Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 5, 765–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:37:47

УДК 517.518.8

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ И ИХ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ

И. И. Шарапудинов

Работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств линейных операторов, являющихся частичными суммами Фурье–Лежандра порядка n , к которым добавляются $2r$ слагаемых вида $\sum_{k=1}^{2r} a_k P_{n+k}(x)$, где $P_m(x)$ – полиномы Лежандра. Благодаря этому добавлению линейные операторы интерполируют функцию и ее производные на концах отрезка $[-1, 1]$, что уже при $r = 1$ позволяет значительно улучшить аппроксимативные свойства частичных сумм Фурье–Лежандра. Доказывается, что эти операторы осуществляют по порядку наилучшее равномерное алгебраическое приближение классов функций $W_r H_{L_2}^\mu$ и $A_q(B)$. С целью вычислительной реализации этих операторов построены их дискретные аналоги с помощью многочленов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке, также обладающих хорошими аппроксимативными свойствами.

Библиография: 8 названий.

Автор продолжает исследование аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов, введенных им ранее. Конструкция операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ основывается на разложениях Фурье–Лежандра и отличается от сумм Фурье–Лежандра лишь присутствием $2r$ новых слагаемых, а именно:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = S_n(f, x) + \sum_{k=1}^{2r} a_k P_{n+k}(x),$$

где $S_n(f, x)$ – сумма Фурье–Лежандра порядка n , $P_m(x)$ – полином Лежандра. Аналогично, на основе полиномов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке, построены операторы $\mathcal{X}_{n+2r, N}(f)$, представляющие собой дискретный аналог операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$.

Ранее исследовались аппроксимативные свойства $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ для функций $f \in S^r H_{\Delta}^\mu$, где $S^r H_{\Delta}^\mu$ – класс функций, обладающих переменной гладкостью на $[-1, 1]$ (“гладкость” f вне множества $\Delta = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \in (-1, 1)$ выше, чем в точках $a_j \in \Delta$). В настоящей статье показано, что среди алгебраических полиномов степени $n + 2r$ $\mathcal{Y}_{n+2r}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ дает приближение наилучшего порядка в равномерной метрике на хорошо известных классах $W^r H_{L_2}^\mu$, состоящих из функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00037а.

абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, а $f^{(r)} \in L_2(-1, 1)$ и удовлетворяет в $L_2(-1, 1)$ условию Липшица с показателем μ . Показано также, что $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ дает приближение наилучшего порядка на классах аналитических функций. Рассмотрены аппроксимативные свойства производных $\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)$ на классах гладких и аналитических функций.

Исследованы аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{X}_{n+2r, N}(f)$ и их производных, для которых установлены аналогичные результаты.

1. Введение

1.1. Оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$. Через $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) обозначим классические полиномы Якоби, нормированные условием $P_n^{\alpha, \beta}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$; в частности, при $\alpha = \beta = 0$ получим полиномы Лежандра $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$ ($n = 0, 1, \dots$).

Если $f = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-1, 1]$ $r - 1$ раз, а $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, то при каждом $k = 0, 1, \dots$ мы можем определить коэффициенты

$$\hat{f}_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt, \quad \hat{f}_{r,k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Рассмотрим следующий полином:

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = e_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_{r,n}(x), \quad (1.2)$$

где

$$e_{2r-1}(x) = e_{2r-1}(f, x) = \frac{(1-x^2)^r}{2r} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \left[\frac{f^{(\nu)}(-1)}{(1+x)^{r-\nu}} + \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(1)}{(1-x)^{r-\nu}} \right] \quad (1.3)$$

— алгебраический полином степени $2r - 1$, для которого

$$e_{2r-1}^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r-1, \quad (1.4)$$

а

$$\mathcal{F}_{r,n}(x) = \frac{(-1)^r (1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k[r]} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (1.5)$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1) \cdots (k-r+1)$.

Из (1.2)–(1.5) следует, что $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n + 2r$, удовлетворяющий условиям

$$\mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, r-1. \quad (1.6)$$

Полиномы $\mathcal{Y}_{n+2r}(x)$ были введены в работе автора [1] с помощью равенства

$$\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) = S_n(f, x) + \psi_{r,n}(x), \quad (1.7)$$

где

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k P_k(x)$$

– частная сумма Фурье–Лежандра порядка n , $\psi_{r,n}(x)$ – поправка вида

$$\psi_{r,n}(x) = \sum_{k=1}^{2r} a_k P_{n+k}(x),$$

которая обеспечивает выполнение условий (1.6); точнее, при $n \geq 2r$ имеет место равенство

$$\psi_{r,n}(x) = (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} \sum_{i=[(n+r-k)/2]+1}^r (-1)^i \sigma_i^k P_{k-r+2i}(x), \quad (1.8)$$

где $[a]$ – целая часть числа a ,

$$\sigma_i^k = \sigma_i^k(m) = \frac{2^m (k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)! (2k)^{[2m-2i]} (k-m+1)_i (k+3/2)_i (2k+1)}, \quad (1.9)$$

$(a)_0 = 1$, $(a)_i = a(a+1) \cdots (a+i-1)$ ($i \geq 1$). В частности, при $r = 1$ мы имеем

$$\mathcal{Y}_{n+2}(f, x) = S_n(f, x) + \frac{\hat{f}_{1,n}}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{\hat{f}_{1,n+1}}{2n+3} P_{n+2}(x). \quad (1.10)$$

Тот факт, что полином $\mathcal{Y}_{n+2r}(x)$ допускает представление (1.2), будет показан в п. 3 (см. (3.15)).

В работе [1] рассматривались аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}$ на классах $S^r H_{\Delta}^{\mu}(B)$, состоящих из функций, обладающих переменной гладкостью на $[-1, 1]$. (Точное определение классов $S^r H_{\Delta}^{\mu}(B)$ см. в [1]). В частности, было показано, что $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ осуществляет приближение наилучшего порядка на классах $S^r H_{\Delta}^{\mu}(B)$ среди алгебраических полиномов степени $n+2r$. В настоящей статье, в частности, показывается, что это свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r} = \mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ сохраняется и для хорошо известных классов $W^r H_{L_p}^{\mu}$. Кроме того, мы покажем, что оператор $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ осуществляет приближение наилучшего порядка среди полиномов степени $n+2r$ для классов аналитических на $[-1, 1]$ функций.

Перейдем к более точным формулировкам результатов, полученных в настоящей работе. Пусть $s \geq 0$, $p \geq 1$, $L_p^s = L_p^s(-1, 1)$ – пространство измеримых функций, заданных на $[-1, 1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^s} = \left(\int_{-1}^1 (1-x^2)^s |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$L_p = L_p^0(-1, 1)$, $W_{L_p}^r$ – класс, состоящий из функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, а $f^{(r)} \in L_p^s(-1, 1)$, $W^r H_{L_p}^{\mu}(B)$ – подкласс функций $f = f(x)$ из $W_{L_p}^r$, для которых $\omega(f^{(r)}, \delta)_{L_p} \leq B\delta^{\mu}$, $0 < \mu \leq 1$, где

$$\omega(g, \delta)_{L_p} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_{-1}^{1-h} |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

– модуль непрерывности функции $g = g(x) \in L_p$, $E_n(f)_{L_p^s}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_p^s(-1, 1)$ алгебраическими полиномами степени n , $C[-1, 1]$ – пространство непрерывных функций $f = f(x)$, заданных на $[-1, 1]$, для которых норма определяется обычным образом:

$$\|f\|_{C[-1,1]} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|,$$

$E_n(f)_{C[-1,1]}$ – наилучшее приближение $f \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени n .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $r \geq 1$, $f \in W_{L_2}^r$. Тогда имеет место равенство

$$f(x) = e_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где ряд

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x)$$

сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

Эта теорема, доказанная в п. 3 настоящей работы, показывает, что если $f \in W_{L_2}^r$, то $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к $f = f(x)$ в метрике пространства $C[-1, 1]$. Более того, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 \leq r \leq m$, $0 \leq \nu \leq r-1$, r, m целые, $f \in W_{L_2}^{m-r}$. Тогда при $-1 \leq x \leq 1$, $n+2r \geq m$ имеет место следующая оценка:

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq c(r, m)(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{L_2}^{m-r}}{(n+1)^{m-\nu-1/2}}.$$

В качестве следствия теоремы 3.2 доказано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} \|f - \mathcal{Y}_{n+2r}(f)\|_{C[-1,1]} \asymp \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]}.$$

Другими словами, операторы $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ осуществляют на классах $W^r H_{L_2}^\mu(1)$ приближение наилучшего порядка среди алгебраических полиномов степени $n+2r$.

Утверждение, аналогичное теореме 3.2, верно и для классов аналитических функций. Пусть $0 < q < 1$, $\mathcal{E}_q$ — эллипс с фокусами в точках -1 и 1 , сумма полуосей которого равна $1/q$. Через $A_q(B)$ мы обозначим класс функций $f = f(z)$, принимающих действительные значения на $[-1, 1]$, аналитических внутри эллипса $\mathcal{E}_q$ и ограниченных там по модулю числом B . В п. 4 доказана

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $n \geq 2r$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi} B \kappa_{r-\nu}}{(1-q^2)^2(1-q)} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{q^{n+r+2}}{n^{r-\nu-1}},$$

где $\kappa_{r-\nu}$ зависит лишь от весовой оценки для полиномов Якоби $P_n^{r-\nu, r-\nu}(x)$ (см. (2.11)).

