Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Попов, Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 745–749

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:43:07

УДК 517.975.7

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. М. Попов

Рассмотрена обратная задача вариационного исчисления для нелинейной и линейной систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Установлена связь между формальной потенциальностью линейной системы с постоянными коэффициентами и четностью ее характеристической функции.

Библиография: 4 названия.

Введение. Рассматривается классическая обратная задача вариационного исчисления [1, с. 12]. Пусть задан оператор N , определенный на множестве $D(N) \subset U$ и действующий в пространство V ($N: D(N) \rightarrow V$). На множестве $V \times U$ задается симметричная билинейная форма $\Phi(v, g) \equiv \langle v, g \rangle$, отображающая множество $V \times U$ в множество действительных чисел ($\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$). Требуется для оператора N уравнения

$$N(u) = O_v, \quad (1)$$

где O_v – нулевой элемент пространства V , найти дифференцируемый по Гато функционал $f[u]$ такой, что его вариация имеет вид

$$\delta f[u] = \langle N(u), \delta u \rangle \quad \forall u \in D(N),$$

т.е. уравнение (1) является уравнением Эйлера для функционала f .

Операторы, для которых существуют такие функционалы, называются *потенциальными* относительно заданной билинейной формы. При этом f называется *потенциалом* оператора N .

Искомый функционал для потенциального оператора N находится по формуле [1, с. 15]

$$f[u] = f[u_0] + \int_0^1 \langle N(u_0 + s(u - u_0)), u - u_0 \rangle ds, \quad (2)$$

где u_0 – фиксированный элемент из $D(N)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ по программе “Университеты России – фундаментальные исследования”, грант № 1199.

Таким образом, чтобы построить искомый функционал по заданному уравнению, вначале необходимо установить, является ли оператор уравнения потенциальным. Для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка необходимые условия потенциальности соответствующих операторов впервые получены Гельмгольцем [2], поэтому в литературе подобные условия принято называть условиями потенциальности Гельмгольца.

В настоящей работе для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка осуществлена редукция условий потенциальности Гельмгольца, полученных в работе [3] для системы уравнений μ -го порядка. Для линейной системы с потенциальным оператором построен потенциал. Установлена связь между формальной потенциальностью линейной системы с постоянными коэффициентами и четностью ее характеристической функции.

1. Нелинейная система. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений

$$N_i(u) \equiv F_i(t, u(t + \theta\tau), u'(t + \theta\tau), u''(t + \theta\tau)) = 0, \quad (3)$$

где $i = 1, \dots, n$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ – неизвестная вектор-функция, $\theta = -1, 0, 1$, $\tau = \text{const} > 0$, $t \in [t_1 - \tau, t_2 + \tau]$, $t_2 - t_1 > 2\tau$, F_i – трижды непрерывно дифференцируемые функции по всем переменным в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{9n+1}$.

Решением системы (3) будем называть непрерывную, дважды кусочно-дифференцируемую вектор-функцию, удовлетворяющую уравнению (3) всюду на $[t_1 - \tau, t_2 + \tau]$, кроме конечного числа точек.

Обозначим через $U = Q^2$ множество непрерывных дважды кусочно-дифференцируемых функций при $t \in [t_1 - \tau, t_2 + \tau]$. Зададим область определения оператора $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ (3) равенством

$$D(N) = \{u \in U : u(t) = \varphi_j(t), t \in E_j = [t_j - \tau, t_j + \tau], j = 1, 2\}, \quad (4)$$

где $\varphi_j(t)$ – заданные функции, $\varphi_j(t) \in C^2$.

