Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-Р. К. Рамазанов, О строении пространств полианалитических функций, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 750–764

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:33:40

УДК 517.5

О СТРОЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. К. Рамазанов

Пусть $A_m L_p(D, \alpha)$ – пространство всех m -аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функций, суммируемых в p -й степени по площади с весом $(1 - |z|^2)^\alpha$, $\alpha > -1$. В работе вводятся подпространства $A_k L_p^0(D, \alpha)$, $k = 1, 2, \dots, m$, пространства $A_m L_p(D, \alpha)$ и доказывается, что $A_m L_p(D, \alpha)$ является прямой суммой этих подпространств. Эти результаты используются для получения оценок роста производных полианалитических функций вблизи границы произвольных областей.

Библиография: 16 названий.

Функция $f(z)$, которая имеет в области G непрерывные частные производные по x и y до порядка $m \geq 1$, называется *полианалитической функцией* (ПАФ) порядка m в области G , если в этой области она удовлетворяет обобщенному уравнению Коши–Римана

$$\frac{\partial^m f}{\partial \bar{z}^m} = 0.$$

Класс таких функций мы будем в дальнейшем обозначать через $A_m(G)$.

Известно, что любую ПАФ порядка m в области G можно единственным образом представить в виде (см. [1])

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \dots + \bar{z}^{m-1}\varphi_{m-1}(z), \quad (1)$$

где φ_k голоморфны в G . В случае, когда $G = D := \{z : |z| < 1\}$, равенство (1) можно преобразовать к виду (см. [2], [3])

$$f(z) = P(z, \bar{z}) + g_0(z) + (1 - |z|^2)g_1(z) + \dots + (1 - |z|^2)^{m-1}g_{m-1}(z), \quad (2)$$

где g_k голоморфны в D , $P(z, \bar{z}) = P_0 + \bar{z}P_1(z) + \dots + \bar{z}^{m-1}P_{m-1}(z)$, $P_0 = \text{const}$, $P_k(z)$ при $k \geq 1$ – полином от z степени не выше $k - 1$.

В дальнейшем функции φ_k и g_k будем называть *голоморфными компонентами* ПАФ $f(z)$.

В работах [2]–[7] исследованы задачи граничного поведения ПАФ, их формальных производных и голоморфных компонент в интегральных метриках с использованием различных представлений ПАФ. В этой работе мы продолжаем эту тему.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00119.

Введем необходимые обозначения: $L_p(D, \alpha)$ обозначает пространство функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{(p,D,\alpha)} = \left\{ \iint_D (1 - |z|^2)^\alpha |f(z)|^p dx dy \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha > -1; \quad (3)$$

$A_k(D)$ – множество всех функций k -аналитических в D , $k = 1, 2, \dots$, $A(D) = A_1(D)$; $A_k L_p(D, \alpha) = A_k(D) \cap L_p(D, \alpha)$, $AL_p(D, \alpha) = A_1 L_p(D, \alpha)$;

$$A_k^0 L_p(D, \alpha) = \left\{ f(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} F(z)); \right. \\ \left. F \in A(D), f \in A_k L_p(D, \alpha) \right\}. \quad (4)$$

Очевидно, что $A_1 L_p(D, \alpha) = AL_p(D, \alpha) = A_1^0 L_p(D, \alpha)$. При $p = \infty$ считаем везде, что $\alpha \geq 0$. Для плоской меры Лебега $dx dy$ также будем использовать обозначение $d\sigma(z)$.

Всюду ниже $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция Эйлера; $C_j(m, p, \dots)$, $j = 1, 2, \dots$, – величины, вообще говоря, различные в различных выражениях, зависящие лишь от указанных в скобках параметров;

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{при } k > n \text{ и при } k < 0.$$

Универсальное разложение пространства полианалитических в D функций из $L_p(D, \alpha)$ в прямую сумму подпространств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > -1$ при $p < \infty$, $\alpha \geq 0$ при $p = \infty$. Функция

$$f(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} F(z))$$

принадлежит пространству $A_k L_p(D, \alpha)$ тогда и только тогда, когда F принадлежит $AL_p(D, \alpha)$. При этом

$$\|f\|_{(p,D,\alpha)} \leq 2^{2k-3+2\alpha/p} \frac{\Gamma(2k-1+\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)} \|F\|_{(p,D,\alpha)}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выражение (4) определяет линейный оператор, отображающий пространство аналитических функций $AL_p(D, \alpha)$ в пространство $A_k^0 L_p(D, \alpha)$. Неравенство (5) дает оценку нормы этого оператора, а из следствия 2.2 мы получаем оценку нормы его обратного оператора.

Для формулировки следующей теоремы введем еще обозначения:

$$\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, r) = \frac{1}{\pi(k-1)!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha)} \frac{(r^2 - |z|^2)^{-\alpha} (r^2 - |\zeta|^2)^{-\alpha}}{r^{2(k-1)}} \\ \times \frac{\partial^{2(k-1)}}{\partial z^{k-1} \partial \bar{\zeta}^{k-1}} \left\{ (r^2 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} (r^2 - \zeta\bar{\zeta})^{k-1+\alpha} \frac{(k-1)(r^2 - z\bar{\zeta}) + r^2(\alpha+1)}{(r^2 - z\bar{\zeta})^{\alpha+2}} \right\}, \\ \mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta, r) = \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, r), \quad \mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, 1) = \mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta), \quad \mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta, 1) = \mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta), \\ z, \zeta \in D(0, r), \quad D(t, r) = \{z: |z-t| < r\}, \quad D(0, 1) = D.$$

Очевидно, что $\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta) = \overline{\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(\zeta, z)}$ и при фиксированном $\zeta \in D$ функция $\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta)$ принадлежит пространству $A_k^0 L_p(D, \alpha)$.

