Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушко, А. С. Рябенко, Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 585–593

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:14:39

Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости

А. В. Глушко, А. С. Рябенко

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая в линейном приближении малые акустическо-гравитационные колебания вязкой стратифицированной жидкости. Отличительной чертой данной работы является отказ от предположения Буссинеска относительно стационарной плотности, что приводит к рассмотрению гидродинамической системы с переменными коэффициентами.

На основе принципа локализации получена оценка скорости стабилизации решения задачи при $t \rightarrow \infty$. Принцип локализации основан на связи между скоростью убывания решения задачи и геометрией области потери аналитичности образа Лапласа ($L_{t \rightarrow \gamma}$) решения. Принцип локализации осуществляется на основе априорных оценок для образа решения. На этой же основе доказана однозначная разрешимость как исходной задачи, так и задачи в образах.

Библиография: 7 названий.

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho_0(x)} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0(x)} \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)} q(t, x) &= F(t, x), \\ \frac{\partial q(t, x)}{\partial t} - \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2} \right) \rho_0(x) V(t, x) + \rho_0(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial q(t, x)}{\partial t} - c^{-2} \frac{\partial P(t, x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g} \rho_0(x) V(t, x) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$x > 0, t > 0$, с начальными условиями

$$V(t, x)|_{t=0} = P(t, x)|_{t=0} = q(t, x)|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$V(t, x)|_{x=0} = V(t, x)|_{x=\infty} = 0. \quad (3)$$

Система (1) описывает в линейном приближении малые акустическо-гравитационные колебания вязкой жидкости (см. [1]). Колебания считаются одномерными (в направлении однородного поля тяготения).

Использованы следующие обозначения: $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ – скорость движения частицы, находящейся в момент $t > 0$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$, ее плотность и давление в ней соответственно; $\rho_0(x)$ – стационарная плотность, ν – коэффициент вязкости, c – скорость распространения звуковых колебаний в среде, g – ускорение свободного падения, $N^2(x) = -(\rho'_0(x)\rho_0^{-1}(x) + gc^{-2})g$ – частота Вейселя–Брента. Модель (1) отличается от рассмотренной в работах [2], [3] наличием переменных коэффициентов, обусловленным отказом от предположения Буссинеска относительно стационарной плотности $\rho_0(x)$. Основной целью работы является получение оценки скорости стабилизации решения при $t \rightarrow \infty$ на основе принципа локализации, развитого в работах [3]–[5] для систем уравнений гидродинамического типа с постоянными коэффициентами и в работе [6] для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Результаты получены на основе установления связи между скоростью убывания решения задачи и геометрией области аналитичности образа Лапласа ($L_{t \rightarrow \gamma}$) решения. Аналитичность образа решения устанавливается на основе априорных оценок образа решения. На этой же основе доказана однозначная разрешимость как исходной задачи (1)–(3), так и задачи в образах. В работе приводятся результаты о скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ компоненты решения $V(t, x)$. В дальнейшем планируется улучшить оценку скорости убывания этой компоненты решения и получить оценки остальных компонент.

Сформулируем условия, используемые в работе.

УСЛОВИЕ 1. Функция $\rho_0(x) \in C^2[0, \infty)$ и существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2, c_1 > 0$ такие, что при $x \in [0, \infty)$ выполнены неравенства

$$\varepsilon_1 \leq \rho_0(x) \leq \varepsilon_2, \quad |\rho'_0(x)| \leq c_1.$$

УСЛОВИЕ 2. Функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных $x \in [0, \infty)$, $t > 0$ и $f(t, x)e^{\delta t} \in L_1(\mathbb{R}_{++}^2)$ при некотором $\delta > 0$.

УСЛОВИЕ 3. Для функции $\partial^k f(t, x)/\partial t^k$, где $k = 0, 1, 2$, выполнено условие 2

$$\begin{aligned} f(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ (1+x) \int_0^\infty \left| \frac{\partial^k f(t, x)}{\partial t^k} \right| e^{\delta t} dt \in L_2[0, \infty), \quad \text{где } k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что набор функций $V_1(t, x)$, $q_1(t, x)$, $P_1(t, x)$ принадлежат классу T_a , если справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k V_1(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq c_2 e^{at}, & \left| \frac{\partial^{k+1} V_1(t, x)}{\partial x^{k+1}} \right| &\leq c_2 e^{at}, \\ \left| \frac{\partial^k q_1(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq c_2 e^{at}, & \left| \frac{\partial^k P_1(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq c_2 e^{at}, & \left| \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right| &\leq c_2 e^{at}, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1$.

