Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 246–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:11:22

О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче

А. Ю. Попов

Давно известно, что наименьший возможный тип при порядке ρ на классе целых функций с верхней плотностью корней 1 (при показателе ρ) равен $1/(e\rho)$. Автором доказано, что если все корни целых функций лежат на одном луче, то картина иная: наименьший тип на таком классе на множестве порядков $(1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ отделен от нуля и ограничен сверху.

Библиография: 3 названия.

1. Введение и основные результаты. Напомним два определения [1; гл. 1, §§ 1, 4]. *Типом при порядке $\rho > 0$ целой функции f , не равной нулю тождественно, называется величина*

$$\sigma_f(R) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln(\max_{|z| \leq R} |f(z)|). \quad (1)$$

Пусть $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – множество корней функции f (точек, в которых $f(z)$ обращается в нуль). Каждый корень стоит в этой последовательности столько раз, какова его кратность. *Верхней плотностью при порядке ρ последовательности Λ_f (более кратко, верхней ρ -плотностью) называется величина*

$$D_\rho(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (|\lambda_n|^{-\rho} n) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} (R^{-\rho} n_f(R)), \quad (2)$$

где $n_f(R)$ – количество корней $f(z)$ в круге $|z| \leq R$.

Ставится следующая задача: найти

$$C(\rho) = \inf\{\sigma_\rho(f) \mid D_\rho(f) = 1, \Lambda_f \subset (0, +\infty)\}. \quad (3)$$

Такая задача без ограничения $\Lambda_f \subset (0, +\infty)$ давно решена [1; гл. 4, § 1]:

$$\inf\{\sigma_\rho(f) \mid D_\rho(f) = 1\} = (e\rho)^{-1} \quad \text{для всех } \rho > 0. \quad (4)$$

Тем самым, справедлива неувлучшаемая на классе всех функций нормального типа при порядке ρ оценка снизу типа функции через верхнюю ρ -плотность ее корней:

$$\sigma_\rho(f) \geq (e\rho)^{-1} D_\rho(f).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326).

Если же все корни целой функции f вещественны и положительны (или лежат на каком-либо одном луче), то верна неулущаемая оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq C(\rho)D_\rho(f).$$

Поэтому важно узнать, чему равна функция $C(\rho)$, и исследовать ее поведение. Из (3) и (4) видно, что $C(\rho) \geq (e\rho)^{-1}$ для всех $\rho > 0$.

При $0 < \rho < 1$ функция $C(\rho)$ найдена автором [2]. Она имеет простой вид, хотя и не является элементарной:

$$C(\rho) = \max\{t^{-\rho} \ln(1+t) \mid t > 0\}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (5)$$

Из (5) следует, что $C(\rho)$ при $0 < \rho < 1$ не меньше значения функции $t^{-\rho} \ln(1+t)$ в точке $t_\rho = \exp(1/\rho)$, т.е. $C(\rho) \geq e^{-1} \ln(1 + \exp(1/\rho)) > (e\rho)^{-1}$, $0 < \rho < 1$. В [2] доказано также, что

$$C(\rho) = \frac{1}{e\rho} + O\left(\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad \rho \rightarrow 0+, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1-0} C(\rho) = 1,$$

$C(\rho)$ убывает на интервале $(0, 1/\ln 4)$, возрастает на интервале $(1/\ln 4, 1)$, $C(1/\ln 4) = \ln 2$. Таким образом, функция $C(\rho)$ весьма близка к экстремуму в задаче без ограничений на расположение корней только в малой правой полуокрестности нуля, но с увеличением ρ все более удаляется от величины (4). Эта тенденция продолжается и при $\rho > 1$.

Из теоремы Линделёфа о типе целой функции целого порядка [1; гл. 1, § 11] следует, что если $\rho \in \mathbb{N}$, $0 < D_\rho(f) < +\infty$, а все корни функции f , кроме, может быть, конечного числа, лежат в некотором угле раствора, меньшего π/ρ , то ее тип при порядке ρ бесконечен. Тем более, это верно для функций, корни которых лежат на одном луче. Поэтому в натуральных точках функция $C(\rho)$ равна $+\infty$, и поставленная задача интересна только при $\rho \notin \mathbb{N}$.

Основной результат работы состоит в том, что на луче $\rho > 1$ функция $C(\rho)$ ограничена и отделена от нуля:

$$2^{-\rho/2} \leq C(\rho) \leq 2^{1-\rho} \left(1 + \max_{r \geq 2} \frac{\ln(r-1)}{r}\right) < 1.28 \cdot 2^{1-\rho}, \quad 1 < \rho < 2, \quad (6)$$

$$C(\rho) < \frac{2^{2-\rho}}{\rho}, \quad \frac{3}{2} < \rho < 2. \quad (7)$$

$$0.47 < \operatorname{ci}\left(\frac{\pi}{2}\right) < C(\rho) < 1, \quad \rho > 2, \quad \text{где} \quad \operatorname{ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt. \quad (8)$$

К сожалению, в явном виде, подобном (5), $C(\rho)$ при $\rho > 1$ найти не удалось. Тем не менее, из (7) и оценки снизу в (6) следует предельное соотношение $\lim_{\rho \rightarrow 2-0} C(\rho) = 1/2$.