Полагая $r = 1$, $\nu = 0$, из теоремы 4.1, в частности, выводим для $f \in A_q(B)$ следующую оценку:

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2}(f, x)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi} B \kappa_1}{(1-q^2)^2(1-q)} (1-x^2)^{1/4} q^{n+3}.$$

Интересно сопоставить эту оценку с тем фактом, что существуют функции $f \in A_q(B)$ (см. [1]), для которых

$$\|f - S_{n_k}(f)\|_{C[-1,1]} \geq c q^{n_k} \sqrt{n_k}$$

для бесконечного множества номеров $n_1, n_2, \dots$, в то время как из указанной выше оценки вытекает, что полином $\mathcal{Y}_{n+2}(f, x)$ дает приближение наилучшего порядка для $f \in A_q(B)$ среди алгебраических полиномов степени $n + 2$. И это несмотря, например, на то, что при $r = 1$ сумма Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$ отличается (см. (1.10)) от оператора $\mathcal{Y}_{n+2}(f)$ всего лишь слагаемым

$$\varphi_{1,n}(x) = \frac{\hat{f}_{1,n}}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{\hat{f}_{1,n+1}}{2n+3} P_{n+2}(x),$$

которое, тем самым, играет роль своего рода “спасательного круга” для аппроксимативных свойств сумм Фурье–Лежандра $S_n(f, x)$ в том смысле, что добавление $\varphi_{1,n}(x)$ к $S_n(f, x)$ превращает ее в оператор $\mathcal{Y}_{n+2}(f)$, который не только дает наилучший порядок приближения для многих известных классов функций, но и обладает лучшими, чем полином наилучшего приближения, локальными аппроксимативными свойствами [1], причем интерполирует приближаемую функцию на концах отрезка $[-1, 1]$ (см. (1.6)). Последнее свойство имеет важное значение в вопросах приближения кусочно гладких кривых, возникающих при обработке изображений. Отметим, что суммы Фурье–Чебышева по полиномам Чебышева 1-го рода этим важным свойством не обладают. Еще одно важное свойство операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ состоит в том, что они могут быть успешно применены (теорема 5.3 из [1] и теоремы 3.2 и 4.1 настоящей статьи) для одновременного приближения на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ при $r \geq 2, 1 \leq \nu \leq r - 1$. Отмеченные выше свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ делают их привлекательными как с точки зрения теории приближения функций, так и численного анализа. Что касается численного “построения” операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$, то эта задача существенно зависит от характера информации об аппроксимируемой функции f . Мы здесь сосредоточим свое внимание на том случае, когда в качестве информации о функции f заданы ее значения

$$f(x_j), \quad x_j = -1 + \frac{2j}{\Lambda - 1}, \quad j = 0, 1, \dots, \Lambda - 1, \quad (1.11)$$

где $2 \leq \Lambda$ – натуральное число, и нам требуется построить дискретный аналог оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$, исходя из дискретной информации (1.11). Положим $\Lambda = N + 2r$ и обозначим искомый оператор через $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$. Подчиним оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ нескольким естественным требованиям:

- 1) при $N \rightarrow \infty$ оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ должен стремиться к оператору $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f),$$

если f является достаточно гладкой функцией;

- 2) разностные свойства оператора $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ должны быть аналогичны дифференциальным свойствам оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$;
- 3) аппроксимативные свойства оператора $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ на сетке $\{-1 + 2j/(\Lambda - 1)\}_{j=0}^{\Lambda-1}$ должны быть аналогичны аппроксимативным свойствам оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ на $[-1, 1]$.

1.2. Оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$. Конструкция дискретного аналога для оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ опирается на полиномы Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x, M)$ ($0 \leq n \leq M-1$), которые при $\alpha, \beta > -1$ образуют ортогональную систему на сетке $\Omega_M = \{0, 1, \dots, M-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, M) = \frac{\Gamma(M)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(M+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(M-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(M-x)}; \quad (1.12)$$

точнее,

$$\sum_{x=0}^{M-1} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x, M) T_m^{\alpha,\beta}(x, M) = \delta_{nm} h_{n,M}^{\alpha,\beta}, \quad (1.13)$$

где

$$h_{n,M}^{\alpha,\beta} = \frac{(M+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(M-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (1.14)$$

$a^{[0]} = 1$, $a^{[n]} = a(a-1) \cdots (a-n+1)$. При $n=0$ произведение $(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$ следует заменить на $\Gamma(\alpha+\beta+2)$. Из (1.12)–(1.14) следует, что многочлены

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x, M) = \{h_{n,M}^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} T_n^{\alpha,\beta}(x, M), \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad \alpha, \beta > -1, \quad (1.15)$$

образуют ортонормированную систему на $\Omega_M = \{0, 1, \dots, M-1\}$ с весом $\mu(x)$, т.е.

$$\sum_{x=0}^{M-1} \mu(x) \tau_n^{\alpha,\beta}(x, M) \tau_m^{\alpha,\beta}(x, M) = \delta_{nm}.$$

При $\alpha = \beta = 0$ мы применяем обозначения $T_n(x, M) = T_n^{0,0}(x, M)$, $\tau_n(x, M) = \tau_n^{0,0}(x, M)$.

Пусть функция $f = f(x)$ определена на $[-1, 1]$ и нам заданы конечные значения (1.11). Для $N = \Lambda - 2r$ определим дискретную функцию $d = d(t)$, заданную на сетке $\overline{\Omega}_\Lambda = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N+r-1\}$ с помощью равенства

$$d(j-r) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N+2r-1, \quad (1.16)$$

и с ее помощью определим дискретную функцию

$$b(t) = b(t, r, N) = K \Delta^r d(t-r), \quad (1.17)$$

заданную на $\Omega_{N+r} = \{0, 1, \dots, N+r-1\}$, где постоянная $K \neq 0$. Для функции $d = d(t)$ определим дискретные коэффициенты Фурье–Чебышева по системе $\{\tau_n(x, N)\}_{k=0}^{N-1}$ равенством

$$\hat{d}_{k,N} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} d(j) \tau_k(j, N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.18)$$

а для $b = b(t)$ определим дискретные коэффициенты Фурье–Чебышева по системе $\{\tau_n(x, N+r)\}_{k=0}^{N+r-1}$ соответственно равенством

$$\hat{b}_{k,N+r} = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N+r-1} b(j) \tau_k(j, N+r), \quad k = 0, 1, \dots, N+r-1, \quad (1.19)$$

и рассмотрим следующий полином:

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x) = D_{2r-1}(x, N) + \mathcal{F}_{r,n}(x, N), \quad (1.20)$$

где

$$D_{2r-1}(d, t, N) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_r (N-t)_r}{(i-1)! (r-i)! (N+i)_r} \left[\frac{d(-i)}{t+i} + \frac{d(N-1+i)}{N-1+i-t} \right] \quad (1.21)$$

— алгебраический полином степени $2r-1$, интерполирующий функцию в узлах, принадлежащих множеству $A_{r,N} = \{-r, -r+1, \dots, -1\} \cup \{N, \dots, N-1+r\}$, а

$$\mathcal{F}_r(t, N) = \frac{(-1)^r (t+r)^{[r]} (N-t)_r}{(N+r-1)^{[r]} K} \sum_{k=r}^{N+r-1} \frac{\widehat{b}_{k,N+r}}{k^{[r]}} \frac{T_{k-r}^{r,r}(t, N)}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \quad (1.22)$$

Из (1.20)–(1.22) видим, что $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = d(t), \quad t \in A_{r,N}. \quad (1.23)$$

Операторы $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x)$ были введены в работе автора [2], в которой для полинома $D_{2r-1}(t) = D_{2r-1}(d, t, N)$, фигурирующего в равенстве (1.20), было дано иное представление, отличное от (1.21). Тот факт, что полином $D_{2r-1}(d, t, N)$ допускает представление (1.21), доказан в п. 6 настоящей работы (см. равенство (6.14)). Кроме того, отметим, что в [2] вместо функции $b = b(t)$, определенной равенством (1.17), использовалась функция $g = g(t)$, отличающаяся от $b = b(t)$ лишь постоянным множителем, который в силу (1.19)–(1.22) не влияет на определение полинома $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f, x)$.

Перейдем теперь к определению оператора $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$. Пусть функция $f = f(x)$ определена в узлах сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1 + 2j/(\Lambda-1)\}_{j=0}^{\Lambda-1}$, где $\Lambda = N+2r$. Тогда с помощью равенства (1.16) мы можем на сетке $\overline{\Omega}_\Lambda = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}$ определить дискретную функцию $d = d(t)$ и для нее построить оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$. Тогда в силу (1.16), (1.20)–(1.23)

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}\left(d, \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r\right) \quad (1.24)$$

представляет собой алгебраический полином степени $n+2r$, для которого

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j) = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq r-1, \quad N+r \leq j \leq N-1+2r. \quad (1.25)$$

В п. 6 доказано, что оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ удовлетворяет всем тем требованиям, перечисленным выше, которым мы предполагали подчинить дискретный аналог

оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$. В частности, установлены следующие результаты. Пусть $\delta = 2/(N-1+2r)$, Δ_δ^ν – конечная разность порядка ν с шагом δ . Тогда при $0 \leq \nu \leq r-1$

$$\begin{aligned} & \Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j) \\ &= \frac{(-1)^{r-\nu} 2^r j^{[r-\nu]} (N+r-j)_{r-\nu}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]} (N-1+2r)^r} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r} T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(j-r+\nu, N+\nu)}{k^{[r-\nu]} \sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \end{aligned}$$

Если, кроме того, $r-\nu \leq j \leq N-1+r$, то

$$\begin{aligned} & |\Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j)| \leq \eta_{N,r,\nu}(j-r) \Theta_{N,r,\nu}(j-r) \\ & \times \left[\frac{j-r+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{j-r}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \left(\frac{2}{N-1+2r} \right)^\nu \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{|\widehat{b}_{k,N+r}|}{k^{[r-\nu]}}, \end{aligned}$$

где функции $\eta_{N,r,\nu}(j)$, $\Theta_{N,r,\nu}(j)$ зависят лишь от свойств полиномов Чебышева $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x, M)$.

Отсюда в предположении ν -кратной непрерывной дифференцируемости функции f получим

$$\begin{aligned} & |f^{(\nu)}(x_j + \nu\delta\theta_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x_j + \nu\delta\theta_j)| \leq \eta_{N,r,\nu}(j-r) \Theta_{N,r,\nu}(j-r) \\ & \times \left[\frac{j-r+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{j-r}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{|\widehat{b}_{k,N+r}|}{k^{[r-\nu]}}, \end{aligned}$$

где $r-\nu \leq j \leq N-1+r$, $0 < \theta_j < 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$.

Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j)$ на классах аналитических функций характеризует теорема 6.1, доказанная в п. 6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Численный эксперимент, проведенный с помощью ЭВМ, показал, что величина

$$\max_{-\nu \leq t \leq N-1} \Theta_{N,r,\nu}(t)$$

не имеет тенденции к неограниченному росту при $N \rightarrow \infty$. Это обстоятельство в сочетании с теоремой 6.1 показывает, что операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ доставляют на классах $A_q(B)$ приближение наилучшего порядка в $C[-1, 1]$ при $n \rightarrow \infty$ по крайней мере для $n \leq \lambda\sqrt{N}$, где $\lambda > 0$. В самом деле, как показано в [3, с. 101], если $n \leq \lambda\sqrt{N}$, то

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f)\|_{C[-1,1]} \leq c(\lambda, r) \\ & \times \left[\max_{0 \leq j \leq N+2r-1} |f(x_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j)| + E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ и их производные легко реализуемы численно (см. (1.19)–(1.22) и (1.24)). Эти свойства вместе со свойством интерполяции вблизи точек -1 и 1 (см. (1.25)) делают операторы $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$ весьма удобным аппаратом приближения гладких и аналитических функций, значения которых заданы лишь в узлах равномерной сетки $\{x_j = -1 + 2j/(N+2r-1)\}_{j=0}^{N+2r-1}$.