Введем интегральный оператор

$$P_k^{0,\alpha}(f)(\zeta) = \iint_D (1 - |z|^2)^\alpha f(z) \overline{\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta)} dx dy, \quad (6)$$

$$f \in L_p(D, \alpha), \quad \zeta \in D, \quad z = x + iy \in D.$$

Оператор, получаемый из формулы (6) при замене ядра $\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta)$ на ядро $\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)$, будем обозначать через P_m^α .

Очевидно, что $P_m^\alpha = \sum_{k=1}^m P_k^{0,\alpha}$.

ТЕОРЕМА 2. 1. Оператор $P_k^{0,\alpha}$ (P_m^α) является оператором проектирования пространства $L_p(D, \alpha)$ на его подпространство $A_k^0 L_p(D, \alpha)$ (соответственно на $A_m L_p(D, \alpha)$) при $1 < p < \infty$ и всех $\alpha > -1$.

2. При $p = 2$ эти операторы являются ортогональными проекторами на соответствующие подпространства.

3. Если $f \in A_k^0 L_p(D, \alpha)$ ($f \in A_m L_p(D, \alpha)$), то $P_k^{0,\alpha}(f)(z) = f(z)$, $z \in D$ (соответственно $P_m^\alpha(f)(z) = f(z)$, $z \in D$), при всех $1 \leq p \leq \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $f \in A_m L_p(D, \alpha)$ и $\varphi_j(z)$ — голоморфные компоненты функции f в представлении (1). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_j &\in AL_p(D, \alpha + p(m-1)) && \text{при } 1 \leq p < \infty \text{ и } \alpha > -1, \\ \varphi_j &\in AL_p(D, \alpha + (m-1)) && \text{при } p = \infty \text{ и } \alpha \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $PA\Phi$

$$f(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} F(z))$$

принадлежит пространству $A_k^0 L_p(D, \alpha)$, $1 < p < \infty$, то

$$C_1(k, p, \alpha) \|F\|_{(p, D, \alpha)} \leq \|f\|_{(p, D, \alpha)} \leq C_2(k, p, \alpha) \|F\|_{(p, D, \alpha)}.$$

ТЕОРЕМА 3. При $1 \leq p \leq \infty$ пространство $A_m L_p(D, \alpha)$ является прямой суммой подпространств $A_k^0 L_p(D, \alpha)$ с $k = 1, 2, \dots, m$:

$$A_m L_p(D, \alpha) = A_1 L_p(D, \alpha) \oplus A_2^0 L_p(D, \alpha) \oplus \dots \oplus A_m^0 L_p(D, \alpha).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 1, 2 и 3 при $p = 2$ получены в [5], [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко видеть, что при $m = 1$ ядро $\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)$ совпадает с известным ядром Бергмана для круга D . Интегральные операторы вида (6) с ядром Бергмана исследованы в работах [8]–[11]. Операторы вида (6) для ПАФ в метрике пространства $L_p(D)$ при $1 \leq p < \infty$ исследованы также в работе [11].

В [11] приводится (без доказательства) другое представление для ядра $\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)$ в случае $\alpha = 0$:

$$\mathcal{R}_m(z, \zeta) = \frac{m}{\pi(1 - z\bar{\zeta})^{2m}} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j+1} \binom{m+j}{m} |1 - z\bar{\zeta}|^{2(m-1-j)} |z - \zeta|^{2j}. \quad (7)$$

Теоремы 1–3 можно использовать для получения оценок роста ПАФ при стремлении точки z к границе области, а также для исследования полирациональных приближений в метрике (3) (см. [6], [13]). Этим вопросам посвящена вторая часть настоящей работы.

Для доказательства сформулированных теорем нужны вспомогательные утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Односвязную ограниченную область G с гладкой жордановой границей ∂G будем называть *обобщенно ляпуновской*, если модуль непрерывности $\omega(\delta)$ угла наклона касательной к ∂G как функции длины s дуги удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^{\omega(t)} \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Для произвольной области G пространства $L_p(G, \alpha)$ определяются путем замены веса $(1 - |z|^2)^\alpha$ в равенстве (3) на весовую функцию $(\rho(z))^\alpha$, где $\rho(z) = \rho(z, \partial G)$. Как и выше, $A_m L_p(G, \alpha) = A_m(G) \cap L_p(G, \alpha)$.

Если $f \in A_m(G)$, то

$$\partial^s f(z) := \frac{\partial^s f(z)}{\partial \bar{z}^n \partial z^{s-n}}, \quad n = 0, 1, \dots, s, \quad n < m, \quad s = 0, 1, \dots$$

ЛЕММА 1 [4]. Пусть G – обобщенно ляпуновская область. Тогда для любой функции Φ , голоморфной в области G , имеем

$$\begin{aligned} \Phi \in AL_p(G, \alpha) &\iff \Phi^{(s)} \in AL_p(G, \alpha + ps) && \text{при } 1 \leq p < \infty \text{ и } \alpha > -1, \\ \Phi \in AL_p(G, \alpha) &\iff \Phi^{(s)} \in AL_p(G, \alpha + s) && \text{при } p = \infty \text{ и } \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 [4]. Пусть G – произвольная область. Тогда для любой функции $f \in A_m(G)$ имеем

$$\begin{aligned} f \in A_m L_p(G, \alpha) &\Rightarrow \partial^s f \in A_m L_p(G, \alpha + sp) && \text{при } 1 \leq p < \infty \text{ и } \alpha > -1, \\ f \in A_m L_p(G, \alpha) &\Rightarrow \partial^s f \in A_m L_p(G, \alpha + s) && \text{при } p = \infty \text{ и } \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Леммы 1 и 2 являются следствиями более общих результатов работы [4] (см. теорему 5 и следствие Т5 из нее, а также промежуточное неравенство, полученное на с. 23). Лемма 1 в указанном виде обобщает результаты Харди–Литтлвуда и А. Забулениса, полученные ими для круга (см. [14, с. 81] и [15]), на области с обобщенно ляпуновской границей, а лемма 2 переносит эти результаты на полианалитические функции. Отметим также, что для обобщенно ляпуновских областей в работе [4] доказана и обратная импликация леммы 2.