Для более детальной формулировки результатов введем ряд обозначений. Положим

$$E_p(w) = (1-w) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{w^k}{k}\right), \quad p \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{F}_p(r, \varphi) = \ln |E_p(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2} \ln(r^2 - 2r \cos \varphi + 1) + \sum_{k=1}^p \frac{r^k \cos k\varphi}{k}, \quad (9)$$

$$\mathcal{M}_p(r) = \max\{\mathcal{F}_p(r, \varphi) \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi\}.$$

При $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $r = 1$, $0 < \varphi < 2\pi$ имеет место разложение в ряд

$$\mathcal{F}_p(r, \varphi) = - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k \cos k\varphi}{k}. \quad (10)$$

Свойства максимума $\mathcal{M}_p(r)$ исследовал Данжуа [3]. В частности, он доказал равенства

$$\mathcal{M}_p(1) = \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right), \quad \mathcal{M}_p(r) = \mathcal{F}_p(r, 0), \quad r \geq 1 + \frac{1}{p}, \quad (11)$$

и вывел интегральное представление

$$\mathcal{M}_p(r) = \int_0^r t^p \frac{\sin(p\alpha(t))}{\sin \alpha(t)} dt, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad (12)$$

$\alpha(t)$ – наименьший положительный корень уравнения $t \sin(p\alpha) = \sin((p+1)\alpha)$.

Обозначим также

$$\begin{aligned} a_\rho(r) &= r^{-\rho} \mathcal{F}_p\left(r, \frac{\pi}{2p+1}\right), \quad A(\rho) = \max\{a_\rho(r) \mid 1 \leq r \leq 4\}, \\ b_\rho(r) &= r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r), \quad B(\rho) = \max\left\{b_\rho(r) \mid 1 + \frac{1}{p} \leq r \leq 5\right\}, \quad \rho > 1, \quad p = [\rho]. \end{aligned} \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 1. Для типа при порядке $\rho \in \mathbb{Z}$ любой целой функции, верхняя ρ -плотность корней которой конечна, а аргументы корней стремятся к нулю, верны оценки снизу

$$\sigma_\rho(f) \geq 2^{-\rho/2} D_\rho(f), \quad 1 < \rho < 2, \quad \sigma_\rho(f) \geq A(\rho) D_\rho(f), \quad 2 < \rho.$$

ТЕОРЕМА 2. Справедлива оценка сверху $C(\rho) \leq B(\rho)$ для всех $\rho \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.

2. Доказательство теоремы 1. Сперва заметим, что при любом $\varphi \in [\pi/(2p+2), \pi/2p]$ функция $\mathcal{F}_p(r, \varphi)$ положительна и возрастает на луче $0 < r < +\infty$. Действительно, из (9) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_p(r, \varphi)}{\partial r} &= \frac{r - \cos \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} + \sum_{k=1}^p r^{k-1} \cos k\varphi = \frac{r - \cos \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} + \frac{1}{r} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^p (re^{i\varphi})^k \\ &= \frac{r - \cos \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} + \operatorname{Re} \left(e^{i\varphi} \frac{r^p e^{ip\varphi} - 1}{re^{i\varphi} - 1} \right) = r^p \frac{r \cos p\varphi - \cos(p+1)\varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $\varphi \in [\pi/(2p+2), \pi/2p]$, $r > 0$, оба слагаемых $r \cos(p\varphi)$, $-\cos((p+1)\varphi)$ в числителе последней дроби неотрицательны и одновременно в нуль не обращаются; $\mathcal{F}_p(0, \varphi) = 0$. Поэтому верны неравенства

$$\frac{\partial \mathcal{F}_p(r, \varphi)}{\partial r} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_p(r, \varphi) > 0 \quad \text{для всех } r > 0, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2p+2}, \frac{\pi}{2p} \right]. \quad (15)$$

Если порядок целой функции f равен ρ , $p = [\rho]$, то она представима в виде

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad (16)$$

где $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность всех корней $f(z)$, отличных от точки $z = 0$, g – многочлен, $\deg g \leq p$, $m = 0$ в случае $f(0) \neq 0$, а если $f(0) = 0$, то m – кратность корня $z = 0$. Рассмотрим последовательность функций

$$f_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right) \quad (17)$$

и оценим снизу величину

$$h_N = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left(R^{-\rho} \ln \left| f_N \left(R \exp \left(\frac{\pi i}{2p+1} \right) \right) \right| \right). \quad (18)$$

Из (1), (16)–(18) и неравенства $p < \rho$ следуют соотношения

$$h_N \leq \sigma_\rho(f_N) = \sigma_\rho(f) \quad \text{для всех } N \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Ввиду (9) и (17) имеем

$$\ln |f_N(R e^{i\varphi})| = \sum_{n=N}^{\infty} \ln \left| E_p \left(\frac{R e^{i\varphi}}{\lambda_n} \right) \right| = \sum_{n=N}^{\infty} \mathcal{F}_p \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \varphi - \arg \lambda_n \right). \quad (20)$$

Обозначим

$$\varepsilon_n = \max_{k \geq n} |\arg \lambda_k|, \quad I_{p,n} = \left[\frac{\pi}{2p+1} - \varepsilon_n, \frac{\pi}{2p+1} + \varepsilon_n \right].$$