Пусть $N: D(N) \rightarrow V$. На множестве $V \times U$ зададим локальную билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\langle v, g \rangle = \int_{t_1}^{t_2} v(t)g(t) dt, \quad (5)$$

где

$$v(t)g(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t)g_k(t).$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы оператор N системы уравнений (3) был потенциальным на заданном множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (5),*

необходимо и достаточно, чтобы для любого $u \in D(N)$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t-\tau)} + 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t-\tau)} \right]_+ &= \frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t+\tau)}, & \left[\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t-\tau)} \right]_+ &= \frac{\partial F_k}{\partial u''_i(t+\tau)}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t)} + 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t)} &= \frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t)}, & \frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t)} &= \frac{\partial F_k}{\partial u''_i(t)}, \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_i(t+\tau)} - \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_k(t-\tau)} \right]_+ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t+\tau)} - \left[\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t-\tau)} \right]_+ \right), \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_i(t)} - \frac{\partial F_i}{\partial u_k(t)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t)} - \frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t)} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где обозначено $[\Psi(t, u(t-\tau), u(t), \dots)]_+ = \Psi(t+\tau, u(t), u(t+\tau), \dots)$, $[\Psi]_-$ определяется аналогично, $i, k = 1, \dots, n$.

Частные производные, входящие в равенства (6), находятся обычным способом. Например, $\partial F_i / \partial u'_k(t-\tau)$ означает частную производную по переменной $u'_k(t-\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система уравнений (3) является частным случаем системы дифференциально-разностных уравнений μ -го порядка, рассмотренной в работе [3], где для соответствующего оператора получены необходимые и достаточные условия потенциальности Гельмгольца относительно классической билинейной формы (5). Применительно к рассматриваемому оператору N системы (3) эти условия имеют вид

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u_k(t-\tau)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t-\tau)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t-\tau)} \right]_+ = \frac{\partial F_k}{\partial u_i(t+\tau)}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_k(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t)} = \frac{\partial F_k}{\partial u_i(t)}, \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u_k(t+\tau)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t+\tau)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t+\tau)} \right]_- = \frac{\partial F_k}{\partial u_i(t-\tau)}, \quad (9)$$

$$\left[-\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t-\tau)} + 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t-\tau)} \right]_+ = \frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t+\tau)}, \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t-\tau)} \right]_+ = \frac{\partial F_k}{\partial u''_i(t+\tau)}, \quad (11)$$

$$-\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t)} + 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t)} = \frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t)}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t)} = \frac{\partial F_k}{\partial u''_i(t)}, \quad (13)$$

$$\left[-\frac{\partial F_i}{\partial u'_k(t+\tau)} + 2\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t+\tau)} \right]_- = \frac{\partial F_k}{\partial u'_i(t-\tau)}, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u''_k(t+\tau)} \right]_- = \frac{\partial F_k}{\partial u''_i(t-\tau)}. \quad (15)$$

Анализ условий (7)–(15) показывает, что их число можно сократить. В силу очевидных равенств

$$[[\Psi]_-]_+ = [[\Psi]_+]_- = \Psi \quad (16)$$

условия (11) и (15) эквиваленты. Используя равенства (11) и (16), легко доказать, что равенства (10) и (14) также эквивалентны. Установим эквивалентность равенств (7) и (9). Разрешая (10) относительно $\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F_i}{\partial u_k'(t-\tau)}\right]_+$ и подставляя полученное выражение в (7), получим

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_i(t+\tau)} - \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_i(t-\tau)}\right]_+ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_k}{\partial u'(t+\tau)} - \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_k'(t-\tau)}\right]_+ \right). \quad (17)$$

Аналогично, используя (16), равенство (17) можно получить из равенств (9) и (14). Эквивалентность (7) и (9) установлена.

Равенство (8) с учетом (12) может быть также представлено в более симметричном виде

$$\frac{\partial F_k}{\partial u_i(t)} - \frac{\partial F_i}{\partial u_k(t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_k}{\partial u_i'(t)} - \frac{\partial F_i}{\partial u_k'(t)} \right). \quad (18)$$

Отбрасывая равенства (9), (14) и (15), как эквивалентные соответственно равенствам (7), (10) и (11), а условия (7) и (8) заменяя на более симметричные (17) и (18), получим, что необходимые и достаточные условия потенциальности оператора N системы (3) могут быть представлены равенствами (10)–(13), (17) и (18), которые совпадают с условиями (6). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученные условия потенциальности для рассматриваемого оператора также будем называть условиями потенциальности Гельмгольца.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичный результат для обыкновенных дифференциальных уравнений приведен в [1, с. 27, теорема 2].