ЛЕММА 3. Для любых натуральных чисел k, n и любого действительного числа $\alpha > -1$ справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \binom{n}{j} j! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(j+1+\alpha)} = \frac{\Gamma(n+k+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $t \geq 0$ рассмотрим функцию $t^n t^{k-1+\alpha}$. Используя правило Лейбница, найдем ее производную:

$$(t^n t^{k-1+\alpha})^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \binom{n}{j} j! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(j+1+\alpha)} t^{n+\alpha}. \quad (8)$$

Вычислив производную в правой части равенства (8) как производную степенной функции $t^{n+k-1+\alpha}$, мы получим требуемый результат.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha > -1$ и $z, \zeta \in D$. Тогда

$$\iint_D \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\bar{z}\zeta|^{2+\alpha+\beta}} dx dy \leq \begin{cases} C_1(\alpha, \beta)(1-|\zeta|^2)^{-\beta}, & \text{если } \beta > 0, \\ C_2(\alpha, \beta), & \text{если } \beta < 0. \end{cases}$$

Доказательство леммы 4 имеется в [16, гл. 1, с. 26].

ЛЕММА 5. Для любых $z, \zeta \in D$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 1. \quad & |\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta)| \leq \frac{C_1(\alpha, k)}{|1-z\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad z, \zeta \in D; \\ 2. \quad & |\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)| \leq \frac{C_2(\alpha, m)}{|1-z\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}, \quad z, \zeta \in D. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Приведенная оценка для ядра $\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)$ получена в [11]. Приводимое ниже доказательство является существенно более простым, поскольку использует явный вид ядра $\mathcal{R}_m^\alpha(z, \zeta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Путем несложных преобразований нетрудно получить следующую оценку для ядра $\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta)$:

$$|\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta)| \leq \frac{C(\alpha, k)}{|1-z\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} \sum_{m,n=0}^k \frac{(1-|z|^2)^m (1-|\zeta|^2)^n}{|1-z\bar{\zeta}|^{m+n}}. \quad (9)$$

Легко заметить, что

$$|1-z\bar{\zeta}|^2 = (1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) + |z-\zeta|^2. \quad (10)$$

Далее, любые две точки $z, \zeta \in D$ удовлетворяют одному из следующих условий:

1)

$$\begin{cases} |z - \zeta| \geq \frac{1}{4}(1 - |\zeta|^2), \\ |z - \zeta| \geq \frac{1}{4}(1 - |z|^2); \end{cases}$$

2) хотя бы в одном из неравенств условия 1) выполняется противоположное неравенство.

Если для точек $z, \zeta \in D$ выполняется условие 1), то, учитывая равенство (10), получаем

$$\frac{(1 - |z|^2)^m (1 - |\zeta|^2)^n}{|1 - z\bar{\zeta}|^{m+n}} \leq \frac{4^{m+n} |z - \zeta|^{m+n}}{|z - \zeta|^{m+n}} \leq 4^{m+n}. \quad (11)$$

Пусть теперь выполняется условие 2) и допустим, что $|z - \zeta| < 1/4(1 - |z|^2)$. Тогда $(1 - |z|^2)$ и $(1 - |\zeta|^2)$ слабо эквивалентны. Действительно,

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2) < (1 - |\zeta|^2) < 2(|z - \zeta| + (1 - |z|)) < 2\left(\frac{1}{4}(1 - |z|^2) + (1 - |z|^2)\right) = \frac{5}{2}(1 - |z|^2).$$

Из равенства (10) тогда следует

$$|1 - z\bar{\zeta}|^2 \geq (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \geq \frac{1}{4}(1 - |z|^2)^2.$$

Следовательно, и в этом случае

$$\frac{(1 - |z|^2)^m (1 - |\zeta|^2)^n}{|1 - z\bar{\zeta}|^{m+n}} \leq \frac{|1 - |z|^2|^m (5/2)^n (1 - |z|^2)^n}{(1/2)^{m+n} (1 - |z|^2)^{m+n}} \leq 2^m 5^n. \quad (12)$$

Из неравенств (9), (11), (12) получаем требуемый результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Представим функцию f в виде

$$f(z) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (1 - |z|^2)^j F^{(j)}(z) \bar{z}^{k-1-j}. \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-1} f(z)}{\partial \bar{z}^{k-1}} &= (-1)^{k-1} \Gamma(k) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)} F^{(j)}(z) z^j \\ &= \Gamma(k) (-1)^{k-1} z^{-\alpha} (z^{k-1+\alpha} F(z))^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Из леммы 2 следует, что функция $\partial^{k-1} f / \partial \bar{z}^{k-1}$ принадлежит пространству $A_k L_p(D, \alpha + (k-1)p)$.