2. Некоторые сведения о полиномах Якоби

Нам понадобятся некоторые свойства полиномов Якоби, которые мы определяем с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \kappa(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \kappa(x) (1-x^2)^n \}, \quad (2.1)$$

где $\kappa(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, α, β – произвольные действительные числа. Формула (2.1) является частным случаем следующего равенства:

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n! [m]} \frac{d^m}{dx^m} \{ (1-x)^{m+\alpha} (1+x)^{m+\beta} P_{n-m}^{m+\alpha, m+\beta}(x) \}, \quad (2.2)$$

где $n \geq m$. При $\alpha, \beta > -1$ имеет место соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta}(x) P_m^{\alpha, \beta}(x) \kappa(x) dx = h_n^{\alpha, \beta} \delta_{nm}, \quad (2.3)$$

где δ_{nk} – символ Кронекера,

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) 2^{\alpha+\beta+1}}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1) (2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (2.4)$$

Далее, имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dx} P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad (2.5)$$

$$P_n^{\alpha, \beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad (2.6)$$

$$P_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(x), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{\alpha, a}(x)}{P_n^{\alpha, a}(1)} &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n! (\alpha+1)_{n-2j} (n+2a+1)_{n-2j} (1/2)_j (a-\alpha)_j}{(n-2j)! (2j)! (a+1)_{n-2j} (n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \\ &\times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j (n-2j+\alpha+3/2)_j} \frac{P_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha, \alpha}(1)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $[b]$ – целая часть числа b ,

$$\frac{(1-x^2)^m}{2^m} P_{k-m}^{m, m}(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i^k P_{k-m+2i}(x), \quad (2.9)$$

где числа $\sigma_i^k = \sigma_i^k(r)$ определены равенством (1.6).

Равенства (2.1)–(2.7) хорошо известны [4], равенство (2.8) содержится в [5], а (2.9) доказано в [1].

Для $-1 \leq x \leq 1$ положим

$$\Theta_r(x, n) = (1-x^2)^{r/2+1/4} |P_n^{r, r}(x)| \{h_n^{r, r}\}^{-1/2}, \quad \Theta_r(x) = \sup_{n \geq 0} \Theta_r(x, n). \quad (2.10)$$

Хорошо известно [4], что

$$\kappa_r = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \Theta_r(x) < \infty. \quad (2.11)$$

3. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ на классах дифференцируемых функций

Начнем с рассмотрения аппроксимативных свойств операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ на классах $W_{L_2}^m$, где $0 < s = m - r$, $1 \leq r \leq m$. При определенных условиях на $f^{(r)}(x)$, а именно при $f \in S^r H_{\Delta}^{\mu}$, в работе [1] было показано (см. [1, равенство (5.20)]), что

$$f(x) = \mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\hat{f}_{r,0}}{r!}(1+x)^r + \mathcal{D}_r(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad (3.1)$$

где $\mathcal{D}_1(x) = 0$,

$$\mathcal{D}_r(x) = -\frac{1}{(r-2)!} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\hat{f}_{r,k}}{2k} d_{k,r}(x), \quad r \geq 2, \quad (3.2)$$

$$d_{k,r}(x) = \int_{-1}^x (1-t^2) P_{k-1}^{1,1}(t) (x-t)^{r-2} dt, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{Q}_{r-1}(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!} (x+1)^j, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{F}_r(x) = \frac{(-1)^r}{2^r} (1-x^2)^r \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k[r]} P_{k-r}^{r,r}(x), \quad (3.5)$$

причем ряд (3.5), фигурирующий в равенстве (3.1), сходится равномерно на $[-1, 1]$. Покажем, что равенство (3.1) останется в силе также для $f \in W_{L_2}^r$, $r \geq 1$.

Рассмотрим сначала случай $r = 1$, для которого равенство (3.1) принимает вид

$$f(x) = f(-1) + \hat{f}_{1,0}(1+x) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{1,k}}{k} P_{k-1}^{1,1}(x). \quad (3.6)$$

В первую очередь убедимся в том, что ряд, фигурирующий в правой части (3.6), абсолютно сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$. В самом деле, в силу оценки (2.11) имеем

$$(1-x^2)^{3/4} |P_{k-1}^{1,1}(x)| \leq ck^{-1/2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

здесь и далее $c, c(a, b, \dots, e)$ означают положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Стало быть,

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}_{1,k}|}{k} |P_{k-1}^{1,1}(x)| &\leq c(1-x^2)^{1/4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}_{1,k}|}{k^{3/2}} \\ &\leq c(1-x^2)^{1/4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \hat{f}_{1,k}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\ &\leq c \|f'\|_{L_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция

$$g(x) = f(-1) + \hat{f}_{1,0}(1+x) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{1,k}}{k} P_{k-1}^{1,1}(x) \quad (3.7)$$

непрерывна на $[-1, 1]$. Пользуясь формулой

$$\frac{1-x^2}{2} P_{k-1}^{1,1}(x) = \frac{k}{2k+1} [P_{k-1}(x) - P_{k+1}(x)], \quad (3.8)$$

вытекающей из (2.9) при $r = 1$, перепишем (3.7) еще так:

$$g(x) = f(-1) + \hat{f}_{1,0}(1+x) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{1,k}}{2k+1} [P_{k-1}(x) - P_{k+1}(x)]. \quad (3.9)$$

Вычислим коэффициенты Фурье–Лежандра этой функции, которые обозначим

$$\tilde{g}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 g(t) P_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 g(t) P_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \left[f(-1) + \hat{f}_{1,0}(1+t) - \frac{1}{3} \hat{f}_{1,1} \right] dt \\ &= \sqrt{2} \left[f(-1) + \hat{f}_{1,0} - \frac{1}{3} \hat{f}_{1,1} \right] = \sqrt{2} \left[f(-1) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(t) P_1(t) dt \right] \\ &= \sqrt{2} \left[f(-1) + \frac{1}{2} (f(1) - f(-1)) - \frac{1}{2} (f(1) + f(-1)) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 f(t) P_0(t) dt = \tilde{f}_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 g(t) P_1(t) dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 \left[\hat{f}_{1,0} t - \frac{\hat{f}_{1,2}}{5} t^2 \right] dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\hat{f}_{1,0} - \frac{\hat{f}_{1,2}}{5} \right] \int_{-1}^1 t^2 dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} \left[\hat{f}_{1,0} - \frac{\hat{f}_{1,2}}{5} \right] = \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(t) [P_0(t) - P_2(t)] dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 f(t) [P_0'(t) - P_2'(t)] dt = \frac{3}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 f(t) P_1(t) dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 f(t) P_1(t) dt = \tilde{f}_1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 g(t) P_n(t) dt \\ &= -\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\hat{f}_{1,n-1}}{2n-1} [P_{n-2}(t) - P_n(t)] P_n(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{f}_{1,n+1}}{2n+3} [P_n(t) - P_{n+2}(t)] P_n(t) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \left[\frac{\hat{f}_{1,n-1}}{2n-1} - \frac{\hat{f}_{1,n+1}}{2n+3} \right] \\
&= -\sqrt{\frac{2}{2n+1}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(t) [P_{n+1}(t) - P_{n-1}(t)] dt \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \int_{-1}^1 f(t) [P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)] dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} (2n+1) \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt \\
&= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt = \tilde{f}_n,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

так как $P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t) = (2n+1)P_n(t)$ при $n \geq 2$.

Из (3.11), (3.12) следует, что все коэффициенты Фурье–Лежандра двух непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. Следовательно, они тождественно совпадают. Таким образом, равенство (3.1), относящееся к случаю $r = 1$, доказано. Если же $r \geq 2$, рассматривая вместо $f(x)$ функцию $f^{(r-1)}(x)$, запишем равенство

$$f^{(r-1)}(x) = f^{(r-1)}(-1) + \hat{f}_{r,0}(1+x) - \frac{1-x^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k} P_{k-1}^{1,1}(x), \tag{3.14}$$

которое при $-1 \leq x \leq 1$ вытекает из уже доказанного случая. Причем ряд, фигурирующий в (3.14), сходится равномерно на $[-1, 1]$. Запишем далее формулу Тейлора

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \dots + \frac{f^{(r-2)}(-1)}{(r-2)!}(x+1)^{r-2} \\
&\quad + \frac{1}{(r-2)!} \int_{-1}^x f^{(r-1)}(t)(x-t)^{r-2} dt.
\end{aligned}$$

Подставляя вместо производной $f^{(r-1)}(t)$ под интегралом ее выражение из (3.14) и дословно повторяя рассуждения из работы [1] (которые касаются вывода равенства (3.1), исходя из (3.14)), мы убеждаемся в справедливости равенства (3.1) для $f \in W_{L_2}^r$, $r \geq 1$.

Сопоставляя (3.2)–(3.4), нетрудно заметить, что выражение

$$v_{2r-1}(x) = \mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\hat{f}_{r,0}}{r!}(1+x)^r + \mathcal{D}_r(x),$$

фигурирующее в (3.1), представляет собой алгебраический полином степени $2r-1$. Из (3.1) и (3.5) вытекает, что $v_{2r-1}^{(\nu)}(\pm 1) = f^{(\nu)}(\pm 1)$, $\nu = 0, 1, \dots, r-1$. Единственный полином, обладающий этим свойством, имеет вид (1.3), поэтому мы можем записать $v_{2r-1}(x) = e_{2r-1}(x)$. Сопоставляя этот факт с равенством (3.1), мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $r \geq 1$, $f \in W_{L_2}^r$. Тогда имеет место равенство

$$f(x) = e_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_r(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

в котором ряд $\mathcal{F}_r(x)$, определенный равенством (3.5), сходится равномерно относительно $x \in [-1, 1]$.

Далее, воспользовавшись вновь равенством $v_{2r-1}(x) = e_{2r-1}(x)$, можем записать

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\hat{f}_{r,0}}{r!}(1+x)^r + \mathcal{Q}_r(x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) \\ = e_{2r-1}(x) + \mathcal{F}_{r,n}(x) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ – полином, определенный равенством (1.2).

