\alpha$ – образы группы $\bar{G}$ в алгебрах A_α . Согласно теореме Размыслова о ранге алгебры A_α имеют размерность не выше $[d/2]^2$ над своими центроидами Мартиндейла $C(A_\alpha)$, где d – степень полиномиального тождества, выполненного в алгебре A [13]. Центроид Мартиндейла первичной алгебры является полем.

Согласно [3, теорема 45.1.3] существует функция $\zeta(n)$, ограничивающая ступень разрешимости всякой разрешимой подгруппы группы $GL(n, C(A_\alpha))$. Локальная разрешимость совпадает с разрешимостью для подгрупп группы $GL(n, C(A_\alpha))$, и такие подгруппы содержат наибольшую нормальную подгруппу. Следовательно, подгруппа $\bar{G}_\alpha$ содержит наибольшую разрешимую нормальную подгруппу $\bar{R}(\bar{G}_\alpha)$ ограниченной степени для всех $\alpha \in I$.

Пусть $\bar{R}(\bar{G})$ – множество элементов группы $\bar{G}$, которые отображаются в $\bar{R}(\bar{G}_\alpha)$ для всех $\alpha \in I$. Нормальная подгруппа $\bar{R}(\bar{G})$ является наибольшей разрешимой подгруппой группы $\bar{G}$. Прообраз $R(G)$ нормальной подгруппы $\bar{R}(\bar{G})$ в группе G является расширением локально разрешимой группы $\text{Ker } \varphi$ при помощи разрешимой группы $\bar{R}(\bar{G})$. В

общем случае расширение локально разрешимой группы при помощи разрешимой может не быть локально разрешимым. Однако в нашем случае это так.

Пусть X – конечное подмножество группы $R(G)$. Рассмотрим подалгебру B , порожденную в алгебре A элементами множества X и обратными к ним. Согласно теореме Кемера–Размыслова–Брауна радикал Джекобсона $J(B)$ алгебры B является нильпотентным [14], [15].

Фактор-алгебра $B/J(B)$ является подпрямым произведением примитивных PI -алгебр, которые согласно теореме Капланского [16] центральные простые, размерности не выше $[d/2]^2$ над своими центроидами, где d – степень полиномиального тождества, выполненного в алгебре B .

Обозначим через H подгруппу, порожденную множеством X . Образ группы H в алгебре $B/J(B)$ является разрешимым, так как ступень разрешимости подгрупп линейной группы ограничена некоторой функцией, зависящей от порядка матричной алгебры [3, теорема 45.1.3]. Некоторая степень коммутанта группы H состоит из элементов вида $1 + b$, $b \in J(B)$. Из этого следует разрешимость группы H .

Доказана локальная разрешимость группы $R(G)$.

Нормальная подгруппа $R(G)$ является наибольшей локально разрешимой подгруппой группы G .

3) Если группа G конечно порождена, то алгебра $A = A(G)$ является конечно порожденной PI -алгеброй. Согласно теореме Кемера–Размыслова–Брауна радикал Джекобсона $J(A)$ алгебры A является нильпотентным [14], [15]. Следовательно, нильпотентным является первичный радикал $P(A)$ алгебры A . В этом случае нормальная подгруппа $\text{Ker } \varphi$ разрешима. Далее из рассуждений 1) получаем разрешимость локально разрешимой нормальной подгруппы $R(G)$.

2) В работе [11] показано, что если в группе H есть наибольшая разрешимая нормальная подгруппа R , то R является пересечением всех первичных нормальных подгрупп группы H . Из этого следует, что факторгруппу $\overline{G}/\overline{R}(\overline{G})$ можно представить в виде подпрямого произведения первичных групп.

Покажем, что нормальная подгруппа $\text{Ker } \varphi$ содержится в любой первичной нормальной подгруппе группы G . Так как группа $\overline{G}$ содержит наибольшую разрешимую нормальную подгруппу, локально разрешимый радикал $R(G)$ группы G также содержится в любой первичной нормальной подгруппе группы G .

Пересечение всех первичных нормальных подгрупп группы называется *первичным радикалом*.

В работе [8] доказан следующий критерий принадлежности элемента к первичному радикалу группы.