Так как $\partial^{k-1} f / \partial \bar{z}^{k-1}$ аналитична в D , применив лемму 1, легко получаем, что $F \in AL_p(D, \alpha)$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $F \in AL_p(D, \alpha)$. Тогда из леммы 1 следует, что $F^{(j)} \in AL_p(D, \alpha + jp)$. Далее, воспользовавшись равенством (13), получаем, что $f \in A_m L_p(D, \alpha)$.

Остается доказать неравенство (5). Пусть z – произвольная точка круга D . Рассмотрим окружность C_ρ радиуса ρ с центром в точке z так, чтобы $C_\rho \subset D$. Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$F^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} d\zeta.$$

Положив $\zeta - z = (1 - |z|^2)e^{i\varphi}/4$, получаем

$$(1 - |z|^2)^j F^{(j)}(z) = \frac{j!4^j}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\zeta) e^{-ij\varphi} d\varphi. \quad (14)$$

Учитывая представление (13) для функции f , из равенства (14) легко следует, что

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \bar{z}^{k-1-j} j! 2^{2j-1} \int_0^{2\pi} F(\zeta) e^{-ij\varphi} d\varphi.$$

Так как $j! \leq (k-1)!/((k-1-j)!)$, используя лемму 3 при $n = k-1$, из последнего равенства получаем

$$|f(z)| \leq \frac{2^{2k-3}}{\pi} \frac{\Gamma(2k-1+\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)} \int_0^{2\pi} |F(\zeta)| d\varphi. \quad (15)$$

Очевидно, что при $|z - \zeta| \leq (1 - |z|^2)/4$, $z \in D$, выполняется неравенство $1 - |z|^2 \leq 4(1 - |\zeta|^2)$. Поэтому, проинтегрировав неравенство (15) по кругу D и применив обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\|f\|_{(p,D,\alpha)} \leq 2^{2k-3+2\alpha/p} \frac{\Gamma(2k-1+\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)} \left\{ \iint_D (1 - |z|^2)^\alpha |F(z)|^p dx dy \right\}^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $p = 2$ теорема доказана в [5], [6]. Легко видеть, что оператор $P_k^{0,\alpha}$ определен для любой функции $f \in L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, и

$$P_k^{0,\alpha}(f)(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} F(z)), \quad \text{где } F \in A(D).$$

Докажем ограниченность этого оператора при $1 < p < \infty$. Пусть

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{pq}, & \text{если } \alpha \geq 0, \\ \frac{\alpha+1}{pq}, & \text{если } -1 < \alpha < 0, \end{cases}$$

где $1/p + 1/q = 1$. Тогда, как и в работе [16, с. 131], рассмотрев функцию $h(z) = (1 - |z|^2)^{-\beta}$ и используя леммы 4 и 5, доказываем ограниченность оператора $P_k^{0,\alpha}$ в пространстве $L_p(D, \alpha)$, $1 < p < \infty$.

Далее, пусть $f \in A_k^0 L_p(D, \alpha) \cap A_k^0 L_2(D, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда по п. 2 доказываемой теоремы имеем

$$P_k^{0,\alpha}(f)(z) = f(z), \quad z \in D. \quad (16)$$

Так как множество $A_k^0 L_p(D, \alpha) \cap A_k^0 L_2(D, \alpha)$ всюду плотно в пространстве $A_k^0 L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, то равенство (16) справедливо для любой функции $f \in A_k^0 L_p(D, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Оператор P_m^α рассматривается аналогично.

Следствие 2.1 доказывается по аналогии с доказательством следствия 2 из [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.2. Неравенство

$$\|f\|_{(p,D,\alpha)} \leq C_2(k,p,\alpha) \|F\|_{(p,D,\alpha)}$$

доказано в теореме 1 с константой $C_2(k,p,\alpha) = 2^{2k-3+2\alpha/p} \Gamma(2k-1+\alpha)/\Gamma(k+\alpha)$ при всех p , удовлетворяющих неравенству $1 \leq p \leq \infty$. Докажем левое неравенство.

Из теоремы 2 имеем

$$P_k^{0,\alpha}(f)(z) = f(z) \quad \text{для любой функции } f \in A_k^0 L_p(D, \alpha).$$

Тогда, используя интегральное представление (6), получаем (см. еще [6] при $\alpha = 0$)

$$F(\zeta) = \iint_D (1-|z|^2)^\alpha f(z) \overline{T_k^{0,\alpha}(z, \zeta)} dx dy,$$

где

$$T_k^{0,\alpha}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)(1-|z|^2)^{-\alpha}}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left((1-z\bar{z})^{k-1+\alpha} \frac{(k-1)(1-z\bar{\zeta}) + \alpha + 1}{(1-z\bar{\zeta})^{\alpha+2}} \right).$$

Как и при доказательстве леммы 5, устанавливается, что

$$|T_k^{0,\alpha}(z, \zeta)| \leq \frac{C(k, \alpha)}{|1-z\bar{\zeta}|^{\alpha+2}}, \quad z, \zeta \in D.$$

Используя метод доказательства теоремы 2 с той же функцией $h(z) = (1-|z|^2)^{-\beta}$, завершаем доказательство следствия 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При $1 < p < \infty$ утверждение теоремы 3 получаем из теоремы 2. Действительно, если $f \in A_m L_p(D, \alpha)$, $1 < p < \infty$, то, применив оператор P_m^α , получаем

$$f(z) = P_m^\alpha(f)(z) = \sum_{k=1}^m P_k^{0,\alpha}(f)(z),$$

где $P_k^{0,\alpha}(f) \in A_k^0 L_p(D, \alpha)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Если же $p = \infty$, то для любой функции $f \in A_m L_p(D, \alpha)$ имеем

$$f(z) = P_m^\alpha(f)(z) = \sum_{k=1}^m P_k^{0,\alpha}(f)(z) = (1-|z|^2)^{-\alpha} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((1-z\bar{z})^{k-1+\alpha} F_k(z)),$$

где $F_k \in A(D)$. Докажем, что $F_k \in AL_\infty(D, \alpha)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда из теоремы 1 будет следовать, что $P_k^{0,\alpha}(f) \in A_k^0 L_\infty(D, \alpha)$, $\alpha \geq 0$, при $k = 1, 2, \dots, m$.