С другой стороны, в работе [1] было показано, что при $n \geq 2r$

$$\mathcal{Q}_{r-1}(x) + \frac{\hat{f}_{r,0}}{r!}(1+x)^r + \mathcal{Q}_r(x) + \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x) = S_n(f, x) + \psi_{r,n}(x),$$

где $S_n(f, x)$ – частная сумма Фурье–Лежандра функции f порядка n , а $\psi_{r,n}(x)$ определена равенством (1.8). Левая часть этого равенства в силу (3.15) представляет собой $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$, и, тем самым, приходим к равенству (1.7), которое в [1] служило определением полинома $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$. Равенство (3.15) определяет полином $\mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)$ для любого $n \geq 0$.

Положим

$$R_{r,n}(x) = \frac{(-1)^r(1-x^2)^r}{2^r} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r]}} P_{k-r}^{r,r}(x). \quad (3.16)$$

Тогда, сопоставляя (3.15) с теоремой 3.1, получим

$$f(x) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x) + R_{r,n}(x), \quad (3.17)$$

где $f \in W_{L_2}^r$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 \leq r \leq m$, r, m целые, $0 \leq \nu \leq r-1$, $f \in W_{L_2}^{m-r}$. Тогда при $-1 \leq x \leq 1$, $n \geq m-2r$ имеет место следующая оценка:

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq c(r, m)(1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{L_2^m}}{(n+1)^{m-\nu-1/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.16) и (3.17) с учетом (2.2) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| &= |R_{r,n}^{(\nu)}(x)| = \left| \frac{(1-x^2)^{r-\nu}}{2^{r-\nu}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} P_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{r-\nu}} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \Theta_{r-\nu}(x) \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{|\hat{f}_{r,k}|}{k^{[r-\nu]}} \{h_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu}\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Рассмотрим $\hat{f}_{r,k}$. В силу формулы (2.2) при $k \geq m-r$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{r,k} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f^{(r)}(t) P_k(t) dt \\ &= \frac{2k+1}{2^{m-r+1} k^{[m-r]}} \int_{-1}^1 f^{(m)}(t) (1-t^2)^{m-r} P_{k+r-m}^{m-r, m-r}(t) dt \\ &= \frac{(2k+1) \sqrt{h_{k+r-m}^{m-r, m-r}}}{2^{m-r+1} k^{[m-r]}} m-r \tilde{f}_{k+r-m}^{(m)},\end{aligned}\quad (3.19)$$

где

$$m-r \tilde{f}_{k+r-m}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{h_{k+r-m}^{m-r, m-r}}} \int_{-1}^1 f^{(m)}(t) (1-t^2)^{m-r} P_{k+r-m}^{m-r, m-r}(t) dt \quad (3.20)$$

$-(k+r-m)$ -й коэффициент Фурье функции $f^{(m)}(x)$ по ультрасферическим полиномам $P_{\nu}^{m-r, m-r}(x)$. Подставляя (3.19) в (3.18), получим ($n \geq m-2r$)

$$\begin{aligned}|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| &\leq \frac{1}{2^{r-\nu}} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{\Theta_{r-\nu}(x)}{2^{m-r+1}} \\ &\times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} (h_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu} h_{k+r-m}^{m-r, m-r})^{1/2} \frac{2k+1}{k^{[m-r]} k^{[r-\nu]}} |m-r \tilde{f}_{k+r-m}^{(m)}|. \quad (3.21)\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n+r+1}^{\infty} (h_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu} h_{k+r-m}^{m-r, m-r})^{1/2} \frac{2k+1}{k^{[m-r]} k^{[r-\nu]}} |m-r \tilde{f}_{k+r-m}^{(m)}| \\ &\leq \left\{ \sum_{k=n+r+1}^{\infty} h_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu} h_{k+r-m}^{m-r, m-r} \left(\frac{2k+1}{k^{[m-r]} k^{[r-\nu]}} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\times \left\{ \sum_{k=n+r+1}^{\infty} (m-r \tilde{f}_{k+r-m}^{(m)})^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_{k=n+r+1}^{\infty} h_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu} h_{k+r-m}^{m-r, m-r} \left(\frac{2k+1}{k^{[m-r]} k^{[r-\nu]}} \right)^2 \right\}^{1/2} E_{n+2r-m}(f^{(m)})_{L_2^{m-r}}. \quad (3.22)\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (2.4)

$$h_{k-r+\nu}^{r-\nu, r-\nu} h_{k+r-m}^{m-r, m-r} \left(\frac{2k+1}{k^{[m-r]} k^{[r-\nu]}} \right)^2 \leq c(r, m) k^{2(\nu-m)}. \quad (3.23)$$

Сопоставляя (2.11) с (3.21)–(2.23), приходим к утверждению теоремы 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < \mu \leq 1$. Тогда

$$\sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} \|f - \mathcal{Y}_{n+2r}(f)\|_{C[-1,1]} \asymp \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \asymp \frac{1}{(n+1)^{r+\mu-1/2}},$$

где $a_n \asymp b_n$ ($n = 0, 1, \dots$) означает, что найдутся положительные постоянные c_1 и c_2 , для которых $c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n$ ($n = 0, 1, \dots$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.2 следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} &\leq \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} \|f - \mathcal{Y}_{n+2r}(f)\|_{C[-1,1]} \\ &\leq \frac{c(r, \mu)}{(n+1)^{r-1/2}} \sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+r}(f^{(r)})_{L_2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Далее, в силу теоремы Джексона

$$\sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+r}(f^{(r)})_{L_2} \leq c(r, \mu)(n+1)^{-\mu}. \quad (3.25)$$

С другой стороны, рассмотрим функцию $f_{r,\mu} = f_{r,\mu}(x) = A_{r,\mu} x^{r-1} |x|^{\mu+1/2}$, где константа $A_{r,\mu} > 0$ выбрана так, что $f_{r,\mu} \in W^r H_{L_2}^\mu(1)$. Известно (см. [6, п. 7.2.2]), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{r+\mu-1/2} E_{n+2r}(f_{r,\mu})_{C[-1,1]} > 0, \quad -\frac{1}{2} < \mu < \frac{3}{2},$$

поэтому

$$\sup_{f \in W^r H_{L_2}^\mu(1)} E_{n+2r}(f)_{C[-1,1]} \geq \frac{c(r, \mu)}{(n+1)^{r+\mu-1/2}}. \quad (3.26)$$

Сопоставляя (3.24)–(3.26), приходим к утверждению следствия 3.1.

4. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ на классах аналитических функций

Пусть $0 < q < 1$, $\mathcal{E}_q$ – эллипс с фокусами в точках -1 и 1 , сумма полуосей которого равна $1/q$. Через $A_q(B)$ мы обозначим класс функций $f = f(z)$, принимающих действительные значения на $[-1, 1]$, аналитических внутри эллипса $\mathcal{E}_q$ и ограниченных там по модулю числом B . Хорошо известно [6, с. 144], что если $f \in A_q(B)$, то для коэффициентов Фурье–Чебышева этой функции

$$a_k(f) = \{h_k^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} \int_{-1}^1 \frac{f(t) P_k^{-1/2, -1/2}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (4.1)$$

имеет место оценка

$$|a_k(f)| \leq \sqrt{2\pi} B q^k \quad (4.2)$$

и, как следствие,

$$E_n(f)_{C[-1,1]} \leq \frac{2B}{1-q} q^{n+1}. \quad (4.3)$$

Как показано в [7, с. 272], эта оценка на всем классе $A_q(B)$ неулучшаема по порядку. В настоящем пункте мы покажем (теорема 4.1), что среди алгебраических полиномов степени $n + 2r$ $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ доставляют приближение наилучшего порядка на классе $A_q(B)$. Более того, если $f \in A_q(B)$, то

$$|f(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}(f, x)| \leq \frac{c(r, q, B)(1 - x^2)^{r/2-1/4} q^n}{n^{r-1}}. \quad (4.4)$$

Предварительно рассмотрим вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4.1. Пусть $k = n + 2j$, $j = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} & \{h_{k+1}^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} \int_{-1}^1 P_k^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t) P_n(t) dt \\ &= 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \frac{(2n+2)(2n+4) \cdots (2n+2j)}{(2n+3)(2n+5) \cdots (2n+2j+1)}, \end{aligned}$$

причем если $j = 0$, то последнюю дробь следует заменить на 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $a = 1/2$, $\alpha = 0$, воспользуемся равенством (2.8). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{P_k^{1/2, 1/2}(t)}{P_k^{1/2, 1/2}(1)} &= \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \frac{k! (1)_{k-2\nu} (k+2)_{k-2\nu} (1/2)_{\nu} (1/2)_{\nu} P_{k-2\nu}(t)}{(k-2\nu)! (2\nu)! (3/2)_{k-2\nu} (k-2\nu+1)_{k-2\nu} (k-2\nu+3/2)_{\nu}^2} \\ &= \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \frac{k! (k+2)_{k-2\nu} (1/2)_{\nu}^2 P_{k-2\nu}(t)}{(2\nu)! (3/2)_{k-2\nu} (k-2\nu+1)_{k-2\nu} (k-2\nu+3/2)_{\nu}^2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим ($k = n + 2j$)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n(t) dt &= \frac{k! (k+2)_n (1/2)_j^2 P_k^{1/2, 1/2}(1)}{(2j)! (3/2)_n (n+1)_n (n+3/2)_j^2} \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt \\ &= \frac{2(k+2)_n (1/2)_j^2 \Gamma(k+3/2)}{(2j)! (3/2)_n (n+1)_n (n+3/2)_j^2 (2n+1) \Gamma(3/2)} \\ &= \frac{2\Gamma(n+1) \Gamma(k+n+2) \Gamma(k+3/2) (1/2)_j^2}{\Gamma(k+2) \Gamma(2n+2) \Gamma(n+3/2) (2j)! (n+3/2)_j^2}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Далее, из (2.4) имеем

$$\{h_{k+1}^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} = \sqrt{2} \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+3/2)}. \quad (4.6)$$

Кроме того,

$$\left(\frac{1}{2}\right)_j^2 = \frac{1}{\pi} \left(\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right)\right)^2, \quad (2j)! = \frac{2^{2j}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(j+1) \Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right), \quad (4.7)$$

$$\Gamma(k+n+2) = \Gamma(2n+2j+2) = \Gamma(2n+2)(2n+2)_{2j}, \quad (4.8)$$

$$2^{2j} \left(n + \frac{3}{2}\right)_j^2 = [(2n+3)(2n+5) \cdots (2n+2j+1)]^2, \quad (4.9)$$

$$\frac{(2n+2)_{2j}}{2^{2j} (n+3/2)_j^2} = \frac{(2n+2)(2n+4) \cdots (2n+2j)}{(2n+3)(2n+5) \cdots (2n+2j+1)}. \quad (4.10)$$

Сопоставляя (4.5)–(4.10), приходим к утверждению леммы 4.1.