Элемент c принадлежит первичному радикалу группы тогда и только тогда, когда для всех $b_i \in G$, $i = 1, 2, \dots$, в последовательности $c_0 = c, \dots, c_{i+1} = [[b_i, c_i]_g, c_i]_g$ элемент $c_j = 1$ для некоторого $j > 0$.

Пусть $1 - a$, $a \in P$, – произвольный элемент нормальной подгруппы $\text{Ker } \varphi$. Обратным к нему будет элемент $1 + a + \dots + a^n$. Пусть $b \in G$ произвольный. Тогда

$$[b, 1 - a]_g = b(1 - a)b^{-1}(1 + a + \dots + a^n) = (1 - bab^{-1})(1 + a + \dots + a^n) = 1 + f(a),$$

где $f(a) \in P$ и $f(a)$ – сумма произведений степеней элемента a , в некоторые из которых входят элементы b, b^{-1} .

Рассмотрим коммутатор $[1 + f(a), 1 - a]_g = 1 + g(a)$. Многочлен $g(a)$ не содержит одночленов, в которые элемент a входит в первой степени. Можно считать, что $g(a) \in AaAaA$. Построим последовательность

$$a_0 = -a, \quad a_1 = g(a), \quad 1 + a_{i+1} = [[b_i, 1 + a_i]_g, 1 + a_i]_g, \quad b_i \in G, \quad i = 1, 2, \dots$$

Элементы этой последовательности удовлетворяют условию $a_{i+1} \in Aa_iAa_iA$. Хорошо известно, что если $a_0 \in P$, начальный элемент последовательности принадлежит первичному радикалу, то $a_j = 0$ для некоторого $j > 0$ [17].

Следовательно, элемент $1 - a$ принадлежит первичному радикалу группы G .

Назовем наибольший локально разрешимый идеал $R(G)$ PI -представимой над полем группы G *локально разрешимым радикалом*.

К числу PI -представимых групп над полем относятся, в частности, конечные группы и подгруппы группы $GL(n, F)$ над полем.

Следующая теорема дает достаточное условие PI -представимости группы над полем.

ТЕОРЕМА 2. *Если групповая алгебра FG группы G является PI -алгеброй, то группа G является PI -представимой над полем F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть групповая алгебра FG является PI -алгеброй. Рассмотрим отображение $\varphi: G \rightarrow \text{End}_F FG$, заданное формулой

$$\varphi(g)(a_1h_1 + \dots + a_nh_n) = a_1h_1g + \dots + a_nh_ng, \quad a_k \in F, \quad g, h_k \in G.$$

Ассоциативная алгебра $A(G)$, порожденная в $\text{End}_F FG$ множеством $\varphi(G)$, является гомоморфным образом групповой алгебры FG и, следовательно, PI -алгеброй.

Необходимые и достаточные условия, при выполнении которых групповая алгебра FG над полем является PI -алгеброй, можно найти в работе [18].

В качестве примера PI -представимой группы можно рассмотреть группу G обратимых элементов любой PI -алгебры A .

Приведем пример PI -представимой группы, которая не является линейной группой над полем.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим алгебру матриц порядка n над коммутативной алгеброй K с единицей над полем характеристики нуль, первичный радикал которой не является нильпотентным. Алгебру K можно построить как фактор кольца многочленов от счетного числа переменных.

Пусть G — унитарная подгруппа группы $GL(n, K)$, т.е. группа невырожденных матриц $A \in K_n$ таких, что $AA^* = E$. Тогда первичный радикал группы G разрешим тогда и только тогда, когда первичный радикал алгебры K нильпотентен (следует из [9, теорема 2.2]).

В рассматриваемом случае первичный радикал группы G не является разрешимым.

Определенный интерес представляет возможность ослабить условие на ассоциативную алгебру $A(G)$. Одна из возможных гипотез:

достаточно ли локальной нильпотентности первичного радикала алгебры $A(G)$ для локальной разрешимости первичного идеала группы G ? (*)

Для обсуждения возможности справедливости гипотезы (*) приведем пример группы, первичный радикал которой не является локально разрешимым. Пример расширения локально разрешимой группы при помощи абелевой, которая не является локально разрешимой, был сообщен автору А. Л. Шмелькиным.