По условию теоремы $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg \lambda_n = 0$, а значит, существует такое число N_0 , что при любом $n > N_0$ выполняется двойное неравенство $\pi/(2p+2) < \pi/(2p+1) - \arg \lambda_n < \pi/(2p)$. Отсюда из (15) заключаем, что при $\varphi = \pi/(2p+1)$ все слагаемые в сумме (20) положительны, а значит, сумма не увеличится от отбрасывания остатка ряда. Поэтому, обозначив r_ρ точку, в которой функция $a_\rho(r)$ достигает своего максимума на отрезке $1 \leq r \leq 4$, при любом $N > N_0$ находим

$$\begin{aligned} \ln \left| f_N \left(R \exp \left(\frac{\pi i}{2p+1} \right) \right) \right| &> \sum_{N \leq n, |\lambda_n| \leq R/r_\rho} \mathcal{F}_p \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{2p+1} - \arg \lambda_n \right) \\ &\geq \sum_{N \leq n, |\lambda_n| \leq R/r_\rho} \min \left\{ \mathcal{F}_p \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \varphi \right) \mid \varphi \in I_{p,N} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно убедиться в том, что если $G(x, y)$ – действительнoзначная функция, определенная в полуполосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < +\infty, a \leq y \leq b\}$, возрастающая по переменной x при любом $y \in [a, b]$ и непрерывная на отрезке $a \leq y \leq b$ при любом $x > 0$, то функция $\tilde{G}(x) = \min\{G(x, y) \mid a \leq y \leq b\}$ также возрастает на луче $0 < x < +\infty$. Ввиду (15) $\mathcal{F}_p(r, \varphi)$ возрастает по r при любом $\varphi \in I_{p,N} \subset [\pi/(2p+2), \pi/(2p)]$; следовательно, функция $\widetilde{\mathcal{F}}_p(r) = \min\{\mathcal{F}_p(r, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\}$ обладает тем же

свойством. Поэтому все слагаемые в сумме (21) не меньше $\min\{\mathcal{F}_p(r_\rho, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\}$, а их количество равно $n_f(R/r_\rho) - N + 1$. Все эти соображения приводят к оценке

$$\ln \left| f_N \left(R \exp \left(\frac{\pi i}{2p+1} \right) \right) \right| > \left(n_f \left(\frac{R}{r_p} \right) - N \right) \min\{\mathcal{F}_p(r_\rho, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\}. \quad (22)$$

Из (18) и (22) при любом $N \in \mathbb{N}$ находим

$$\begin{aligned} h_N &\geq \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_f(R/r_\rho) - N}{R^\rho} \min\{\mathcal{F}_p(r_\rho, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\} \right) \\ &= \min\{\mathcal{F}_p(r_\rho, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\} \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{n_f(R/r_\rho)}{R^\rho} \\ &= r_\rho^{-\rho} D_\rho(f) \min\{\mathcal{F}_p(r, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\}. \end{aligned}$$

А так как $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0$, функция $\mathcal{F}(r, \varphi)$ непрерывна всюду, кроме точки $r = 1, \varphi = 0$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \min\{\mathcal{F}_p(r_\rho, \varphi) \mid \varphi \in I_{p,N}\} = \mathcal{F}_p \left(r_\rho, \frac{\pi}{2p+1} \right).$$

Следовательно,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} h_N \geq a_\rho(r_\rho) D_\rho(f).$$

Это соотношение вместе с (19) доказывает второе неравенство теоремы.

Докажем первое неравенство теоремы. Рассуждая аналогично, при любом $N \in \mathbb{N}$ получим равенства

$$\ln |f_N(Re^{\pi i/4})| = \sum_{n=N}^{\infty} \mathcal{F}_1 \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4} - \arg \lambda_n \right). \quad (23)$$

В сумме (23) могут присутствовать отрицательные слагаемые (в случае $\arg \lambda_n > 0$). Тем не менее, покажем, что если выбрать N_0 из условия $\varepsilon_n < \pi/180$ (для всех $n > N_0$), то

$$\mathcal{F}_1 \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4} - \arg \lambda_n \right) > 0, \quad |\lambda_n| \leq \frac{R}{4 \sin(2\varepsilon_N)}, \quad n \geq N > N_0, \quad (24)$$

а сумма отрицательных слагаемых в (23) не превосходит $3(2-\rho)^{-1} \varepsilon_N D_\rho(f) R^\rho$.

Если это сделать, то доказательство завершается так. Имеем

$$\ln |f_N(Re^{\pi i/4})| \geq \sum_{N \leq n, |\lambda_n| \leq R/\sqrt{2}} \mathcal{F}_1 \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4} - \arg \lambda_n \right) - 3(2-\rho)^{-1} \varepsilon_N D_\rho(f) R^\rho. \quad (25)$$

Из (14) видно, что функция $\mathcal{F}_1(r, \varphi)$ возрастает на луче $1 < r < +\infty$ при любом $\varphi \in [0, \pi/2]$, а значит, и $\min\{\mathcal{F}_1(r, \varphi) \mid \varphi \in I_N\}$, $I_N = [\pi/4 - \varepsilon_N, \pi/4 + \varepsilon_N]$ обладает тем же свойством. Поэтому все числа

$$\mathcal{F}_1 \left(\frac{R}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4} - \arg \lambda_n \right), \quad N \leq n, \quad |\lambda_n| \leq \frac{R}{\sqrt{2}},$$

не меньше $\min\{\mathcal{F}_1(\sqrt{2}, \varphi) \mid \varphi \in I_N\}$, и мы приходим к оценке

$$\ln |f_N(Re^{\pi i/4})| > \left(n_f \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right) - N \right) \min\{\mathcal{F}_1(\sqrt{2}, \varphi) \mid \varphi \in I_N\} - 3(2 - \rho)^{-1} \varepsilon_N D_\rho(f) R^\rho. \quad (26)$$