ЛЕММА 4.2. Если $f \in A_q(B)$, то

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,n} &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f'(t) P_n(t) dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) \frac{(n+2j+1)\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \\ &\quad \times \frac{(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2j)}{(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2j+1)},\end{aligned}$$

причем если $j=0$, то последнюю дробь под суммой следует заменить на 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in A_q(B)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \{h_k^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} P_k^{-1/2, -1/2}(x)$$

и в силу равенства (2.5)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \{h_k^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} \frac{k}{2} P_{k-1}^{1/2, 1/2}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} \{h_{k+1}^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} P_k^{1/2, 1/2}(x).\end{aligned}$$

Отсюда и из симметрии (2.7)

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,n} &= \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} \{h_{k+1}^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n(t) dt \\ &= \frac{2n+1}{2} \sum_{\substack{k=n+2j \\ j \geq 0}} a_{k+1}(f) \frac{k+1}{2} \{h_{k+1}^{-1/2, -1/2}\}^{-1/2} \int_{-1}^1 P_k^{1/2, 1/2}(t) P_n(t) dt.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Теперь воспользуемся леммой 4.1. Тогда из (4.11) имеем

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,n} &= \frac{2n+1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) (n+2j+1) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \\ &\quad \times \frac{(2n+2)\cdots(2n+2j)}{(2n+3)\cdots(2n+2j+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+2j+1}(f) (n+2j+1) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \\ &\quad \times \frac{(2n+2)\cdots(2n+2j)}{(2n+3)\cdots(2n+2j+1)},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $r \geq 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $n \geq 2r$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $-1 \leq x \leq 1$. Тогда

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi} B \kappa_{r-\nu}}{(1-q^2)^2(1-q)} \frac{q^{n+r+2}}{n^{r-\nu-1}} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.17) с учетом (2.2) имеем

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x) &= R_{r-\nu, n+\nu}(f^{(\nu)}, x) \\ &= \frac{(-1)^{r-\nu}(1-x^2)^{r-\nu}}{2^{r-\nu}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\hat{f}_{r,k}}{k^{[r-\nu]}} P_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(x). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из (4.12) с учетом (2.10) и (2.11) имеем

$$|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq \frac{\kappa_{r-\nu}}{2^{r-\nu}} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{|\hat{f}_{r,k}|}{k^{[r-\nu]}} \{h_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}\}^{1/2}. \quad (4.13)$$

Воспользуемся теперь леммой 4.2, в которой вместо f фигурирует $f^{(r-1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1,k}^{(r-1)} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)} \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1}(f^{(r-1)})(n+2j+1) \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+1)} \\ &\quad \times \frac{(2k+2)(2k+4) \cdots (2k+2j)}{(2k+3)(2k+5) \cdots (2k+2j+1)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Кроме того, из (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \{h_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}\}^{1/2} &= \left\{ \frac{2^{2r-2\nu+1}}{2k+1} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\nu-r+1)\Gamma(k+r-\nu+1)} \right\}^{1/2} \\ &= \left(\frac{2^{2r-2\nu+1} k^{[r-\nu]}}{(2k+1)(k+1)_{r-\nu}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставляя (4.14) и (4.15) в (4.13), находим $(\Gamma(j+1/2)/\Gamma(j+1) < \sqrt{\pi})$

$$\begin{aligned} &|f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \\ &\leq \kappa_{r-\nu} 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \\ &\quad \times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)} \frac{1}{k^{[r-\nu]}} \left(\frac{2k^{[r-\nu]}}{(2k+1)(k+1)_{r-\nu}} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+2j+1}(f^{(r-1)}) \frac{(k+2j+1)\Gamma(j+1/2)}{2\Gamma(j+1)} \frac{(2k+2)(2k+4) \cdots (2k+2j)}{(2k+3)(2k+5) \cdots (2k+2j+1)} \right| \\ &\leq (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} 2\kappa_{r-\nu} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)} \left(\frac{k}{(k+1)(2k+1)} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \frac{1}{k^{[r-\nu]}} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{k+2j+1}(f^{(r-1)})| (k+2j+1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Если $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, то в силу (4.2)

$$|a_{k+2j+1}(f^{(r-1)})| \leq \sqrt{2\pi} B q^{k+2j+1}. \quad (4.17)$$

Из (4.16) и (4.17) получаем

$$\begin{aligned} & |f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \\ & \leq (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} 2\sqrt{2\pi} B \kappa_{r-\nu} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)} \left(\frac{k}{(k+1)(2k+1)} \right)^{1/2} \\ & \times \frac{1}{k^{[r-\nu]}} \sum_{j=0}^{\infty} q^{k+2j+1} (k+2j+1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Далее,

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{k+2j+1} (k+2j+1) = \frac{q^{k+1}(k+1-(k-1)q^2)}{(1-q^2)^2} < \frac{q^{k+1}(k+1)}{(1-q^2)^2},$$

поэтому из (4.18) выводим

$$\begin{aligned} & |f^{(\nu)}(x) - \mathcal{Y}_{n+2r}^{(\nu)}(f, x)| \leq (1-x^2)^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{2\sqrt{2\pi} B \kappa_{r-\nu}}{(1-q^2)^2} \\ & \times \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)} \left(\frac{k+1}{k(2k+1)} \right)^{1/2} \frac{q^{k+1}}{(k-1)^{[r-\nu-1]}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В свою очередь, в силу формулы Стирлинга

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)} \left(\frac{k+1}{k(2k+1)} \right)^{1/2} < 1. \quad (4.20)$$

Сопоставляя (4.19) и (4.20), приходим к утверждению теоремы 4.1.

5. Некоторые сведения о многочленах Чебышева, ортогональных на равномерной сетке

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства многочленов Чебышева $T_n^{\alpha, \beta}(x, M)$ ($0 \leq n \leq M-1$), определенных равенствами (1.12)–(1.14):

- *разностный аналог формулы Родрига*

$$\mu(x) T_n^{\alpha, \beta}(x, M) = \frac{(-1)^n}{n! (M-1)^{[n]}} \Delta^n \{ (M-x+\alpha)_n x^{[n]} \mu(x) \}, \quad (5.1)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$, при этом формула (5.1) определяет многочлен $T_n^{\alpha, \beta}(x, M)$ для произвольных действительных α и β ;

- *конечная разность первого порядка*

$$\Delta T_n^{\alpha, \beta}(x, M) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{M-1} T_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x, M-1); \quad (5.2)$$

- *симметрия*

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = (-1)^n T_n^{\beta,\alpha}(M - 1 - x, M); \quad (5.3)$$

- *если α и β целые, $-n \leq \beta \leq -1$, $-(n + \beta) \leq \alpha \leq -1$, то $(M \geq 2)$*

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = \frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(M - x - 1)^{[-\alpha]}}{(M - 1)^{[-\beta]}(M - 1 + \beta)^{[-\alpha]}} T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x + \beta, M + \alpha + \beta). \quad (5.4)$$

Подробное доказательство свойств (5.1)–(5.3) содержится в [3] (см. также [8]). Свойство (5.4) отмечалось в [2].

Пусть $\Omega_M = \{0, 1, \dots, M - 1\}$, $\ell_2(\Omega_M, \mu)$ – евклидово пространство, состоящее из дискретных функций $f: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}$. Скалярное произведение двух функций $f, g \in \ell_2(\Omega_M, \mu)$ определяется равенством

$$(f, g) = \sum_{j=0}^{M-1} f(j)g(j)\mu(j).$$

В силу (1.15) система $\{\tau_m^{\alpha,\beta}(x, M)\}_{m=0}^{M-1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\ell_2(\Omega_M, \mu)$. В случае, когда $\alpha = \beta = 0$ (т.е. когда $\mu(x) = 2/M$), будем писать $\ell_2(\Omega_M, \mu) = \ell_2(\Omega_M)$, $\tau_n(x, M) = \tau_n^{0,0}(x, M)$, $T_n(x, M) = T_n^{0,0}(x, M)$.

Если $n \geq M$, то для удобства положим

$$T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = x^{[M]}; \quad (5.5)$$

следовательно, если $n \geq M$, то $T_n^{\alpha,\beta}(x, M) = 0$ при всех $x \in \Omega_M$. Если $0 \leq m \leq k$, $x \in \Omega_N$, то имеет место *равенство*

$$\frac{(x+m)^{[m]}}{(N+m)^{[m]}} \frac{(N-x)_m}{(N+m+1)_m} T_{k-m}^{m,m}(x, N) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i^k T_{k-m+2i}(x, N), \quad (5.6)$$

в котором при $k - m + 2i \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= \sigma_i^k(m, N) = \frac{(N+m+k)^{[k-m]}(N+m-k-1)^{[2i]}}{(N+k-m+2i)^{[k-m+2i]}} \\ &\quad \times \frac{(k^{[m]})^2 m^{[i]} (1/2)_i (2k+1-2m+4i)}{(2i)! (2k)^{[2m-2i]} (k-m+1)_i (k+3/2)_i (2k+1)}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

а если $k - m + 2i > N - 1$, то $\sigma_i^k(m, N) = 0$.

Равенства (5.6) и (5.7) доказаны в работе автора [2]. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 5.1. *Если $1 \leq m \leq k \leq N - 1 + m$, $0 \leq \nu \leq m$, то*

$$\begin{aligned} \Delta^\nu \{ &(x+m)^{[m]}(N-x)_m T_{k-m}^{m,m}(x, N) \} \\ &= (-1)^\nu (k+\nu-m)^{[\nu]} (N+\nu-1)^{[\nu]} (x+m)^{[m-\nu]} \\ &\quad \times (N-x)_{m-\nu} T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x+\nu, N+\nu). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\alpha = \beta = -m$, $M = L + m$, $n = k + m$, из (5.4) имеем

$$T_{k+m}^{-m, -m}(x, L + m) = \frac{(-1)^m x^{[m]} (L - x)_m}{(L + m - 1)^{[m]} (L - 1)^{[m]}} T_{k-m}^{m, m}(x - m, L - m). \quad (5.8)$$

С другой стороны, повторное применение формулы (5.2) ν раз при $\alpha = \beta = -m$, $n = k + m$, $M = L + m$ дает

$$\begin{aligned} \Delta^\nu T_{k+m}^{-m, -m}(x, L + m) &= \frac{(k + \nu - m)^{[\nu]}}{(L + m - 1)^{[\nu]}} T_{k+m-\nu}^{\nu-m, \nu-m}(x, L + m - \nu) \\ &= \frac{(k + \nu - m)^{[\nu]}}{(L + m - 1)^{[\nu]}} \frac{(-1)^{m-\nu} x^{[m-\nu]} (L - x)_{m-\nu}}{(L + m - \nu - 1)^{[m-\nu]} (L - 1)^{[m-\nu]}} \\ &\quad \times T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x - m + \nu, L + \nu - m). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Сопоставляя (5.8) и (5.9), имеем

$$\begin{aligned} \Delta^\nu \{ (x)^{[m]} (L - x)_m T_{k-m}^{m, m}(x - m, L - m) \} \\ = (-1)^\nu (k + \nu - m)^{[\nu]} (L - m + \nu - 1)^{[\nu]} (x)^{[m-\nu]} \\ \times (L - x)_{m-\nu} T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x + \nu - m, L + \nu - m). \end{aligned}$$

Полагая здесь $L = N + m$ и заменяя x на $x + m$, находим

$$\begin{aligned} \Delta^\nu \{ (x + m)^{[m]} (N - x)_m T_{k-m}^{m, m}(x, N) \} &= (-1)^\nu (k + \nu - m)^{[\nu]} (N + \nu - 1)^{[\nu]} \\ &\times (x + m)^{[m-\nu]} (N - x)_{m-\nu} T_{k+\nu-m}^{m-\nu, m-\nu}(x + \nu, N + \nu). \end{aligned}$$

Лемма 5.1 доказана.