Как и при доказательстве теоремы 1, находим

$$\frac{\partial^{m-1} f(z)}{\partial \bar{z}^{m-1}} = \Gamma(m) (-1)^{m-1} z^{-\alpha} (z^{m-1+\alpha} F(z))^{(m-1)}.$$

По лемме 2 функция $\partial^{m-1} f / \partial \bar{z}^{m-1}$ принадлежит пространству $A_m L_\infty(D, \alpha + m - 1)$. Так как $\partial^{m-1} f / \partial \bar{z}^{m-1}$ является аналитической функцией в D , применив лемму 1, получаем, что $F_m \in AL_\infty(D, \alpha)$.

Таким образом, $P_m^{0,\alpha}(f) \in A_m^0 L_\infty(D, \alpha)$.

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть мы доказали, что $P_j^{0,\alpha}(f) \in A_j^0 L_\infty(D, \alpha)$ при $j = m, m-1, \dots, k+1$.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=k+1}^m P_j^{0,\alpha}(f)(z) = \sum_{j=1}^k P_j^{0,\alpha}(f)(z),$$

которая принадлежит пространству $A_k L_\infty(D, \alpha)$. Как и выше, вычислив производную $\partial^{k-1} g / \partial \bar{z}^{k-1}$, доказываем, что $F_k \in AL_\infty(D, \alpha)$. Тогда по теореме 1 $P_k^{0,\alpha}(f) \in A_k^0 L_\infty(D, \alpha)$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $p = 1$. Тогда из теоремы 2 следует, что для любой функции $f \in A_m L_1(D, \alpha)$

$$f(z) = P_m^\alpha(f)(z) = \sum_{k=1}^m P_k^{0,\alpha}(f)(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha} \sum_{k=1}^m \frac{\partial^{k-1}}{\partial \bar{z}^{k-1}} ((1 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} F_k(z)),$$

где $F_k \in A(D)$. Как и в случае $p = \infty$, доказываем сначала, что $F_k \in AL_1(D, \alpha)$, $k = 1, 2, \dots, m$, а потом, применив теорему 1, завершаем доказательство теоремы 3 и при $p = 1$.

Оценки производных полианалитических функций. Для произвольной области G из $\bar{C}$ в качестве весовой функции будем рассматривать следующую функцию: $(\rho(z))^\alpha = (\rho(z, \partial G))^\alpha$, $\alpha > -1$, где $\rho(z) = \rho(z, \partial G)$ – расстояние от $z \in G$ до границы ∂G .

Пусть $L_p(G, \alpha)$, $\alpha > -1$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначает пространство комплекснозначных функций f с нормой

$$\|f\|_{(p,G,\alpha)} = \left\{ \iint_G (\rho(z))^\alpha |f(z)|^p dx dy \right\}^{1/p} < \infty. \quad (17)$$

Очевидно, что при $D = G$ нормы, определяемые равенствами (3) и (17), эквивалентны. Поэтому мы сохраняем наши старые обозначения и для произвольной области G . В частности, $L_p(G, 0) = L_p(G)$, $A_m L_p(G, \alpha) = A_m(G) \cap L_p(G, \alpha)$.

Всюду ниже p и q – сопряженные числа, т.е. $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

Введем еще обозначения:

$$A_1(k, s, p, \alpha) = \left\{ \int_0^1 (1-t)^\alpha |t^{-s/2} (1-t)^{-\alpha} (t^{k-1+s} (1-t)^{k-1+\alpha})^{(k-1)q} dt \right\}^{1/q}$$

при $1 < p \leq \infty$ и $s = 0, 1, \dots$,

$$A_2(k, s, p, \alpha) = \left\{ \int_0^1 (1-t)^\alpha |t^{s/2} (1-t)^{-\alpha} (t^{k-1-s} (1-t)^{k-1+\alpha})^{(k-1)q} dt \right\}^{1/q}$$

при $1 < p \leq \infty$ и $s = 0, 1, \dots, k-1$,

$$A_3(k, s, \alpha) = \max_{0 \leq t \leq 1} \{ |t^{-s/2} (1-t)^{-\alpha} (t^{k-1+s} (1-t)^{k-1+\alpha})^{(k-1)}| \} \quad \text{при } s = 0, 1, \dots,$$

$$A_4(k, s, \alpha) = \max_{0 \leq t \leq 1} \{ |t^{s/2} (1-t)^{-\alpha} (t^{k-1-s} (1-t)^{k-1+\alpha})^{(k-1)}| \}$$

при $s = 0, 1, \dots, k-1$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in A_m L_p(G, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, где G – произвольная область на $\overline{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left| \frac{\partial^s f(z)}{\partial z^s} \right| \leq C_1(m, s, p, \alpha) \rho^{-(2\alpha+2+sp)/p} \|f\|_{(p, D(z, \rho), \alpha)}, \quad s = 0, 1, \dots, \\ 2) \quad & \left| \frac{\partial^s f(z)}{\partial \bar{z}^s} \right| \leq C_2(m, s, p, \alpha) \rho^{-(2\alpha+2+sp)/p} \|f\|_{(p, D(z, \rho), \alpha)}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1(m, s, p, \alpha) &= \frac{1}{\pi^{1/p}} \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(k+s+\alpha)(2k-1+s+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)} A_1(k, s, p, \alpha), \\ C_2(m, s, p, \alpha) &= \frac{1}{\pi^{1/p}} \sum_{k=s+1}^m \frac{(2k-1-s+\alpha)}{\Gamma(k-s)} A_2(k, s, p, \alpha). \end{aligned}$$

Теорема 4 при $\alpha = 0$ и $p > 2$ с другими постоянными получена в [4].