Разделив обе части (26) на R^ρ и перейдя к верхнему пределу при $R \rightarrow +\infty$, получим

$$\begin{aligned} h_N &= \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f_N(Re^{\pi i/4})|}{R^\rho} \geq \frac{-3\varepsilon_N D_\rho(f)}{2 - \rho} \\ &\quad + \min\{\mathcal{F}_1(\sqrt{2}, \varphi) \mid \varphi \in I_N\} \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{n_f(R/\sqrt{2}) - N}{R^\rho} \\ &= \frac{-3\varepsilon_N D_\rho(f)}{2 - \rho} + 2^{-\rho/2} D_\rho(f) \min\{\mathcal{F}_1(\sqrt{2}, \varphi) \mid \varphi \in I_N\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Ввиду соотношений (19) и того, что правая часть (27) имеет предел при $N \rightarrow \infty$, взяв от обеих частей (27) нижний предел, выводим требуемую оценку

$$\sigma_\rho(f) \geq 2^{-\rho/2} D_\rho(f) \mathcal{F}_1\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 2^{-\rho/2} D_\rho(f).$$

Таким образом, осталось доказать неравенство (24) и оценить сверху сумму отрицательных слагаемых в (23). Неравенство (24) следует из такого неравенства:

$$\mathcal{F}_1(r, \varphi) > 0 \quad \text{при} \quad r \geq 4 \sin 2\theta, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} + \theta \right], \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{180}.$$

Данное неравенство в свою очередь вытекает из следующих:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\left(4 \sin 2\alpha, \frac{\pi}{4} - \alpha\right) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{180}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial r}\left(r, \frac{\pi}{4} - \alpha\right) &> 0 \quad \text{при} \quad r \geq 4 \sin 2\alpha, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{180}. \end{aligned} \quad (28)$$

(Если $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$, $r > 0$, то функция $\mathcal{F}_1(r, \varphi)$ положительна.) Докажем (28). Поскольку

$$\left| \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{r^k}{k} \right) \cos k\varphi \right| \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{r^k}{k} < \frac{1}{4} \sum_{k=4}^{\infty} r^k = \frac{r^4}{4} (1 - r)^{-1}, \quad 0 < r < 1,$$

тождество (10) дает оценку снизу

$$\mathcal{F}_1(r, \varphi) > -\frac{r^2}{2} \cos 2\varphi - \frac{r^3}{3} \cos 3\varphi - \frac{r^4}{4} (1 - r)^{-1}.$$

Ввиду ограничения на α при $\varphi = \pi/4 - \alpha$ имеем $\cos 3\varphi < -1/2$. Следовательно,

$$r^{-2} \mathcal{F}_1\left(r, \frac{\pi}{4} - \alpha\right) > -\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{r}{6} - \frac{r^2}{4(1 - r)}.$$

Отсюда при $r = 4 \sin 2\alpha$ (тогда $r \leq 8\alpha \leq 2\pi/45 < 1/7$) находим

$$2r^{-3} \mathcal{F}_1\left(r, \frac{\pi}{4} - \alpha\right) > \frac{1}{12} - \frac{r}{2(1 - r)} > \frac{1}{12} - \frac{1/7}{2(1 - 1/7)} = 0.$$

Далее, согласно (14) имеем $\operatorname{sgn}(\partial \mathcal{F}_1(r, \varphi)/\partial r) = \operatorname{sgn}(r \cos \varphi - \cos 2\varphi)$. Отсюда при $\varphi = \pi/4 - \alpha$, $0 < \alpha \leq \pi/180$, $r > 2 \sin \alpha$ находим

$$r \cos \varphi - \cos 2\varphi > \frac{r}{2} - \cos 2\varphi = \frac{r}{2} - \sin 2\alpha > 0.$$

Неравенства (28), а вместе с ними и (24), доказаны.

Перейдем к оценке суммы отрицательных слагаемых в (23). Поскольку $\mathcal{F}_1(r, \varphi) = -(r^2/2) \cos(2\varphi) + \mathcal{F}_2(r, \varphi)$, а функция $\mathcal{F}_2(r, \varphi)$ положительна при любом $r > 0$, $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4$, то в интересующей нас области изменения φ верна оценка снизу

$$\mathcal{F}_1(r, \varphi) \geq -\frac{r^2}{2} \cos(2\varphi) \geq -\frac{r^2}{2} \sin(2\varepsilon_N) > -\varepsilon_N r^2.$$

Следовательно, искомая сумма по абсолютной величине при всех достаточно больших N не превосходит

$$\begin{aligned} \varepsilon_N \sum_{|\lambda_n| > R/(4 \sin(2\varepsilon_N))} \left(\frac{R}{|\lambda_n|} \right)^2 &= \varepsilon_N R^2 \int_{R/(4 \sin(2\varepsilon_N))}^{+\infty} t^{-2} dn_f(t) \\ &< \varepsilon_N R^2 \int_{R/(8\varepsilon_N)}^{+\infty} t^{-2} dn_f(t) < 2\varepsilon_N R^2 \int_{R/(8\varepsilon_N)}^{+\infty} t^{-3} n_f(t) dt \\ &< 3\varepsilon_N R^2 \int_{R/(8\varepsilon_N)}^{+\infty} D_\rho(f) t^{\rho-3} dt \\ &< 3\varepsilon_N D_\rho(f) R^2 \int_R^{+\infty} t^{\rho-3} dt = 3\varepsilon_N (2-\rho)^{-1} D_\rho(f) R^\rho, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать (выше использовалось, что при всех достаточно больших t верно неравенство¹ $n_f(t) < (3/2)t^\rho D_\rho(f)$, а также $\varepsilon_N < 1/8$). Теорема 1 полностью доказана.