Ниже преобразования Лапласа ($L_{t \rightarrow \gamma}$) функций $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$, $F(t, x)$ будем обозначать $v(\gamma, x)$, $\rho(\gamma, x)$, $p(\gamma, x)$, $f(\gamma, x)$ соответственно.

После применения преобразования Лапласа ($L_{t \rightarrow \gamma}$) к задаче (1)–(3) и некоторых вычислений мы получаем, что

$$\rho(\gamma, x) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2} \right) \rho_0(x) v(\gamma, x) - \frac{\rho_0(x)}{\gamma} \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$p(\gamma, x) = c^2 \rho(\gamma, x) - \frac{c^2 N^2(x) \rho_0(x)}{g\gamma} v(\gamma, x), \quad (5)$$

а функция $v(\gamma, x)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu\gamma + \rho_0(x)c^2}{\gamma} \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right) - \gamma \rho_0(x) v(\gamma, x) = -f_*(\gamma, x), \quad (6)$$

$$v(\gamma, x)|_{x=0} = v(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0, \quad (7)$$

где $f_*(\gamma, x) = \rho_0(x)f(\gamma, x)$.

Отметим, что при произвольном $\rho_0(x)$, конечно, не удастся в явном виде выписать решение задачи (6), (7).

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции $f_*(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\partial v(\gamma, x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma, x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D – это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\psi_1 > 0.5\pi$ такое, что при $\gamma \in (D \cap (|\gamma| \geq \varepsilon) \cap (|\arg \gamma| \leq \psi_1))$ будет справедлива следующая оценка:

$$\left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_3 \|f_*(\gamma, x)\|^2, \quad (8)$$

где $c_3 = c_3(\psi_1, \varepsilon)$ такое, что $0 < \varepsilon_3 < c_3(\psi_1, \varepsilon) < \varepsilon_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (6) на $\bar{v}(\gamma, x)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞ , после чего с учетом (7) получаем, что

$$\int_0^\infty \frac{\nu\gamma + \rho_0(x)c^2}{\gamma} \left| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^\infty \gamma \rho_0(x) |v(\gamma, x)|^2 dx = (f_*(\gamma, x), v(\gamma, x)). \quad (9)$$

Из (9) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (k\nu|\gamma| + \sqrt{k^2 + 1} \rho_0(x)c^2 \cos(\varphi + \psi)) \left| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right|^2 dx \\ & + \int_0^\infty |\gamma|^2 \sqrt{k^2 + 1} \cos(\varphi - \psi) \rho_0(x) |v(\gamma, x)|^2 dx \\ & = |\gamma| (k \operatorname{Re}(f_*(\gamma, x), v(\gamma, x)) + \operatorname{Im}(f_*(\gamma, x), v(\gamma, x))), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\sin \psi = (k^2 + 1)^{-0.5}$, $\cos \psi = k(k^2 + 1)^{-0.5}$, $\varphi = \arg \gamma$. Равенство (10) рассматривается только в случае, когда $k > 1$. Нетрудно видеть, что $\psi \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$. Из (10) следует, что при $|\gamma| \geq 2\rho_0(x)c^2 |\cos(\varphi + \psi)| (\nu \cos \psi)^{-1}$ и при $\varphi \in [0; 0, 5\pi + \psi - \varepsilon^0]$, где $0 < \varepsilon^0 < \psi$, будет справедлива оценка

$$\frac{\nu|\gamma|}{2} \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + \frac{\varepsilon_1 |\gamma|^2 \sin \varepsilon^0 \|v(\gamma, x)\|^2}{2} \leq \frac{\|f_*(\gamma, x)\|^2}{2 \sin \varepsilon^0}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что найдется такое ψ , что при $\varphi \in [0.5(\pi - \psi); 0.5(\pi + \psi)]$ будет верна оценка

$$2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi + \psi)|(\nu \cos \psi)^{-1} < \varepsilon, \quad (12)$$