Пусть дискретная функция $d = d(t)$ задана на сетке

$$\Omega_{N+2r} = \{0, 1, \dots, N - 1, N, \dots, N - 1 + 2r\}.$$

Тогда мы можем определить коэффициенты Фурье–Чебышева

$$\hat{d}_{k, N+2r}^\alpha = \sum_{j=0}^{N-1+2r} \mu(j) d(j) \tau_k^{\alpha, \alpha}(j, N + 2r), \quad 0 \leq k \leq N + 2r - 1, \quad (5.10)$$

и составить дискретный ряд Фурье–Чебышева функции $d \in \ell_2(\Omega_{N+2r})$:

$$d(t) = \sum_{k=0}^{N-1+2r} \hat{d}_{k, N+2r}^\alpha \tau_k^{\alpha, \alpha}(t, N + 2r), \quad t \in \Omega_{N+2r}, \quad (5.11)$$

или, воспользовавшись равенством (1.15),

$$d(t) = \sum_{k=0}^{N-1+2r} \frac{\hat{d}_{k, N+2r}^\alpha}{\sqrt{h_{k, N+2r}^{\alpha, \alpha}}} T_k^{\alpha, \alpha}(t, N + 2r), \quad t \in \Omega_{N+2r}. \quad (5.12)$$

Теперь обратимся к равенству (5.2), из которого в сочетании с (5.12) получим

$$\Delta^r d(t) = \sum_{k=r}^{N-1+2r} \frac{\hat{d}_{k,N+2r}^\alpha}{\sqrt{h_{k,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(k+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} T_{k-r}^{\alpha+r,\alpha+r}(t, N+r), \quad (5.13)$$

где $0 \leq t \leq N-1+r$. С другой стороны, мы можем записать

$$\Delta^r d(t) = \sum_{l=0}^{N-1+r} \hat{d}_{r,l,N+r} \tau_l(t, N+r), \quad (5.14)$$

где $\tau_l(t, N+r) = \tau_l^{0,0}(t, N+r)$,

$$\hat{d}_{r,l,N+r} = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \Delta^r d(j) \tau_l(j, N+r) = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \Delta^r d(j) \frac{T_l(j, N+r)}{\sqrt{h_{l,N+r}^{0,0}}}. \quad (5.15)$$

Подставим в (5.15) вместо функции $\Delta^r d(j)$ ее значение из (5.13). Тогда

$$\begin{aligned} \hat{d}_{r,l,N+r} &= \frac{2}{N+r} \sum_{k=r}^{N-1+2r} \frac{\hat{d}_{k,N+2r}^\alpha}{\sqrt{h_{k,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(k+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} \sum_{j=0}^{N-1+r} T_{k-r}^{\alpha+r,\alpha+r}(j, N+r) \frac{T_l(j, N+r)}{\sqrt{h_{l,N+r}^{0,0}}} \\ &= \frac{2}{(N+r)\sqrt{h_{l,N+r}^{0,0}}} \sum_{s=0}^{[N-1+r-l]} \frac{\hat{d}_{l+r+2s,N+2r}^\alpha}{\sqrt{h_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(l+r+2s+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} b_{r,s}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где

$$b_{r,s} = \sum_{j=0}^{N-1+r} T_{l+2s}^{\alpha+r,\alpha+r}(j, N+r) T_l(j, N+r).$$

Для вычисления этой суммы мы воспользуемся равенством [5]

$$\begin{aligned} &\frac{T_n^{a,a}(x, N+r)}{T_n^{a,a}(N-1+r, N+r)} \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n! (b+1)_{n-2j} (n+2a+1)_{n-2j} (1/2)_j (a-b)_j}{(n-2j)! (2j)! (a+1)_{n-2j} (n-2j+2b+1)_{n-2j}} \\ &\quad \times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j (n-2j+b+3/2)_j} \frac{T_{n-2j}^{b,b}(x, N+r)}{T_{n-2j}^{b,b}(N-1+r, N+r)}, \end{aligned}$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Отсюда, полагая $b=0$, $a=\alpha+r$, $n=l+2s$, получим

$$\begin{aligned} b_{l,s} &= T_{l+2s}^{\alpha+r,\alpha+r}(N-1+r, N+r) \\ &\quad \times \frac{(l+2s)! l! (l+2s+2\alpha+2r+1)_l (1/2)_s (\alpha+r)_s}{l! (2s)! (\alpha+r+1)_l (l+1)_l (l+\alpha+r+1)_s (l+3/2)_s} \frac{N+r}{2} h_{l,N+r}^{0,0} \\ &= \frac{(l+2s+2\alpha+2r+1)_l (1/2)_s (\alpha+r)_s \Gamma(l+2s+\alpha+r+1) h_{l,N+r}^{0,0}}{(2s)! (\alpha+r+1)_l (l+1)_l (l+\alpha+r+1)_s (l+3/2)_s \Gamma(\alpha+r+1)} \frac{N+r}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в (5.16), приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\alpha > -1$, $r \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{d}_{r,l,N+r} = & \sum_{s=0}^{[(N-1+r-l)/2]} \sqrt{\frac{h_{l,N+r}^{0,0}}{h_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha,\alpha}}} \frac{(l+r+2s+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} \\ & \times \frac{(l+2s+2\alpha+2r+1)_l (1/2)_s (\alpha+r)_s \Gamma(l+2s+\alpha+r+1) \widehat{d}_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha}}{(2s)! (\alpha+r+1)_l (l+1)_l (l+\alpha+r+1)_s (l+3/2)_s \Gamma(\alpha+r+1)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.3. Пусть $\alpha > -1$, $r \geq 1$, $0 < q < 1$, $B > 0$, $d = d(t)$ – дискретная функция, заданная на Ω_{N+2r} . Тогда если

$$|\widehat{d}_{k,N+2r}^{\alpha}| \leq \frac{Bq^k}{(k+1)^{r-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N+2r-1, \quad (5.17)$$

то

$$|\widehat{d}_{r,l,N+r}| \leq c(\alpha, r, q) B \frac{(l+1)q^l}{(N+2r-1)^r}, \quad l = 0, 1, \dots, N+r-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (1.14) имеем

$$\begin{aligned} \frac{h_{l,N+r}^{0,0}}{h_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha,\alpha}} = & \frac{2^{-2\alpha} (2l+2r+4s+2\alpha+1) \Gamma(l+2s+2\alpha+r+1) (l+r+2s)!}{(2l+1) (\Gamma(l+2s+\alpha+r+1))^2} \\ & \times \frac{(N+r+l)^{[l]} (N+2r-1)^{[l+r+2s]}}{(N+r-1)^{[l]} (N+3r+l+2s+2\alpha)^{[l+r+2s]}}, \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} & \frac{(N+r+l)^{[l]} (N+2r-1)^{[l+r+2s]}}{(N+r-1)^{[l]} (N+3r+l+2s+2\alpha)^{[l+r+2s]}} \\ & = \frac{(N+r+l)^{[l]}}{(N+3r+l+2s+2\alpha)^{[l]}} \frac{(N+2r-1)^{[r+2s]}}{(N+3r+2s+2\alpha)^{[r+2s]}} \frac{(N+r-2s-1)^{[l]}}{(N+r-1)^{[l]}} < 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Кроме того, в силу формулы Стирлинга

$$\frac{\Gamma(l+2s+2\alpha+r+1) (l+r+2s)!}{(\Gamma(l+2s+\alpha+r+1))^2} \leq c(\alpha). \quad (5.19)$$

Сопоставляя (5.18) и (5.19), замечаем, что

$$\frac{h_{l,N+r}^{0,0}}{h_{l+r+2s,N+2r}^{\alpha,\alpha}} \leq c(\alpha, r) \frac{l+s+1}{l+1}. \quad (5.20)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 & \frac{(l+2s+2\alpha+2r+1)_l (1/2)_s (\alpha+r)_s \Gamma(l+2s+\alpha+r+1)}{(2s)! (\alpha+r+1)_l (l+1)_l (l+\alpha+r+1)_s (l+3/2)_s \Gamma(\alpha+r+1)} \\
 &= \frac{\Gamma(2(l+s)+2\alpha+2r+1)}{\Gamma(l+s+3/2)\Gamma(l+s+\alpha+r+1)} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+3/2)}{\Gamma(2l+1)} \\
 & \quad \times \frac{\Gamma(l+2s+\alpha+r+1)}{\Gamma(l+2s+2\alpha+2r+1)} \frac{\Gamma(s+1/2)\Gamma(s+\alpha+r)}{\Gamma(2s+1)\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+r)} \\
 &\leq c(\alpha, r) \frac{\Gamma(2(l+s))}{\Gamma(l+s+1/2)\Gamma(l+s)} \frac{\Gamma(l)\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(2l)} \frac{\Gamma(s+1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} (s+1)^{\alpha+r-1} \frac{l+1}{l+s+1} \\
 &= c(\alpha, r) 2^{2(l+s)-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2l-1}\sqrt{\pi} 2^{2s-1}\sqrt{\pi}} (s+1)^{\alpha+r-1} \frac{l+1}{l+s+1} \\
 &= c(\alpha, r) \frac{2(l+1)}{l+s+1} (s+1)^{\alpha+r-1}. \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

Из леммы 5.2 с учетом оценок (5.20), (5.21) и (5.17) имеем

$$\begin{aligned}
 |\widehat{d}_{r,l,N+r}| &\leq c(\alpha, r) B \sum_{s=0}^{[(N-1+r-l)/2]} \left(\frac{l+1}{l+s+1} \right)^{1/2} \frac{(s+1)^{\alpha+r-1}}{(l+r+2s+1)^{r-1}} \\
 &\quad \times \frac{(l+r+2s+2\alpha+1)_r}{(N+2r-1)^{[r]}} q^{l+r+2s} \\
 &\leq \frac{c(\alpha, r) B q^{l+r}}{(N+2r-1)^{[r]}} \sum_{s=0}^{[(N-1+r-l)/2]} (s+1)^{\alpha+r-1} (l+2s+1) q^{2s} \\
 &\leq c(\alpha, r, q) B \frac{(l+1)q^l}{(N+2r-1)^r}.
 \end{aligned}$$

Лемма 5.3 доказана.