Как видно из доказательства теоремы, можно получить неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq D_\rho(f) \sup \left\{ r^{-\rho} \mathcal{F}_p \left(r, \frac{\pi}{2p+1} \right) \mid r > 0 \right\},$$

а в определении $A(\rho)$ бралась не точная верхняя грань по всем $r > 0$, а максимум по $r \in [1, 4]$. Это было сделано не случайно; ниже в лемме 4 доказано, что значения функции $a_\rho(r)$ на множестве $(0, 1) \cup (4, +\infty)$ меньше $A(\rho)$. Таким образом, если вместо точки r_ρ брать в доказательстве теоремы другие значения r , улучшения оценки $\sigma_\rho(f) \geq A(\rho) D_\rho(f)$ получить нельзя.

3. Численные оценки функции $C(\rho)$ и другие неравенства.

ЛЕММА 1. При любом $p \in \mathbb{N}$ все функции $r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r)$, $p < \rho < p+1$, возрастают на отрезке $0 \leq r \leq 1 + 1/p$ и меньше 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $p = 1$ тривиален: $M_1(r) = r^2/2$ при $0 \leq r \leq 2$. Далее $p \geq 2$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_p(r) = r^{-p-1} \mathcal{M}_p(r)$$

¹Здесь предполагается, что $D_\rho(f) > 0$. В случае $D_\rho(f) = 0$ утверждение теоремы очевидно.

и докажем ее возрастание на отрезке $0 \leq r \leq 1 + 1/p$. Считаем, что

$$\Phi_p(0) = \lim_{r \rightarrow 0+} \Phi_p(r) = \frac{1}{p+1}.$$

Это предельное соотношение следует из разложения (10).

Согласно (12) имеем

$$\Phi_p(r) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^p \frac{\sin p\alpha(t)}{\sin \alpha(t)} d\left(\frac{t}{r}\right) = \int_0^1 u^p \frac{\sin p\alpha(ru)}{\sin \alpha(ru)} du, \quad 0 < r \leq 1 + \frac{1}{p}. \quad (29)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\alpha(t)$ убывает на интервале $0 < t < 1 + 1/p$. Следовательно, $\alpha(ru)$ убывает по r на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ при любом фиксированном $u \in (0, 1]$. Функция $\sin(p\alpha)/\sin \alpha$, $p \in \mathbb{N}$, $p \leq 2$, убывает на интервале $0 < \alpha < \pi/p$, а область значений $\alpha(t)$ на множестве $0 < t < 1 + 1/p$ есть интервал $(0, \pi/(p+1)) \subset (0, \pi/p)$. Поэтому отношение $\omega(r, u) = \sin(p\alpha(ru))/\sin(\alpha(ru))$ является композицией двух убывающих функций и возрастает по $r \in (0, 1 + 1/p)$ при любом $u \in (0, 1)$. Отсюда заключаем, что интеграл

$$\Phi_p(r) = \int_0^1 u^p \omega(r, u) du$$

возрастает на интервале $0 < r < 1 + 1/p$, а это вместе с непрерывностью функции $\Phi_p(r)$ на отрезке $0 \leq r \leq 1 + 1/p$ доказывает требуемое. Поскольку функции $r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r)$, $p < \rho < p+1$, получаются умножением $\Phi_p(r)$ на положительные степени r , то и они возрастают на отрезке $[0, 1 + 1/p]$.

Выведем оценку сверху $r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r)$. Из неравенства $\sin(p\alpha)/\sin \alpha < p$, верного при $p > 1$, $0 < \alpha < \pi/p$, и (29) находим

$$\Phi_p(r) < p \int_0^1 u^p du = \frac{p}{p+1}, \quad 0 < r \leq 1 + \frac{1}{p}. \quad (30)$$

Из (30) следуют неравенства

$$r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r) = r^{p+1-\rho} \Phi_p(r) < r^{p+1-\rho} \frac{p}{p+1}, \quad 0 < r \leq 1 + \frac{1}{p}. \quad (31)$$

Таким образом, при $0 < r \leq 1$ имеем $r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r) < r^{p+1-\rho} < 1$, а при $1 < r \leq 1 + 1/p$ $r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r) < rp/(p+1) \leq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Верны неравенства

$$\mathcal{M}_p(r) \leq r^p + \ln(r-1) + \ln p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad r \geq 1 + \frac{1}{p}, \quad (32)$$

$$\mathcal{M}_p(r) < r^p + \ln(r-1) + \ln(p-1), \quad p \geq 4, \quad r \geq 1 + \frac{1}{p}, \quad (33)$$

$$\mathcal{M}_p(r) < \frac{2r^p}{p}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad r \geq 3. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ в (32) имеет место равенство, а неравенство (34) очевидно:

$$M_1(r) = r + \ln(r-1) < r + r - 1 < 2r \quad \text{для всех } r \geq 2.$$

Далее $p \geq 2$.

Из (9) и (11) при $r \geq 1 + 1/p$ находим

$$\mathcal{M}_p(r) - \ln(r-1) = \sum_{k=1}^p \frac{r^k}{k} = \sum_{k=2}^p \frac{1}{k} + 1 + \sum_{k=1}^p \frac{r^k - 1}{k}. \quad (35)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$\sum_{k=2}^p \frac{1}{k} < \ln p \quad p \geq 2, \quad \frac{r^k - 1}{k} \leq (r-1)r^{k-1} \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 1. \quad (36)$$

Из (35) и (36) получаем оценку

$$\mathcal{M}_p(r) - \ln(r-1) < 1 + \ln p + (r-1) \sum_{k=1}^p r^{k-1} = \ln p + r^p.$$

Неравенство (32) доказано. Если при $p \geq 4$ использовать более точную, чем в (35), оценку $\sum_{k=2}^p 1/k < \ln(p-1)$, то получится неравенство (33).