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f \in AL_p(G, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$|f^{(s)}(z)| \leq C_1(s, p, \alpha) \rho^{-(2\alpha+2+sp)/p} \|f\|_{(p, D(z, \rho), \alpha)}, \quad s = 0, 1, \dots,$$

где

$$C_1(s, p, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^{1/p}} \frac{\Gamma(s+\alpha+2)(\Gamma(\frac{sq}{2}+1))^{1/q}}{(\Gamma(\alpha+1))^{1/p}(\Gamma(\frac{sq}{2}+\alpha+2))^{1/q}} & \text{при } 1 < p \leq \infty, \\ \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(s+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $f \in A_m L_p(G, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для компоненты φ_{m-1} функции f в представлении (1) имеем

$$|\varphi_{m-1}(z)| \leq C_2(m, p, \alpha) \rho^{-(2\alpha+2+(m-1)p)/p} \|f\|_{(p, D(z, \rho), \alpha)},$$

где

$$C_2(m, p, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^{1/p}} \frac{\Gamma(m+\alpha+1)(\Gamma(\frac{(m-1)q}{2}+1))^{1/q}}{\Gamma(m)(\Gamma(\alpha+1))^{1/p}(\Gamma(\frac{(m-1)q}{2}+\alpha+2))^{1/q}} & \text{при } 1 < p \leq \infty, \\ \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Аналогичные оценки можно получить и для других компонент функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В теореме 4 и следствиях 4.1 и 4.2 при $p = \infty$ считаем, что $\alpha = 0$. При $p = 1$ в выражениях для $C_1(m, s, p, \alpha)$ и $C_2(m, s, p, \alpha)$ из теоремы 4 величины $A_1(k, s, p, \alpha)$ и $A_2(k, s, p, \alpha)$ следует заменить на величины $A_3(k, s, \alpha)$ и $A_4(k, s, \alpha)$ соответственно.

Для $f \in L_p(G)$ положим

$$\Omega(G, p, f, \delta) = \sup\{\|f(\cdot) - f(z)\|_{(p, D(z, r))} : 0 < r \leq \delta, D(z, r) \subset G\}$$

и $\Omega(G, p, f, 0) := 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что $f \in \text{Lip}(\beta, p, G)$, $\beta > 0$, если $\Omega(G, p, f, \delta) = O(\delta^\beta)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Следующая теорема является обобщением теоремы Харди–Литтлвуда, полученная при $p = \infty$ и $G = D$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in A_n(G)$ и $1/p < \beta \leq 1 + 2/p$. Тогда

$$f \in \text{Lip}(\beta, p, G) \iff \left| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \right| = O(\rho^{\beta-1-2/p}) \quad \text{при } \rho = \rho(z, \partial G) \rightarrow 0.$$

При $2 < p \leq \infty$ и $1/(2p) < \beta \leq 1 + 2/p$, $\beta \neq 1/p, 2/p$, для ограниченных односвязных областей G с дважды гладкой границей теорема 5 получена в [4].

Для доказательства сформулированных теорем нужны вспомогательные утверждения.

Положим

$$\psi_1^{(s)}(z) = \frac{\partial^s}{\partial \zeta^s} (\overline{\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, R)})|_{\zeta=0}, \quad \psi_2^{(s)}(z) = \frac{\partial^s}{\partial \bar{\zeta}^s} (\overline{\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, R)})|_{\zeta=0}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > -1$. Тогда имеем:

1) при $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned} \|\psi_1^{(s)}\|_{(q, D(0, R), \alpha)} &= \frac{1}{\pi^{1/p}} \frac{\Gamma(k+s+\alpha)(2k-1+s+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)} R^{-(2(\alpha+1)+ps)/p} A_1(k, s, p, \alpha), \\ s &= 0, 1, \dots, \\ \|\psi_2^{(s)}\|_{(q, D(0, R), \alpha)} &= \frac{1}{\pi^{1/p}} \frac{(2k-1-s+\alpha)}{\Gamma(k-s)} R^{-(2(\alpha+1)+ps)/p} A_2(k, s, p, \alpha), \\ s &= 0, 1, \dots, k-1; \end{aligned}$$

2) при $q = \infty$

$$\begin{aligned} \|\psi_1^{(s)}\|_{(\infty, D(0, R), 0)} &= \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(k+s+\alpha)(2k-1+s+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)} R^{-(2(\alpha+1)+s)} A_3(k, s, \alpha), \\ s &= 0, 1, \dots, \\ \|\psi_2^{(s)}\|_{(\infty, D(0, R), 0)} &= \frac{1}{\pi} \frac{(2k-1-s+\alpha)}{\Gamma(k-s)} R^{-(2(\alpha+1)+s)} A_4(k, s, \alpha), \\ s &= 0, 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем ядро $\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, R)$, используя его разложение в ряд Фурье по системе полиномов

$$\begin{aligned} e_{k,n}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)(k+n+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n+1)}} R^{-(k+n+\alpha)} (R^2 - |z|^2)^{-\alpha} \\ &\quad \times \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{ (R^2 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} z^n \}, \end{aligned}$$

где $n = 0, 1, \dots$ (см. [5], [6]).

Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, R) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{k,n}(z) \overline{e_{k,n}(\zeta)} \\ &= \frac{1}{\pi} R^{-2(k+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(k+n+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n+1)} R^{-2n} (R^2 - |z|^2)^{-\alpha} \\ &\quad \times \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{(R^2 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} z^n\} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{n}{j} j! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \bar{\zeta}^{n-j} \zeta^{k-1-j} (R^2 - |\zeta|^2)^j.\end{aligned}$$

Обозначив сумму по j через I , преобразуем ее:

$$I = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k-1-\nu} R^{2\nu} \left(\sum_{j=\nu}^{k-1} \binom{k-1}{j} \binom{n}{j} \binom{j}{\nu} j! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \right) \bar{\zeta}^{n-\nu} \zeta^{k-1-\nu}.$$

Делая подстановку $j - \nu = m$ и воспользовавшись равенством

$$\binom{k-1}{\nu+m} \binom{\nu+m}{\nu} = \binom{k-1}{\nu} \binom{k-1-\nu}{m},$$

получаем

$$\begin{aligned}I &= \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k-1-\nu} R^{2\nu} \binom{k-1}{\nu} \left(\sum_{m=0}^{k-1-\nu} \binom{k-1-\nu}{m} \binom{n}{\nu+m} \right) \\ &\quad \times (\nu+m)! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+\nu+m+1)} \bar{\zeta}^{n-\nu} \zeta^{k-1-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k-1-\nu} R^{2\nu} \binom{k-1}{\nu} \binom{n}{\nu} \nu! \left(\sum_{m=0}^{k-1-\nu} \binom{k-1-\nu}{m} \binom{n-\nu}{n-\nu-m} \right) \\ &\quad \times m! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+\nu+m+1)} \bar{\zeta}^{n-\nu} \zeta^{k-1-\nu}.\end{aligned}$$

Рассмотрев функцию $(t^{n-\nu} t^{k-1+\alpha})^{(k-1-\nu)}$, как и при доказательстве леммы 3, легко установить справедливость равенства

$$\sum_{m=0}^{k-1-\nu} \binom{k-1-\nu}{m} \binom{n-\nu}{n-\nu-m} m! \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha+\nu+m+1)} = \frac{\Gamma(n+k+\alpha-\nu)}{\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

Тогда для суммы I окончательно получаем

$$I = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k-1-\nu} R^{2\nu} \binom{k-1}{\nu} \binom{n}{\nu} \nu! \frac{\Gamma(n+k+\alpha-\nu)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \bar{\zeta}^{n-\nu} \zeta^{k-1-\nu}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(z, \zeta, R) &= \frac{1}{\pi} R^{-2(k+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(k+n+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n+1)} R^{-2n} (R^2 - |z|^2)^{-\alpha} \\ &\quad \times \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \{ (R^2 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} z^n \} \\ &\quad \times \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k-1-\nu} R^{2\nu} \binom{k-1}{\nu} \binom{n}{\nu} \nu! \frac{\Gamma(n+k+\alpha-\nu)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \bar{\zeta}^{n-\nu} \zeta^{k-1-\nu}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\psi_1^{(s)}(z) &= \frac{1}{\pi} R^{-2(k+s+\alpha)} \frac{\Gamma(k+s+\alpha)(2k-1+s+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)} (R^2 - |z|^2)^{-\alpha} \\ &\quad \times \frac{\partial^{k-1}}{\partial \bar{z}^{k-1}} \{ (R^2 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} \bar{z}^{k-1+s} \}, \quad s = 0, 1, \dots, \\ \psi_2^{(s)}(z) &= \frac{1}{\pi} R^{-2(k+\alpha)} \frac{2k-1-s+\alpha}{\Gamma(k-s)} (R^2 - |z|^2)^{-\alpha} \\ &\quad \times \frac{\partial^{k-1}}{\partial \bar{z}^{k-1}} \{ (R^2 - z\bar{z})^{k-1+\alpha} \bar{z}^{k-1-s} \}, \quad s = 0, 1, \dots, k-1.\end{aligned}$$

Найдем теперь нормы функций $\psi_1^{(s)}$ и $\psi_2^{(s)}$. Для функции $\psi_1^{(s)}$, переходя к полярным координатам, имеем при $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned}\|\psi_1^{(s)}\|_{(q, D(0, R), \alpha)} &= \frac{1}{\pi^{1/p}} R^{-2(k+s+\alpha)} \frac{\Gamma(k+s+\alpha)(2k-1+s+\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(k+\alpha)} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{R^2} (R^2 - r)^\alpha |r^{-s/2} (R^2 - r)^{-\alpha} ((R^2 - r)^{k-1+\alpha} r^{k-1+s})^{(k-1)|q} dr \right\}^{1/q}.\end{aligned}$$

Сделав подстановку $t = r/R^2$, получаем первое равенство леммы 6. Второе равенство получаем таким же способом, вычислив норму функции $\psi_2^{(s)}$. Случай $q = \infty$ рассматриваем аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обозначим через $\mathcal{R}_m^\alpha(\zeta - z, t - z, \rho)$ воспроизводящее ядро для круга $D(z, \rho)$. Тогда, используя теорему 2, получаем

$$\frac{\partial^s f(z)}{\partial z^s} = \iint_{D(z, \rho)} (\rho^2 - |\zeta - z|^2)^\alpha f(\zeta) \psi^{(s)}(\zeta - z) d\sigma(\zeta),$$

где

$$\psi^{(s)}(\zeta - z) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} \overline{\mathcal{R}_m^\alpha(\zeta - z, t - z, \rho)} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^s}{\partial t^s} \overline{\mathcal{R}_k^{0,\alpha}(\zeta - z, t - z, \rho)}$$

при $t = z$.