6. Дискретный аналог оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$

Мы конструируем здесь дискретный аналог оператора $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$, подчиняющийся всем трем требованиям, указанным в п. 1. Пусть $f = f(x)$ — функция, заданная на $[-1, 1]$ и принимающая конечные значения $f(x_j)$ в узлах сетки $H_\Lambda = \{x_j = -1 + 2j/(\Lambda-1)\}_{j=0}^{\Lambda-1}$. Положим $N = \Lambda - 2r$ и определим дискретную функцию $d = d(t)$, заданную на множестве

$$\overline{\Omega}_\Lambda = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\},$$

с помощью равенства

$$d(j-r) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, \Lambda-1. \tag{6.1}$$

Можем теперь определить, следуя работе [2], оператор $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$, действующий в пространстве дискретных функций, заданных на $\overline{\Omega}_\Lambda$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned}
 F(t) &= d(t-r), \quad b(t) = b(t, r, N) = K \Delta^r F(t), \\
 \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) &= S_{n,N}(d, t) + \Psi_{r,n}(t, N), \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

где $n \geq 2$, K – произвольное число, отличное от нуля,

$$S_{n,N}(d, t) = \sum_{k=0}^n \widehat{d}_{k,N} \tau_k(t, N) \quad (6.3)$$

– дискретная сумма Фурье–Чебышева порядка n функции d на $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ по системе $\{\tau_k(t, N)\}_{k=0}^{N-1}$,

$$\begin{aligned} \Psi_{r,n}(x, N) &= \frac{(-1)^r (N+r)^{[r]} (N+r+1)_r}{(N-1+r)^{[r]} K} \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r}}{k^{[r]} \sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}} \\ &\times \sum_{i=\lfloor \frac{n+r-k}{2} \rfloor + 1}^r (-1)^i \sigma_i^k(r, N) T_{k-r+2i}(x, N), \end{aligned} \quad (6.4)$$

$\sigma_i^k(r, N)$ – числа, определенные равенством (5.7),

$$\widehat{b}_{k,N+r} = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} b(j) \tau_k(j, N+r). \quad (6.5)$$

Положим ($\Lambda = N + 2r$)

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}\left(d, \frac{\Lambda-1}{2}(1+x) - r\right) \quad (6.6)$$

и покажем, что оператор $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$ является искомым. Прежде всего заметим, что свойство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{n+2r,N}(f) = \mathcal{Y}_{n+2r}(f)$$

непосредственно вытекает из предельного соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_n^{\alpha, \beta}\left(\frac{N-1}{2}(1+x), N\right) = P_n^{\alpha, \beta}(x),$$

поэтому нам остается рассмотреть разностные и аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$. С этой целью рассмотрим сначала некоторые свойства оператора $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t)$.

В работе [2] было показано (см. [2, равенство(4.21)]), что

$$d(t) - \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = \mathcal{R}_{r,n}(t, N), \quad t \in \Omega_N, \quad (6.7)$$

где

$$\mathcal{R}_{r,n}(x, N) = \frac{(-1)^r (x+r)^{[r]} (N-x)_r}{(N-1+r)^{[r]} K} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r} T_{k-r}^{r,r}(x, N)}{k^{[r]} \sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \quad (6.8)$$

Более того, из рассуждений, проведенных в [2], следует, что

$$d(t) = \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t), \quad t \in A_{r,N}, \quad (6.9)$$

где

$$A_{r,N} = \{-r, -r+1, \dots, -1\} \cup \{N, \dots, N-1+r\}.$$

В самом деле, в [2] установлено (см. [2, (4.4)]) равенство

$$d(t) = D_{2r-1}(t, N) + \mathcal{F}_r(t, N), \quad x \in \Omega_{N+r}, \quad (6.10)$$

где $D_{2r-1}(t, N)$ многочлен степени не выше $2r-1$,

$$\mathcal{F}_r(t, N) = \frac{(-1)^r (t+r)^{[r]} (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]} K} \sum_{k=r}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r}}{k^{[r]}} \frac{T_{k-r}^{r,r}(t, N)}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \quad (6.11)$$

Так как $\mathcal{F}_r(t, N) = 0$ при $t \in A_{r,N}$, из (6.10) следует, что полином $D_{2r-1}(t, N) = D_{2r-1}(d, t, N)$ совпадает с функцией $d(t)$ при $t \in \{N, \dots, N-1+r\}$. Покажем, что $D_{2r-1}(t, N) = d(t)$ также и при $t \in \{-r, \dots, -1\}$. Для этого рассмотрим функцию $\bar{d}(t) = d(N-1-t)$. Тогда, полагая $\bar{F}(t) = \bar{d}(t-r) = d(N-1-t+r) = F(N-1+2r-t)$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta^r \bar{F}(t) &= \sum_{l=0}^r (-1)^{r+l} \binom{r}{l} \bar{F}(t+l) = \sum_{l=0}^r (-1)^{r+l} \binom{r}{l} F(N-1+2r-l-t) \\ &= \sum_{\nu=0}^r (-1)^{2r-\nu} \binom{r}{r-\nu} F(N-l+r+\nu-t) \\ &= (-1)^r \sum_{\nu=0}^r (-1)^{r+\nu} \binom{r}{\nu} F(N-1+r-t+\nu) \\ &= (-1)^r \Delta^r F(N-1+r-t) \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\bar{b}(t) = K \Delta^r \bar{F}(t) = (-1)^r K \Delta^r F(N-1+r-t) = (-1)^r b(N-1+r-t).$$

Поэтому в силу симметрии (5.3)

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{k,N+r} &= \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \bar{b}(j) \tau_k(j, N+r) = \frac{2(-1)^r}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} b(N-1+r-j) \tau_k(j, N+r) \\ &= (-1)^{k-r} \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} b(N-1+r-j) \tau_k(N-1+r-j, N+r) \\ &= (-1)^{k-r} \widehat{b}_{k,N+r}, \\ &\quad (-1)^{k-r} T_{k-r}^{r,r}(t, N) = T_{k-r}^{r,r}(N-1-t, N). \end{aligned}$$

Сопоставляя эти равенства с (6.10) и (6.11), имеем

$$\bar{d}(t) = D_{2r-1}(\bar{d}, t, N) + \mathcal{F}_r(N-1-t, N), \quad t \in \Omega_{N+r},$$

или, что то же

$$d(N-1-t) = D_{2r-1}(\bar{d}, t, N) + \mathcal{F}_r(N-1-t, N), \quad t \in \Omega_{N+r}.$$

Отсюда при $t \in \{-r, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1\}$

$$d(t) = D_{2r-1}(\bar{d}, N-1-t, N) + \mathcal{F}_r(t, N); \quad (6.12)$$

в частности, при $t \in \{-r, \dots, -1\}$

$$d(t) = D_{2r-1}(\bar{d}, N-1-t, N), \quad (6.13)$$

так как для таких t в силу (6.11) $\mathcal{F}_r(t, N) = 0$. Далее заметим, что в силу (6.10) и (6.12)

$$D_{2r-1}(d, t, N) = D_{2r-1}(\bar{d}, N-1-t, N),$$

если $t \in \Omega_N$. Но тогда эти полиномы тождественны, так как $2r-1 < N-1$. Отсюда и из (6.13) следует, что $D_{2r-1}(d, t, N)$ совпадает с $d(t)$ и при $t \in \{-r, \dots, -1\}$.

Таким образом,

$$D_{2r-1}(d, t, N) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{(t+1)_r (N-t)_r}{(i-1)! (r-i)! (N+i)_r} \left[\frac{d(-i)}{t+i} + \frac{d(N-1+i)}{N-1+i-t} \right]. \quad (6.14)$$

Сопоставляя (6.7), (6.10) и (6.11) заметим еще, что

$$\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = D_{2r-1}(d, t, N) + \mathcal{F}_{r,n}(t, N), \quad (6.15)$$

где

$$\mathcal{F}_{r,n}(t, N) = \frac{(-1)^r (t+r)^{[r]} (N-t)_r}{(N-1+r)^{[r]} K} \sum_{k=r}^{n+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r}}{k^{[r]}} \frac{T_{k-r}^{r,r}(t, N)}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \quad (6.16)$$

Из (6.14)–(6.16) следует, что если $t \in A_{r,N}$, то $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = D_{2r-1}(d, t, N)$; следовательно, $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) = d(t)$, если $t \in A_{r,N}$. Равенство (6.9) доказано.