При $p = 2$ неравенство (34) сразу следует из оценок $\ln(r-1) \leq r-2 < r^2/6$, $r \leq r^2/3$ при $r \geq 3$. При $p \geq 3$ воспользуемся уже доказанным неравенством $\ln(r-1) + r + r^2/2 < r^2$ и получим, что требуется вывести соотношение

$$r^2 + \sum_{k=3}^p \frac{r^k}{k} \leq \frac{2r^p}{p}.$$

В сумме $\sum_{k=3}^p r^k/k$ каждое последнее слагаемое при $r \geq 3$ превосходит предыдущее более, чем в 2 раза, и к этой сумме еще добавляется r^2 , что не больше минимального слагаемого $r^3/3$. Поэтому вся сумма не превосходит удвоенного максимального слагаемого, что и требовалось доказать. Лемма 2 полностью доказана.

ЛЕММА 3. *Последовательность $\mathcal{M}_p(1) = \mathcal{F}_p(1, \pi/(2p+1))$ убывает и имеет предел, равный $\text{ci}(\pi/2) = -\int_0^{\pi/2} \cos t/t \, dt = 0.472\dots$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (9) имеем

$$\mathcal{F}_p(1, \varphi) = \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| + \sum_{k=1}^p \frac{\cos k\varphi}{k}, \quad 0 < |\varphi| \leq \pi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p(1) - \mathcal{M}_{p-1}(1) &= \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) - \mathcal{F}_{p-1}\left(1, \frac{\pi}{2p-1}\right) \\ &= \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + \ln\left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)\right) - \ln\left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4p-2}\right)\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\cos(\pi k/(2p+1)) - \cos(\pi k/(2p-1))}{k} \\ &= \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4p-2}\right)\right) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{4p^2-1}\right) \sin\left(\frac{2\pi k p}{4p^2-1}\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Для оценки сверху разности логарифмов синусов воспользуемся следующим неравенством. Если $g \in C[a, b] \cap C^3(a, b)$, $g'''(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то

$$g(a) - g(b) < (a - b)g'\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (38)$$

Чтобы убедиться в его справедливости, положим $x_0 = (a + b)/2$, $h = (a - b)/2$. Согласно формуле Тейлора существуют точки $\xi_a \in (a, x_0)$, $\xi_b \in (x_0, b)$ такие, что

$$\begin{aligned} g(a) &= g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + \frac{h^2}{2}g''(x_0) + \frac{h^3}{6}g'''(\xi_a), \\ g(b) &= g(x_0 - h) = g(x_0) - hg'(x_0) + \frac{h^2}{2}g''(x_0) - \frac{h^3}{6}g'''(\xi_b). \end{aligned}$$

Вычтя второе равенство из первого, получим

$$g(a) - g(b) = 2hg'(x_0) + \frac{h^3}{6}(g'''(\xi_a) + g'''(\xi_b)). \quad (39)$$

Ввиду положительности третьей производной и отрицательности h из (39) выведем (38).

Положим

$$g(x) = \ln \sin x, \quad a = \frac{\pi}{4p+2}, \quad b = \frac{\pi}{4p-2}.$$

Имеем

$$g'(x) = \operatorname{ctg} x, \quad g'''(x) = 2 \operatorname{ctg} x (1 + \operatorname{ctg}^2 x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Согласно (38) находим

$$\ln \sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right) - \ln \sin\left(\frac{\pi}{4p-2}\right) < -\frac{\pi}{4p^2-1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right). \quad (40)$$

Для оценки сверху суммы в (37) применим неравенство $\sin kx \leq k \sin x$, $k \geq 1$, $0 \leq x \leq \pi/k$. В соответствии с этим

$$\frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{4p^2-1}\right) \leq \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right), \quad 1 \leq k \leq p. \quad (41)$$

Соотношения (37), (40), (41) дают

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p(1) - M_{p-1}(1) &< \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \overline{D}_{p-1}\left(\frac{2\pi p}{4p^2-1}\right) \\ &\quad - \frac{\pi}{4p^2-1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\overline{D}_{p-1}(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \sin kx = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos(p-1/2)x}{2 \sin(x/2)}.$$

Отсюда и из (42) получаем оценки

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_p(1) - M_{p-1}(1) &< \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) \\
 &\quad - \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) - \left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) \left[\frac{1}{p} - \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) \right] \\
 &\quad + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) - \left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\mathcal{M}_p(1) - M_{p-1}(1) < \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) \left[\frac{1}{p} - \frac{\sin \beta}{\sin(p\beta)} \right] + \operatorname{ctg}(p\beta) [\sin \beta - \beta], \quad (43)$$

где $\beta = \beta(p) = \pi/(4p^2 - 1)$. Оба слагаемых в правой части (43) отрицательны, поэтому $\mathcal{M}_p(1) < M_{p-1}(1)$. Убывание последовательности

$$\mathcal{M}_p(1) = \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right)$$

доказано. Вычислим ее предел.