Отсюда, применив неравенства Гёльдера и Минковского, а затем лемму 6, получаем первое неравенство. Второе неравенство доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $f \in \text{Lip}(\beta, p, G)$, $z \in G$. Тогда из теоремы 2 следует, что

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \iint_{D(z, \rho)} f(\zeta) \psi^{(1)}(\zeta - z) d\sigma(\zeta), \quad 0 = \iint_{D(z, \rho)} f(z) \psi^{(1)}(\zeta - z) d\sigma(\zeta).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right| &\leq \iint_{D(z, \rho)} |f(\zeta) - f(z)| |\psi^{(1)}(\zeta - z)| d\sigma(\zeta) \\ &\leq \left\{ \iint_{D(z, \rho)} |f(\zeta) - f(z)|^p d\sigma(\zeta) \right\}^{1/p} \left\{ \iint_{D(z, \rho)} |\psi^{(1)}(\zeta - z)|^q d\sigma(\zeta) \right\}^{1/q} \\ &\leq C \rho^\beta \left\{ \iint_{D(z, \rho)} |\psi^{(1)}(\zeta - z)|^q d\sigma(\zeta) \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Остается применить лемму 6 при $\alpha = 0$.

Оценку для $|\partial f / \partial \bar{z}|$ получаем аналогично.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть

$$\left| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \right| = O(\rho^{\beta-1-2/p}) \quad \text{при } \rho = \rho(z, \partial G) \rightarrow 0. \quad (18)$$

Если $\zeta \in D(z, R)$, $R < \rho$, то интегрируя по отрезку с концами в точках z и ζ , получаем

$$f(\zeta) - f(z) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\overline{\zeta - z}) \right) d\theta, \quad (19)$$

где $\partial f / \partial z$ и $\partial f / \partial \bar{z}$ вычислены в точке $t = z + \theta(\zeta - z)$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Из равенства (19), применив обобщенное неравенство Минковского и сделав замену переменных, получаем

$$\|f(\cdot) - f(z)\|_{(p, D(z, R))} \leq \int_0^1 \theta^{-\frac{2}{p}-1} \left\{ \iint_{D(z, \theta R)} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(t - z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\overline{t - z}) \right|^p d\sigma(t) \right\}^{1/p} d\theta, \quad (20)$$

где $\partial f / \partial z$ и $\partial f / \partial \bar{z}$ вычислены в точке $t \in D(z, \theta R)$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Обозначим через ρ_t расстояние от точки $t \in D(z, \theta R)$ до ∂G . Очевидно, что

$$\rho_t \geq \rho(z, \partial G) - |t - z| = \rho - |t - z|.$$

Тогда, учитывая (18) и переходя к полярным координатам, из (20) получаем

$$\|f(\cdot) - f(z)\|_{(p, D(z, R))} \leq C \rho^\beta \left(\frac{R}{\rho} \right)^{1+\frac{1}{p}} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{\frac{\theta R}{\rho}} (1-r)^{(\beta-1)p-2} dr \right\}^{1/p} d\theta.$$

Так как $\beta > 1/p$, то из последнего неравенства получаем требуемое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Balk M. B. Polyanalytic Functions. Berlin: Akad. Verlag, 1991.
- [2] Долженко Е. П. О граничном поведении компонент полианалитической функции // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 5. С. 585–588.
- [3] Долженко Е. П. Ограничном поведении компонент полианалитической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 821–834.
- [4] Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении решений обобщенного уравнения Коши–Римана // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 16–25.
- [5] Рамазанов А. К. Об ортогональных проекторах в пространствах полианалитических функций // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. матем., мех., информатика. 1998. Т. 4. № 1. С. 117–122.
- [6] Рамазанов А. К. Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 741–759.
- [7] Долженко Е. П., Данченко В. И. О граничном поведении производных полианалитических функций // Современные проблемы теории функций. Тезисы докл. 9-й Саратовской зимней школы. Саратов, 1997. С. 54.
- [8] Захарюта В. П., Юдович В. И. Общий вид линейного функционала в H'_p // УМН. 1964. Т. 19. № 2. С. 139–142.
- [9] Burbea J. The Bergman projection over plane regions // Ark. Mat. 1980. V. 18. № 2. P. 207–221.
- [10] Соловьев А. А. Оценки в L_p интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций // Сиб. матем. ж. 1985. Т. 26. № 3. С. 168–191.
- [11] Васин А. В. Проекторы на L^p -пространства полианалитических функций // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1991. Т. 190. С. 15–33.
- [12] Кошелев А. Д. О керн-функции для гильбертова пространства полианалитических функций в круге // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232. № 2. С. 277–279.
- [13] Вячеславов Н. С., Рамазанов А. К. Интерполяционные свойства рациональных функций наилучшего приближения в среднем квадратическом на окружности и в круге // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 2. С. 228–239.
- [14] Duren P. L. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970.
- [15] Забулёнис А. О дифференциальном операторе в пространствах аналитических функций // Литовский матем. ж. 1984. Т. 24. № 1. С. 53–58.
- [16] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathcal{C}^n$. М., 1984.

Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

Поступило

13.02.2001

Исправленный вариант

16.10.2001