Таким образом, мы установили, что равенство (6.7) выполняется не только на Ω_N , но и на всем

$$\overline{\Omega}_\Lambda = \{-r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \dots, N-1+r\}.$$

Пусть $0 \leq \nu \leq r$, $-r \leq t \leq N-1+r-\nu$. Тогда можем взять конечные разности порядка ν от обеих частей равенства (6.7). С учетом (6.8) это дает

$$\begin{aligned} \Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r,N}(d, t) &= \Delta^\nu \mathcal{R}_{r,n}(t, N) \\ &= \frac{(-1)^r}{(N-1+r)^{[r]} K} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r}}{k^{[r]}} \frac{\Delta^\nu \{(t+r)^{[r]} (N-t)_r T_{k-r}^{r,r}(t, N)\}}{\sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Если теперь воспользуемся леммой 5.1, то из (6.17) получим

$$\begin{aligned} & \Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r, N}(d, t) \\ &= \frac{1}{K} \frac{(-1)^{r-\nu} (t+r)^{[r-\nu]} (N-t)_{r-\nu}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]}} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k, N+r}}{k^{[r-\nu]}} \frac{T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(t+\nu, N+\nu)}{\sqrt{h_{k, N+r}^{0,0}}}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что $K = [(N+2r-1)/2]^r$, и тогда из (6.5) имеем

$$\widehat{b}_{k, N+r} = \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \left(\frac{N-1+2r}{2} \right)^r \Delta^r d(j-r) \tau_k(j, N+r), \quad (6.19)$$

а равенство (6.18) при $-r \leq t \leq N-1+r-\nu$ перепишем так:

$$\begin{aligned} & \Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r, N}(d, t) \\ &= \frac{(-1)^{r-\nu} 2^r (t+r)^{[r-\nu]} (N-t)_{r-\nu}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]} (N-1+2r)^r} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k, N+r}}{k^{[r-\nu]}} \frac{T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(t+\nu, N+\nu)}{\sqrt{h_{k, N+r}^{0,0}}}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Для целых t при $-\nu \leq t \leq N-1$ положим

$$\Theta_{N, r, \nu}(t) = \max_{1 \leq n \leq N-1+\nu} \left[\frac{t+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{t}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2+1/4} |\tau_n^{r-\nu, r-\nu}(t+\nu, N+\nu)|, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \eta_{N, r, \nu}(t) &= \max_{1 \leq k \leq N-1+r} \left(\frac{h_{k-r+\nu, N+\nu}^{r-\nu, r-\nu}}{h_{k, N+r}^{0,0}} \right)^{1/2} \frac{2^{r-\nu} N^{2(r-\nu)}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]} (N-1+2r)^{r-\nu}} \\ &\quad \times \frac{(t+r)^{[r-\nu]} (N-t)_{r-\nu}}{[(t+\nu+1)(N-t)]^{r-\nu}}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Тогда из (1.15), (6.21) и (6.22) при $0 \leq \nu \leq r-1$, $-\nu \leq t \leq N-1$ имеем (t – целое)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{N-1+2r} \right)^r \frac{(t+r)^{[r-\nu]} (N-t)_{r-\nu} |T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(t+\nu, N+\nu)|}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]} \sqrt{h_{k, N+r}^{0,0}}} \\ & \leq \eta_{N, r, \nu}(t) \Theta_{N, r, \nu}(t) \left[\frac{t+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{t}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \left(\frac{2}{N-1+2r} \right)^\nu. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Сопоставляя (6.20) и (6.23), получим

$$\begin{aligned} |\Delta^\nu d(t) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{n+2r, N}(d, t)| &\leq \eta_{N, r, \nu}(t) \Theta_{N, r, \nu}(t) \left[\frac{t+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{t}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \\ &\quad \times \left(\frac{2}{N-1+2r} \right)^\nu \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{|\widehat{b}_{k, N+r}|}{k^{[r-\nu]}}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

где t целое, $-\nu \leq t \leq N-1$, $0 \leq \nu \leq r-1$.

Вернемся теперь к оператору $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)$, определенному равенством (6.6). Пользуясь равенствами (6.2) и (6.15), мы можем записать для этого оператора следующие выражения:

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = S_{n,N}(d, t) + \psi_{r,N}(t), \quad (6.25)$$

$$\mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x) = D_{2r-1}(t) + \mathcal{F}_{r,N}(t, N), \quad (6.26)$$

где

$$t = \frac{N+2r-1}{2}(1+x) - r, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (6.27)$$

Отметим следующие свойства оператора $\mathcal{X}_{n+2r,N}(f)$, вытекающие из соответствующих свойств оператора $\mathcal{Y}_{n+2r,N}(f)$:

$$f(x_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j) = R_{r,N}(j-r, N), \quad 0 \leq j \leq N-1+2r, \quad (6.28)$$

$$f(x_j) = \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j), \quad 0 \leq j \leq r-1, \quad N+r \leq j \leq N-1+2r. \quad (6.29)$$

Пусть $\delta = 2/(N-1+2r)$, Δ_δ^ν – конечная разность порядка ν с шагом δ . Тогда при $0 \leq \nu \leq r-1$ имеем

$$\begin{aligned} & \Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j) \\ &= \frac{(-1)^{r-\nu} 2^r j^{[r-\nu]} (N+r-j)_{r-\nu}}{(N-1+r-\nu)^{[r-\nu]} (N-1+2r)^r} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{\widehat{b}_{k,N+r} T_{k+\nu-r}^{r-\nu, r-\nu}(j-r+\nu, N+\nu)}{k^{[r-\nu]} \sqrt{h_{k,N+r}^{0,0}}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Если, кроме того, $r-\nu \leq j \leq N-1+r$, то

$$\begin{aligned} & |\Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j)| \leq \eta_{N,r,\nu}(j-r) \Theta_{N,r,\nu}(j-r) \\ & \times \left[\frac{j-r+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{j-r}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \left(\frac{2}{N-1+2r} \right)^\nu \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{|\widehat{b}_{k,N+r}|}{k^{[r-\nu]}}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Если мы воспользуемся известной формулой

$$\delta^{-\nu} \Delta_\delta^\nu [f(x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x)] = f^{(\nu)}(x + \nu \delta \theta_x) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x + \nu \delta \theta_x),$$

где $0 < \theta_x < 1$, то в предположении ν -кратной непрерывной дифференцируемости функции f из (6.31) получим

$$\begin{aligned} & |f^{(\nu)}(x_j + \nu \delta \theta_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x_j + \nu \delta \theta_j)| \leq \eta_{N,r,\nu}(j-r) \Theta_{N,r,\nu}(j-r) \\ & \times \left[\frac{j-r+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{j-r}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \sum_{k=n+r+1}^{N-1+r} \frac{|\widehat{b}_{k,N+r}|}{k^{[r-\nu]}}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

где $r-\nu \leq j \leq N-1+r$, $0 < \theta_j < 1$, $0 \leq \nu \leq r-1$.

Ниже нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 6.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < q < 1$, $B > 0$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $\bar{d}(j) = f(x_j)$ ($x_j \in H_\Lambda$),

$$\widehat{\bar{d}}_{k,N+2r} = \frac{2}{N+2r} \sum_{j=0}^{N-1+2r} \bar{d}(j) \tau_k(j, N+2r).$$

Тогда

$$|\widehat{\bar{d}}_{k,N+2r}| \leq C(r, q) B \frac{q^k}{(k+1)^{r-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1+2r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $k \geq 2r + 2$. Имеем

$$\begin{aligned} |\widehat{d}_{k,N+2r}| &= \left| \frac{2}{N+2r} \sum_{j=0}^{N-1+2r} \bar{d}(j) \tau_k(j, N+2r) \right| \\ &= \left| \frac{2}{N+2r} \sum_{j=0}^{N-1+2r} [f(x_j) - \mathcal{Y}_{(k-2r-1)+2r}(f, x_j)] \tau_k(j, N+2r) \right|. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\mathcal{Y}_{(k-2r-1)+2r}(f, x)$ представляет собой алгебраический полином степени $k-1$ и, следовательно,

$$\frac{2}{N+2r} \sum_{j=0}^{N-1+2r} \mathcal{Y}_{(k-2r-1)+2r}(f, x_j) \tau_k(j, N+2r) = 0.$$

Из теоремы 4.1 и равенства (6.33), воспользовавшись неравенством Коши–Шварца, имеем

$$\begin{aligned} |\widehat{d}_{k,N+2r}| &\leq \frac{2\sqrt{2\pi} B \kappa_r q^{k-r+1}}{(1-q)(1-q^2)^2(k-2r-1)^{r-1}} \frac{2}{N+2r} \sum_{j=0}^{N-1+2r} |\tau_k(j, N+2r)| \\ &\leq c(r, q) \frac{q^k}{(k+1)^{r-1}} \left(\frac{2}{N+2r} \sum_{j=0}^{N-1+2r} 1 \right)^{1/2} \\ &= c(r, q) \frac{q^k}{(k+1)^{r-1}}, \quad 2r+2 \leq k \leq N-1+2r. \end{aligned}$$

Лемма 6.1 доказана.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $r \geq 1$, $0 < q < 1$, $B > 0$, $f^{(r-1)} \in A_q(B)$, $0 \leq \nu \leq r-1$, $r-\nu \leq j \leq N-1+r$, $x_j \in H_\Lambda$, $\delta = 2/(N-1+2r)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta^{-\nu} |\Delta_\delta^\nu f(x_j) - \Delta_\delta^\nu \mathcal{X}_{n+2r,N}(f, x_j)| &\leq c \eta_{N,r,\nu}(j-r) \Theta_{N,r,\nu}(j-r) \\ &\quad \times \left[\frac{j-r+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{j-r}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{q^{n+r}}{(n+r)^{r-\nu-1}}, \\ |f^{(\nu)}(x_j + \nu \delta \theta_j) - \mathcal{X}_{n+2r,N}^{(\nu)}(f, x_j + \nu \delta \theta_j)| &\leq c \eta_{N,r,\nu}(j-r) \Theta_{N,r,\nu}(j-r) \\ &\quad \times \left[\frac{j-r+\nu+1}{N} \left(1 - \frac{j-r}{N} \right) \right]^{(r-\nu)/2-1/4} \frac{q^{n+r}}{(n+r)^{r-\nu-1}}, \end{aligned}$$

где $0 < \theta_j < 1$, а число $c = c(r, q, B)$ зависит лишь от указанных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bar{d}(t) = d(t-r) = f(x_t)$, $t \in \overline{\Omega}_{N+2r}$. Тогда для

$$b(t) = \delta^{-r} \Delta^r d(t-r) = \delta^{-r} \Delta^r \bar{d}(t), \quad t \in \Omega_{N+r},$$

имеем

$$\begin{aligned}\widehat{b}_{k,N+r} &= \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} b(j)\tau_k(j, N+r) \\ &= \delta^{-r} \frac{2}{N+r} \sum_{j=0}^{N-1+r} \Delta^r \bar{d}(j)\tau_k(j, N+r) = \delta^{-r} \widehat{\bar{d}}_{r,k,N+r}.\end{aligned}\quad (6.34)$$

С другой стороны, в силу лемм 6.1 и 5.3

$$|\widehat{\bar{d}}_{r,k,N+r}| \leq c(r, q)B(k+1)q^k\delta^r, \quad k = 0, 1, \dots, N-1+r. \quad (6.35)$$

Сопоставляя (6.34) и (6.35), имеем

$$|\widehat{b}_{k,N+r}| \leq c(r, q)B(k+1)q^k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1+r. \quad (6.36)$$

Утверждение теоремы 6.1 непосредственно вытекает из (6.31), (6.32) и (6.36).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шарапудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 143–160.
- [2] Шарапудинов И. И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 460–470.
- [3] Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.
- [4] Серё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [5] Gasper G. Positivity and special functions // Theory and Appl. Spec. Funct. / ed. R. A. Askey, 1975. P. 375–433.
- [6] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [7] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [8] Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas, and an application // Scripta Math. 1961. V. 26. P. 33–46.

Дагестанский государственный педагогический университет, г. Махачкала

Поступило
20.04.2001