где ε – произвольное положительное число. Из (6), (11) и (12) следует оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_3 \|f_*(\gamma, x)\|^2. \quad (13)$$

В случае, когда $\varphi \in [0.5(-\pi - \psi); 0.5(-\pi + \psi)]$, неравенство (13) доказывается аналогично. Из (9) следует, что при $|\varphi| \leq 0.5(\pi - \psi)$ будет справедлива оценка

$$\begin{aligned} (\nu|\gamma| + \varepsilon_5) \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + \varepsilon_6 |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 &\leq |\gamma| |(f_*(\gamma, x), v(\gamma, x))| \\ &\leq 0.5\varepsilon_6 |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 + 0.5\varepsilon_6^{-1} \|f_*(\gamma, x)\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|\varphi| \leq 0.5(\pi - \psi)$ справедлива оценка

$$|\gamma| \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_3 \|f_*(\gamma, x)\|^2,$$

что с учетом (6) приводит к неравенству (8).

ЛЕММА 1. Пусть функции $f_*(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\partial v(\gamma, x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma, x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D – это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда для достаточно малых γ , лежащих между кривой $l(\psi) = -\psi^2 \nu^{-1} \rho_1 c^2 + i 6 \nu^{-1} \rho_1 c^2 \psi$ (здесь $\psi \in [-\delta, 0) \cup (0, -\delta]$) и мнимой осью (включая точки, лежащие на $l(\psi)$ и мнимой оси) и принадлежащих D , будет выполнена оценка

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \sin 0.5\psi \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 (\sin 0.5\psi)^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \\ \leq c_4 (1 + (|\gamma| \sin 0.5\psi)^{-1} + (\sin 0.5\psi)^{-4} + |\gamma|^2) \|f_*(\gamma, x)\|^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 мы получаем, что при $\varphi \in [0; 0.5(\pi + \psi)]$ и при $|\gamma| \geq 2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi + \psi)|(\nu \cos \psi)^{-1}$ справедлива оценка

$$0.5\nu|\gamma| \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + \varepsilon_1 |\gamma|^2 \sin 0.5\psi \|v(\gamma, x)\|^2 \leq |\gamma| |(f_*(\gamma, x), v(\gamma, x))|.$$

Отсюда следует неравенство

$$|\gamma| \sin 0.5\psi \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 (\sin 0.5\psi)^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_5 \|f_*(\gamma, x)\|^2. \quad (14)$$

Пусть $\varphi \in [0.5\pi; 0.5(\pi + \psi)]$. При достаточно малых ψ будет верна оценка

$$2\rho_0(x)c^2|\cos(\varphi + \psi)|(\nu \cos \psi)^{-1} \leq 4\rho_1 c^2 \nu^{-1} \sin 1.5\psi \leq 6\rho_1 c^2 \nu^{-1} \psi, \quad (15)$$

где $\rho_1 = \sup_{x \in [0, \infty)} \rho_0(x)$. Из (6) и (14) следует оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\| + |\gamma| \sin 0.5\psi \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 (\sin 0.5\psi)^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \\ & \leq c_5 (1 + (|\gamma| \sin 0.5\psi)^{-1} + (\sin 0.5\psi)^{-4} + |\gamma|^2) \|f_*(\gamma, x)\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) вытекает, что оценка (16) справедлива, когда γ лежит между кривой $l_1(\psi) = -\psi^2 \rho_1 c^2 \nu^{-1} + i6\rho_1 c^2 \nu^{-1} \psi$ и мнимой осью. Аналогично можно доказать, что оценка (16) справедлива, когда γ лежит между кривой $l_2(\psi) = -\psi^2 \rho_1 c^2 \nu^{-1} - i6\rho_1 c^2 \nu^{-1} \psi$ при $\psi \in (0, \delta]$ и мнимой осью.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть функции $f_*(\gamma, x)(1+x)$, $v(\gamma, x)$, $\partial v(\gamma, x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma, x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D — это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для достаточно малых γ , лежащих между контуром $l(\psi)$ и мнимой осью (включая точки лежащие на контуре $l(\psi)$ и мнимой оси) и принадлежащих D , будет верна оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_6 \|f_*(\gamma, x)(1+x)\|^2,$$