ПРИМЕР 2. Пусть $G = F(x, y)$ – свободная группа с двумя образующими. Тогда коммутант G' группы G является свободной группой со счетным множеством образующих. Как показал Ю. П. Размыслов [19], существуют локально разрешимые и даже локально нильпотентные многообразия групп, которые не являются разрешимыми. Пусть $V(G')$ – вербальная подгруппа группы G' такая, что группа $G'/V(G')$ является свободной группой локально нильпотентного, но не разрешимого многообразия. Подгруппа $V(G')$ является характеристической в группе G' и, следовательно, нормальной в группе G . Группа $\overline{G} = G/V(G')$ является расширением локально разрешимой группы $H = G'/V(G')$ при помощи абелевой, но не является локально разрешимой.

Покажем, что свободная группа H локально нильпотентного многообразия имеет нетривиальный центр. Пусть $x_1, \dots, x_{k+1}$, $k \geq 2$, – свободные образующие группы H . Подгруппа, порожденная ими, является нильпотентной.

Существуют натуральное число m и такие элементы

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, \dots, x_k\},$$

что

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, x_{k+1}]_g = 1, \quad \text{а} \quad [x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]_g \neq 1.$$

Неединичный элемент $[x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]_g$ лежит в центре группы H . Центр C группы H является характеристической нормальной подгруппой.

Из характеристичности C следует, что C – абелева нормальная подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда C лежит в первичном радикале группы $\overline{G}$.

Факторгруппа G'/C также имеет нетривиальный центр. Продолжая этот процесс, с помощью трансфинитной индукции покажем, что подгруппа H , а затем и вся группа $\overline{G}$ лежат в первичном радикале группы $\overline{G}$.

Пусть K – произвольное поле характеристики нуля. Рассмотрим групповую алгебру $K\overline{G}$. Если бы радикал Джекобсона алгебры $K\overline{G}$ был равен нулю, то ее первичный радикал тоже был бы равен нулю. Из гипотезы (*) следует локальная разрешимость группы $\overline{G}$, что неверно. Таким образом из справедливости гипотезы (*) следует отрицательное решение проблемы Капланского (проблема 66 в [20]) о полупростоте радикала Джекобсона групповой алгебры над полем характеристики нуля.

Приведенное рассуждение указывает на малую вероятность справедливости гипотезы (*).

Автор выражает благодарность профессорам В. Н. Латышеву, А. В. Михалеву, А. Ю. Ольшанскому, Б. И. Плоткину и А. Л. Шмелькину за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 3. С. 643–648.
- [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
- [3] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1980.
- [4] Baumslag G., Kovacs L. G., Neumann B. H. On products of normal subgroups // Acta Sci. Math. 1965. V. 26. P. 145–147.
- [5] Щукин К. И. RI^* -разрешимый радикал групп // Матем. сб. 1960. Т. 52. № 4. С. 1021–1031.
- [6] Buys A., Gerber G. K. The prime radical for Ω -groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. P. 1089–1099.
- [7] Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Записки научн. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1983. Т. 132. С. 97–109.
- [8] Михалев А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал Ω -групп и Ω - l -групп // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 4. С. 1405–1413.
- [9] Голубков А. Ю. Первичный (RI^* -разрешимый) радикал унитарной группы над кольцом с инволюцией // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 1. С. 93–119.
- [10] Zhang Zhirang. The locally solvable radical of locally finite groups // South-East Asian Bull. Math. 1998. V. 22. P. 325–329.
- [11] Zhang Zhirang, Yang Wenze. The locally solvable radical of torsion groups // Comm. Algebra. 2000. V. 28. P. 3987–3991.
- [12] Jacobson N. PI -Algebras. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1975.
- [13] Размыслов Ю. П. Тожества алгебр и их представления. М.: Наука, 1989.
- [14] Кемер А. Р. Тожества Капелли и нильпотентность радикала конечно порожденной PI -алгебры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 245. № 4. С. 793–797.
- [15] Braun A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI -ring // J. Algebra. 1984. V. 89. P. 375–396.
- [16] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
- [17] Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
- [18] Passman D. S. Group rings satisfying a polynomial identity // J. Algebra. 1972. V. 20. P. 103–117.
- [19] Размыслов Ю. П. Об энгелевых алгебрах Ли // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 1. С. 33–44.
- [20] Днестровская тетрадь. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1976.

Тульский государственный педагогического университет им. Л. Н. Толстого
E-mail: pikhtilov@tula.net

Поступило
01.07.2001