2. Линейная система. Рассмотрим линейную систему дифференциально-разностных уравнений

$$N(u) \equiv \sum_{l=0}^2 (A_l(t)u^{(l)}(t-\tau) + B_l(t)u^{(l)}(t) + C_l(t)u^{(l)}(t+\tau)) + p(t) = O_v, \quad (19)$$

где A_l, B_l, C_l – матрицы $(n \times n)$, p – n -вектор, $A_l, B_l, C_l, p \in C^2$, $t \in [t_1 - \tau, t_2 + \tau]$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы оператор N системы уравнений (19) был потенциальным на множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (5), необходимо и достаточно, чтобы при $t \in [t - \tau, t + \tau]$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} -A_1(t+\tau) + 2A_2'(t+\tau) &= C_1^T(t), & A_2(t+\tau) &= C_2^T(t), \\ -B_1(t) + 2B_2'(t) &= B_1^T(t), & B_2(t) &= B_2^T(t), \\ C_0^T(t) - A_0(t+\tau) &= \frac{1}{2}(C_1^T(t) - A_1'(t+\tau)), \\ B_0^T(t) - B_0(t) &= \frac{1}{2}(B_1^T(t) - B_1'(t)), \end{aligned} \quad (20)$$

где верхний индекс T означает транспонирование матрицы.

Для доказательства теоремы достаточно применить условия потенциальности (6), установленные в теореме 1, к оператору N (19).

Пусть для оператора N системы уравнений (19) выполняются условия потенциальности (20). Тогда его потенциал находится по формуле (2). Применяя интегрирование по частям слагаемых, содержащих вторые производные, а также замену переменной интегрирования в выражениях, содержащих аргумент $t + \tau$, найдем потенциал f оператора N (19):

$$\begin{aligned} f[u] = & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(u^T(t) (A_0(t) + C_0^T(t - \tau)) u(t - \tau) + u^T(t) (A_1(t) - A_2'(t)) u'(t - \tau) \right. \\ & - 2u'^T(t) A_2(t) u'(t - \tau) + u^T(t) B_0(t) u(t) + u^T(t) (B_1(t) - B_2'(t)) u'(t) \\ & \left. - u'^T(t) B_2(t) u'(t) + u'^T(t) (C_1^T(t - \tau) - C_2'^T(t - \tau)) u(t - \tau) + u^T(t) p(t) \right) dt + \text{const.} \end{aligned}$$

3. Линейная система с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейную однородную систему

$$N(u) \equiv \sum_{l=0}^2 (A_l u^{(l)}(t - \tau) + B_l u^{(l)}(t) + C_l u^{(l)}(t + \tau)) = O_v, \quad (21)$$

где A_l, B_l, C_l – постоянные матрицы $(n \times n)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для оператора N системы (21) выполняются условия (20), т.е. имеют место равенства

$$-A_1 = C_1^T, \quad A_2 = C_2^T, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = B_2^T, \quad C_0 = A_0^T, \quad B_0 = B_0^T. \quad (22)$$

В этом случае будем говорить, что для системы (21) выполнены условия формальной потенциальности. Тогда характеристическая функция (квазиполином) системы (21) (см. [4, с. 427]) – четная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характеристическая функция $h(\lambda)$ системы (21) имеет вид (см. [4, с. 427])

$$h(\lambda) = \det H(\lambda),$$

где

$$H(\lambda) = (A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2) e^{-\lambda \tau} + B_0 + B_1 \lambda + B_2 \lambda^2 + (C_0 + C_1 \lambda + C_2 \lambda^2) e^{\lambda \tau}.$$

Очевидно, в силу равенств (22) $H(-\lambda) = H^T(\lambda)$. Поэтому

$$h(-\lambda) = \det H(-\lambda) = \det H^T(\lambda) = h(\lambda).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для неопотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 40. М.: ВИНТИ, 1992.
- [2] Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия // Вариационные принципы механики / ред. Л. С. Полак. М., 1959. С. 430–459.
- [3] Попов А. М. Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 437–442.
- [4] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.