а при достаточно малых $\gamma \in D$ таких, что $|\varphi| < 0.5\pi$, верны оценки

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \cos \varphi \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 (\cos \varphi)^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \\ & \leq c_7 ((|\gamma| \cos \varphi)^{-1} + (\cos \varphi)^{-2} + 1) \|f_*(\gamma, x)\|^2, \\ & \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma| \cos \varphi \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_8 \|f_*(\gamma, x)(1+x)\|^2. \end{aligned}$$

Пусть $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В дальнейшем через $l_\delta^{\alpha, \beta}$ будем обозначать контур следующего вида: $l_\delta^{\alpha, \beta} = l_0 \cup l \cup l_1$, где

$$\begin{aligned} l &= -\xi^2 \alpha + i\xi \beta & \text{при } \xi \in [-\delta, \delta], \\ l_0 &= -\delta^2 \alpha - i(\delta + \xi) \beta & \text{при } \xi \in (-\infty, 0], \\ l_1 &= -\delta^2 \alpha + (\delta + \xi) \beta & \text{при } \xi \in [0, \infty). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f_*(\gamma, x)$ принадлежит пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при $\operatorname{Re} \gamma \geq -\varepsilon$, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда найдется контур $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$, за исключением, быть может $\gamma = 0$, у задачи (6), (7) существует единственное решение из $H^2[0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu \gamma + \rho_\varepsilon(x) c^2}{\gamma} \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right) - \gamma \rho_\varepsilon(x) v(\gamma, x) = -f_*(\gamma, x), \quad (17)$$

$$v(\gamma, x)|_{x=0} = v(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0, \quad (18)$$

где $\rho_\varepsilon(x) = \rho_0(\varepsilon x)$.

При $\varepsilon = 1$ задача (17), (18) переходит в задачу (6), (7). При $\varepsilon = 0$ существует контур $l_{\delta_1}^{\alpha_1, \beta_1}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha_1, \beta_1}$, у задачи (17), (18) существует единственное решение из $H^2[0, \infty)$ (см. [3]). Поскольку $\rho_\varepsilon^{(k)}(x) = \varepsilon^k \rho_0^{(k)}(\varepsilon x)$, $k = 0, 1$, если условие 1 выполнено для $\rho_0(x)$, оно же будет выполнено и для $\rho(\varepsilon x)$ равномерно по $\varepsilon \in [0, 1]$. Из теоремы 1, леммы 1 и леммы 2 следует, что существует контур $l_{\delta_2}^{\alpha_2, \beta_2}$ такой, что равномерно по $\varepsilon \in [0, 1]$ при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_2}^{\alpha_2, \beta_2}$, для решения задачи (17), (18) будет выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v_\varepsilon(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\| + \left\| \frac{\partial v_\varepsilon(\gamma, x)}{\partial x} \right\| + \|v_\varepsilon(\gamma, x)\| \leq c_9 \|f_*(\gamma, x)\|. \quad (19)$$

При помощи метода продолжения по параметру из оценки (19) получаем, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее некоторого контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$, задача (6), (7) однозначно разрешима в $H^2[0, \infty)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции $f(\gamma, x)$, $\partial f(\gamma, x)/\partial \gamma$, $v(\gamma, x)$, $\partial v(\gamma, x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma, x)/\partial x^2$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном γ , лежащем правее некоторого контура $l_\delta^{\alpha, \beta}$, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (6), (7), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда существует контур $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$, функции $v(\gamma, x)$, $\partial v(\gamma, x)/\partial x$, $\partial^2 v(\gamma, x)/\partial x^2$ будут аналитичны по γ равномерно по $x \in [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$\dot{f}(\gamma, x) = \frac{\partial f(\gamma, x)}{\partial \gamma}.$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & (\nu\gamma + \rho_0(x)c^2) \frac{\partial^2 \dot{v}(\gamma, x)}{\partial x^2} + c^2 \rho_0(x) \frac{\partial \dot{v}(\gamma, x)}{\partial x} - \gamma^2 \rho_0(x) \dot{v}(\gamma, x) \\ & = -\rho_0(x) f(\gamma, x) - \gamma \dot{f}(\gamma, x) - \nu \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} + 2\gamma \rho_0(x) v(\gamma, x), \end{aligned} \quad (20)$$

$$v(\gamma, x)|_{x=0} = v(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0. \quad (21)$$