Имеем

$$\frac{d\mathcal{F}_p(1, \varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| + \sum_{k=1}^p \frac{\cos k\varphi}{k} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \sum_{k=1}^p \sin k\varphi = \frac{\cos(p+1/2)\varphi}{2 \sin(\varphi/2)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) - \mathcal{F}_p(1, \pi) = - \int_{\pi/(2p+1)}^{\pi} \frac{\cos(p+1/2)\varphi}{2 \sin(\varphi/2)} d\varphi.$$

Рассмотрим функцию $g_1(\varphi) = 1/\varphi - (1/2) \operatorname{cosec}(\varphi/2)$, $0 < \varphi \leq \pi$, $g_1(0) = 0$. Функция g_1 непрерывна и монотонна на $[0, \pi]$, а это влечет за собой асимптотическую оценку

$$\int_{\pi/(2p+1)}^{\pi} g_1(\varphi) \cos(p+1/2)\varphi d\varphi = O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) = - \int_{\pi/(2p+1)}^{\pi} \frac{\cos(p+1/2)\varphi}{\varphi} d\varphi + \mathcal{F}_p(1, \pi) + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty.$$

Сделав в интеграле замену переменной $(p+1/2)\varphi = t$ и воспользовавшись равенством

$$\mathcal{F}_p(1, \pi) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = O\left(\frac{1}{p}\right),$$

получим

$$\mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) = - \int_{\pi/2}^{\pi(p+1/2)} \frac{\cos t}{t} dt + O\left(\frac{1}{p}\right) = \operatorname{ci}\left(\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow +\infty.$$

Лемма 3 полностью доказана.

ЛЕММА 4. При любых $p \in \mathbb{N}$, $\rho \in (p, p+1)$ значения функций $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ вне отрезков $[1, 4]$ и $[1 + 1/p, 5]$ соответственно меньше их максимумов на этих отрезках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Значения функций $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ в точке $r = 1$ совпадают (см. (11), (13)). С другой стороны, $a_\rho(r) \leq b_\rho(r)$ при $r > 0$ и функция $b_\rho(r)$ по лемме 1 возрастает на $[0, 1 + 1/p]$. Поэтому

$$a_\rho(r) \leq b_\rho(r) < b_\rho(1) = a_\rho(1) \leq A(\rho) \leq B(\rho) \quad \text{при } r \in (0, 1).$$

При $r \geq 3$, $p \geq 5$ по лемме 2

$$a_\rho(r) \leq b_\rho(r) < r^{-p} \mathcal{M}_p(r) \leq \frac{2}{p} \leq 0.4,$$

а по лемме 3 имеем $B(\rho) \geq A(\rho) \geq a_\rho(1) > \operatorname{ci}(\pi/2) > 0.47$. Таким образом, утверждение леммы доказано при всех $p \geq 5$. При $1 \leq p \leq 4$ доказательство леммы завершается так. Непосредственно проверяется убывание функций $r^{-p} \mathcal{F}_p(r, \pi/(2p+1))$, $1 \leq p \leq 4$, на луче $[4, +\infty)$ и $r^{-p} \mathcal{M}_p(r) = r^{-p} \mathcal{F}_p(r, 0)$ на луче $[5, +\infty)$. Доказательство убывания этих восьми функций – простое упражнение по математическому анализу, оно здесь не приводится. Поскольку функции $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ получаются из $a_p(r)$ и $b_p(r)$ умножением на отрицательную степень r , то и они убывают на лучах $[4, +\infty)$ и $[5, +\infty)$ соответственно, а значит, значения $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ на лучах $[4, +\infty)$ и $[5, +\infty)$ меньше максимумов этих функций на отрезках $[1, 4]$ и $[1 + 1/p, 5]$ соответственно. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Выполнено равенство $B(\rho) = \max\{b_\rho(r) \mid r > 0\}$.

ЛЕММА 5. При любых $\rho > 2$, $\rho \in \mathbb{N}$, $r > 0$ верно неравенство $b_\rho(r) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 < r \leq 1 + 1/p$ неравенство доказано в лемме 1. Докажем неравенство

$$\mathcal{M}_p(r) \leq r^p, \quad 1 + \frac{1}{p} < r < +\infty. \quad (44)$$

В силу (11) оно равносильно следующему:

$$g(r) \equiv \ln(r-1) + \sum_{k=1}^p \frac{r^k}{k} - r^p \leq 0. \quad (45)$$

Имеем

$$g'(r) = r^{p-1} \left(\frac{r}{r-1} - p \right).$$

Следовательно, функция g убывает на луче $(1 + 1/(p-1), +\infty)$. Это означает, что

$$\max \left\{ g(r) \mid r \geq 1 + \frac{1}{p} \right\} = g\left(1 + \frac{1}{p-1}\right),$$

и неравенство (45) достаточно доказать только в одной точке $r = 1 + 1/(p-1)$. При $p \geq 4$ оно следует из (33), а при $p = 3$ и $p = 2$ (в последнем случае достигается равенство) проверяется непосредственно. Из (44) при $r > 1 + 1/p$, $p < \rho < p + 1$ находим

$$b_\rho(r) = r^{-\rho} \mathcal{M}_p(r) < r^{-p} \mathcal{M}_p(r) \leq 1.$$

Лемма доказана.

Теперь на основании лемм этого пункта и теорем 1, 2 докажем неравенства (6)–(8). Двойное неравенство (8) немедленно следует из лемм 3, 5 и теорем 1, 2. Для доказательств (7) в свете теоремы 2 достаточно проверить, что

$$r + \ln(r-1) < \frac{2^{2-\rho} r^\rho}{\rho} \quad \text{для всех } r \geq 2, \quad \rho \in (1, 2). \quad (46)$$

Действительно, из (46) сразу же видно, что $B(\rho) < 2^{2-\rho}/\rho$, $1 < \rho < 2$, а по теореме 2 имеем $C(\rho) \leq B(\rho)$. При $r = 2$ неравенство (46) выполняется. Осталось доказать, что производная по r левой части (46) меньше производной правой части при всех $r > 2$, т.е.

$$1 + \frac{1}{r-1} < 2^{2-\rho} r^{\rho-1} = 2 \left(\frac{r}{2} \right)^{\rho-1}.$$

Это верно, и требуемое неравенство доказано.