При помощи априорных оценок, полученных в теореме 1, лемме 1 и лемме 2, можно показать, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 \tilde{v}(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \tilde{v}(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + \|\tilde{v}(\gamma, x)\|^2 \\ & \leq c_{10} (\|\Delta\gamma\| \|f(\gamma + \Delta\gamma, x)\|^2 + \|f(\gamma + \Delta\gamma, x) - f(\gamma, x)\|^2 + \|\hat{f}(\gamma, x) - \dot{f}(\gamma, x)\|^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\tilde{v}(\gamma, x) = \frac{v(\gamma + \Delta\gamma, x) - v(\gamma, x)}{\Delta\gamma} - \dot{v}(\gamma, x), \quad \hat{f}(\gamma, x) = \frac{f(\gamma + \Delta\gamma, x) - f(\gamma, x)}{\Delta\gamma}.$$

Из (22) следует утверждение теоремы.

ЛЕММА 3. Пусть для функции $v(\gamma, x)$ выполнена оценка

$$n \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + (nA + (1-n)) \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + A^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_{11} \|f(\gamma, x)\|^2$$

при $A > 0$, $n = 0, 1$ и некоторых γ , тогда при тех же γ равномерно по $x \in [0, \infty)$ будут справедливы оценки

$$|v(\gamma, x)| \leq c_{12} A^{-3/4} \|f(\gamma, x)\|, \quad \left| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right| \leq c_{13} A^{-1/4} \|f(\gamma, x)\| \quad \text{при } n = 1 \quad (23)$$

и

$$|v(\gamma, x)| \leq c_{14} A^{-1/2} \|f(\gamma, x)\| \quad \text{при } n = 0. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 1$. Воспользуемся неравенством, полученным в [7]:

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \left(\left| \frac{\partial^r v(\gamma, x)}{\partial x^r} \right| \right)^2 \leq \varepsilon^{2s-2r-1} \left\| \frac{\partial^s v(\gamma, x)}{\partial x^s} \right\|^2 + c_{15} \varepsilon^{-2r-1} \|v(\gamma, x)\|^2,$$

где $0 \leq r < s - 0.5$, $\varepsilon > 0$, норма берется в $L_2[0, \infty)$ по переменной x . С помощью последнего неравенства получаем следующие оценки:

$$A^{3/2} \sup_{x \in [0, \infty)} (|v(\gamma, x)|)^2 \leq A^k \left\| \frac{\partial^{2-k} v(\gamma, x)}{\partial x^{2-k}} \right\|^2 + c_{15} A^2 \|v(\gamma, x)\|^2, \quad k = 0, 1. \quad (25)$$

Из (25) следует первая из оценок (23). Вторая оценка в (23) и оценка (24) для случая $n = 0$ доказываются аналогично.

ЛЕММА 4. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, тогда функция

$$f(\gamma, x) = L_{t \rightarrow \gamma}[F(t, x)] \quad (26)$$

аналитична по γ при $\operatorname{Re} \gamma \geq -\varepsilon$, где $\varepsilon < \delta$, $\partial f(\gamma, x)/\partial \gamma \in L_2[0, \infty)$ и верна оценка

$$\|f(\gamma, x)\| \leq c_{16} (1 + |\gamma|)^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитичность функции $f(\gamma, x)$ по γ таким, что $\operatorname{Re} \gamma \geq -\varepsilon$, и то, что $\partial f(\gamma, x)/\partial \gamma \in L_2[0, \infty)$, очевидно. Оценка $\|f(\gamma, x)\|$ получена на основе условия 3 с помощью интегрирования по частям в правой части соотношения (26).

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда функции $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ такие, что

$$V(t, x) = L_{\gamma \rightarrow t}^{-1}[v(\gamma, x)], \quad q(t, x) = L_{\gamma \rightarrow t}^{-1}[\rho(\gamma, x)], \quad P(t, x) = L_{\gamma \rightarrow t}^{-1}[p(\gamma, x)],$$

являются классическим решением задачи (1)–(3) и принадлежат классу T_a при любом $a > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 1, 2 леммы 4 следует, что при $\operatorname{Re} \gamma \geq a$ у задачи (6), (7) существует единственное решение $v(\gamma, x)$ из $H^2[0, \infty)$. Из теоремы вложения $C^1[0, \infty) \subset H^2[0, \infty)$ следует, что $v(\gamma, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x . Из уравнения (6) и условия на функцию $F(t, x)$ следует, что $v(\gamma, x)$ дважды

непрерывно дифференцируема по x . Из теорем 1, 3 и леммы 4 следует, что $v(\gamma, x)$ аналитична по γ при $\operatorname{Re} \gamma \geq a$. Из теоремы 1, 3 и 4 получаем, что при $\operatorname{Re} \gamma \geq a$ справедливы следующие оценки:

$$|v(\gamma, x)| \leq c_{17}(1 + |\gamma|)^{-11/4}, \quad \left| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right| \leq c_{17}(1 + |\gamma|)^{-9/4}. \quad (27)$$

Из (4)–(6) и (27) следуют неравенства

$$|p(\gamma, x)| + |\rho(\gamma, x)| \leq c_{18}(1 + |\gamma|)^{-13/4}, \quad \left| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right| \leq c_{19}(1 + |\gamma|)^{-7/4}. \quad (28)$$

Из оценок (27), (28) следует, что функции $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ (где $a > 0$) принадлежат классу T_a .

Из (27) и предельной теоремы о преобразовании Лапласа следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} V(t, x) = \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} |\gamma v(\gamma, x)| = 0.$$

Равенства

$$\lim_{t \rightarrow +0} q(t, x) = \lim_{t \rightarrow +0} P(t, x) = 0$$

доказываются аналогично. Также из оценки (27) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$V(t, x)|_{x=0} = V(t, x)|_{x=\infty} = 0.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда решение $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ задачи (1)–(3) единственно в классе функций T_a при произвольном $a > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при помощи априорной оценки из теоремы 1.

Приведем, на наш взгляд, главный результат работы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для компоненты $V(t, x)$ решения задачи (1)–(3) справедлива оценка $|V(t, x)| \leq c_{21}t^{-1/4}$ при $t \rightarrow \infty$ с постоянной $c_{21} > 0$, равномерной по $x \in [0; \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегральной теоремы Коши и оценок, полученных в теореме 1 и леммах 1–4, следует, что справедливо представление

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}} e^{\gamma t} v(\gamma, x) d\gamma. \quad (29)$$

После параметризации контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$ с учетом представления (29) и оценок, полученных в теореме 1 и леммах 1–4, имеем, что

$$|V(t, x)| \leq c_{20} \left(\int_0^\delta e^{-a_1 \xi^2 t} \xi^{1/2} d\xi + O(e^{-\varepsilon_7 t}) \right) \leq c_{21} t^{-1/4}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $a_1 > 0$, $\varepsilon_7 > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров, *Введение в механику сплошной среды*, Наука, М., 1982.
- [2] А. В. Глушко, “Асимптотические колебания и интрузия в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости”, *Докл. РАН*, **365**:1 (1999), 26–31.
- [3] А. В. Глушко, *Асимптотические методы в задачах гидродинамики*, Изд-во ВГУ, Воронеж, 2003.
- [4] А. В. Глушко, С. О. Рыбаков, “Теорема о локализации для задачи динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:1 (1992), 32–43.
- [5] А. В. Глушко, С. О. Рыбаков, “Асимптотика по времени решения начально-краевой задачи в полупространстве для уравнения динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:4 (1992), 42–58.
- [6] А. С. Рябенко, “Оценка при $t \rightarrow \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности”, *Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Матем.*, 2007, № 1, 95–99.
- [7] В. П. Глушко, С. Г. Крейн, “Неравенства для норм в пространствах L_p с весом”, *Сиб. матем. журн.*, **1**:3 (1960), 343–382.

А. В. Глушко

Воронежский государственный университет

E-mail: mail@angl.vrn.ru

Поступило

21.01.2008

А. С. Рябенко

Воронежский государственный университет

E-mail: alexr-83@yandex.ru