Оценка снизу в (6) доказана в теореме 1. Оценка сверху в (6) следует из теоремы 2 и неравенств

$$\frac{r + \ln(r-1)}{r^\rho} = r^{1-\rho} \left(1 + \frac{\ln(r-1)}{r} \right) \leq 2^{1-\rho} \left(1 + \max_{r \geq 2} \left(\frac{\ln(r-1)}{r} \right) \right), \quad r \geq 2.$$

Оценки (6)–(8) доказаны.

4. Доказательство теоремы 2. Построим целую функцию конечного положительного порядка $\rho \in \mathbb{N}$, верхняя ρ -плотность корней которой равна произвольному заданному числу $d > 0$, а тип при порядке ρ не выше $B(\rho)$. Тогда по определению величины $C(\rho)$ получим неравенство $C(\rho) \leq B(\rho)$, и теорема будет доказана.

Образует последовательность $\{R_k\}$ по правилу

$$R_1 = 3, \quad R_{k+1} = R_k^4 \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

На отрезках $[R_k, R_k + 1]$ расположим $[dR_k^\rho]$ различных чисел произвольным образом. Они и составят последовательность $\{\mu_n\}$ корней искомой целой функции $F(z)$ (корни нумеруем в порядке возрастания). Положим

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p \left(\frac{z}{\mu_n} \right), \quad p = [\rho].$$

Докажем, что $D_\rho(F) = d$, $\sigma_\rho(F) \leq dB(\rho)$. Из оценки $N_F(R_n + 1) > dR_n^\rho$, $n \geq 2$, сразу же видно, что $D_\rho(F) \geq d$. Противоположное неравенство следует из оценок

$$\frac{N_F(R)}{R^\rho} \leq \frac{O(R_{n-1}^\rho) + dR_n^\rho}{R^\rho} \leq \frac{O(R_{n-1}^\rho) + dR_n^\rho}{R_n^\rho} = d + o(1), \quad R_n \leq R < R_{n+1}.$$

Оценим сверху тип функции F при порядке ρ . Имеем

$$\ln \left(\max_{|z| \leq R} |F(z)| \right) = \max_{|z| \leq R} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| E_p \left(\frac{z}{\mu_n} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{\mu_n} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} dR_k^{\rho} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{R_k} \right).$$

Вспомнив обозначение (13), получаем неравенство

$$R^{-\rho} \ln \left(\max_{|z| \leq R} |F(z)| \right) \leq d \sum_{k=1}^{\infty} b_{\rho} \left(\frac{R}{R_k} \right). \quad (47)$$

Осталось вывести для функции $X(R) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\rho}(R/R_k)$ асимптотическую оценку

$$X(R) \leq B(\rho) + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Идея вывода основана на том, что ввиду быстрого роста последовательности $\{R_k\}$ при любом достаточно большом значении R сумма всех слагаемых ряда, кроме одного, уходит в остаточный член. Обозначим $\Delta_m = [\sqrt{R_m}, \sqrt{R_{m+1}}]$. Имеем

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} X(R) = \limsup_{m \rightarrow \infty} X_m, \quad \text{где } X_m = \max\{X(R) \mid R \in \Delta_m\}. \quad (48)$$

Согласно леммам 1 и 2 (см. (31) и (34)) верны неравенства

$$b_{\rho}(r) < r^{1-\{\rho\}}, \quad 0 < r < 1, \quad b_{\rho}(r) < 2r^{-\{\rho\}}, \quad r \geq 3, \quad \{\rho\} = \rho - p.$$

Поэтому

1) если $k < m$, $m \geq 2$, $r \in \Delta_m$, то

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_k} &\geq \frac{\sqrt{R_m}}{R_{m-1}} = \frac{R_{m-1}^2}{R_{m-1}} = R_{m-1} \geq 3, \\ b_{\rho} \left(\frac{R}{R_k} \right) &< 2 \left(\frac{R}{R_k} \right)^{-\{\rho\}} \leq 2R_{m-1}^{-\{\rho\}}; \end{aligned} \quad (49)$$

2) если $k > m$, то

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_k} &\leq \frac{\sqrt{R_{m+1}}}{R_k} \leq R_k^{-1/2}, \\ b_{\rho} \left(\frac{R}{R_k} \right) &< R_k^{(\{\rho\}-1)/2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Из (49), (50) находим

$$\max \left\{ \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} b_{\rho} \left(\frac{R}{R_k} \right) \mid R \in \Delta_m \right\} < 2mR_{m-1}^{-\{\rho\}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} R_k^{(\{\rho\}-1)/2}, \quad m \geq 2.$$

Поскольку последовательность $\{R_k\}$ растет быстрее любой геометрической прогрессии,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mR_{m-1}^a = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} R_k^a < +\infty,$$

каково бы ни было отрицательное число a . Следовательно,

$$\max\{X(R) \mid R \in \Delta_m\} \leq \max\left\{b_\rho\left(\frac{R}{R_m}\right) \mid R \in \Delta_m\right\} + o(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Это соотношение вместе со следствием из леммы 4 и (48) дает оценку

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} X_m \leq B(\rho) \rightarrow \limsup_{R \rightarrow +\infty} X(R) \leq B(\rho),$$

которая вместе с (47) и (1) доказывает, что $\sigma_\rho(F) \leq dB(\rho)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.
- [2] А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 31–36.
- [3] A. Denjoy, “Sur les produits canoniques d'ordre infini”, *J. Math.* (6), **6** (1910), 1–136.

А. Ю. Попов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

20.03.2008