Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Андриянов, Модифицированная проблема моментов в комплексной области, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 804–814

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:57:17

УДК 517.442

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Г. И. Андриянов

В работе рассмотрена проблема моментов в комплексной области. Полученные результаты обобщают и усиливают известный результат Казьмина. Указаны приложения полученных результатов в задаче Абея–Гончарова (проблема единственности и конструкции), а также к полноте некоторых систем аналитических функций.

Библиография: 12 названий.

Пусть D – односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD ($\overline{\mathbb{C}} \setminus D$) до всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$; $A(D)$ – пространство функций $f(z)$, регулярных в области D , с топологией равномерной сходимости на компактах из D .

Через $A_0(CD)$ обозначаем пространство функций $g(z)$, $g(\infty) = 0$, регулярных на CD , с топологией, индуцированной топологией сопряженного пространства, которое может быть реализовано в виде пространства $A(D)$.

Символом $A(\text{exp}, D)$ обозначаем пространство целых функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{tz} g(t) dt, \quad (1)$$

где $g(z) \in A_0(CD)$, $g(z)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $F(z)$, Γ_t – любой замкнутый жордановый спрямляемый контур такой, что $g(z)$ регулярна на $\Gamma_t \cup \text{ext } \Gamma_t$. Через $\text{int } \Gamma$, $\text{ext } \Gamma$ обозначаем “внутреннюю” и “внешнюю” открытые области, на которые контур Γ разбивает плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$. Таким образом,

$$\overline{\mathbb{C}}_z = \text{int } \Gamma \cup \Gamma \cup \text{ext } \Gamma, \quad \text{int } \Gamma \cap \text{ext } \Gamma = \emptyset, \quad \infty \in \text{ext } \Gamma.$$

Хорошо известно, что пространство $A(\text{exp}, D)$ изоморфно пространству $A_0(CD)$ (см. [1], [2]).

Можно считать, что топология пространства $A(\text{exp}, D)$ “наводится” топологией пространства $A_0(CD)$, т.е. F_n сходятся к $F(z)$ в пространстве $A(\text{exp}, D)$ тогда и только тогда, когда функции γ_n , ассоциированные по Борелю с $F_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, сходятся в пространстве $A_0(CD)$ к функции $\gamma(z)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$ (см. [1], [2]).

Пусть имеется система функций $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, регулярных в области D . Хорошо известно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система функций $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ называется *полной* в пространстве $A(D)$, если замыкание линейной оболочки данной системы (по топологии пространства $A(D)$) совпадает со всем $A(D)$.

В 70-х годах Казьмин рассмотрел следующую задачу [3].

Пусть имеется функция $W(z) \in A(D)$, которая является однолистной в области D . Помимо этого задаются p , $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, аналитических в области D функций $A_s(z)$, $A_s(z) \not\equiv 0$, и p последовательностей комплексных чисел $\{a_{ns}\}_{n=0}^{\infty}$, $s = 0, 1, 2, \dots, p-1$. Наконец, фиксируется произвольным образом набор из p целых чисел l_s , $0 \leq l_s \leq p-1$.

I. Спрашивается, существует ли функция $g(z) \in A_0(CD)$, для которой имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [W(z)]^{np+l_s} A_s(z) g(z) dz = a_{ns}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (2)$$

где Γ — замкнутый жорданов спрямляемый контур такой, что $g(z)$ регулярна на $\Gamma \cup \text{ext } \Gamma$, $\Gamma \subset D$.

II. Предположим, что числовая совокупность $\bigcup_{s=0}^{p-1} \{a_{ns}\}_{n=0}^{\infty}$ допустима, т.е. существует функция $g(z) \in A_0(CD)$, для которой выполняются соотношения (2).

Спрашивается, как по числам $\bigcup_{s=0}^{p-1} \{a_{ns}\}_{n=0}^{\infty}$ (моментам) из правой части (2) восстановить функцию $g(z) \in A_0(CD)$?

Решение задач I и II было названо *общей проблемой моментов* в комплексной области. Заметим, что к решению общей проблемы моментов приводят многие задачи по теории интерполяции в пространстве $A(\exp, D)$ [3]. К подобному же кругу вопросов приводят и задачи о полноте в пространстве $A(D)$ некоторых систем аналитических в области D функций. Заметим, что решение общей проблемы моментов было получено Казьминым при условии, что образ области D при отображении функцией $W(z)$ из (2) инвариантен относительно поворота на угол $2\pi/p$ вокруг начала координат (область $G = W(D)$, обладающая этим свойством, называется $(2\pi/p)$ -инвариантной [3], [4]). Попытки снять условие $(2\pi/p)$ -инвариантности области G успеха не имели [3], [4].

Данная работа посвящена решению следующей задачи. Пусть имеется p , $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, функций $W_j(z)$, которые голоморфны и однолиственны в области D . Помимо этого задаются p аналитических в D функций $A_j(z)$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, не имеющих нулей в области D (это условие носит технический характер, см. ниже замечание 4), и p последовательностей комплексных чисел $\{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Спрашивается, существует ли функция $g(z) \in A_0(CD)$, для которой имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} [W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z) g(z) dz = a_{nj}, \quad (3)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, $0 \leq l_j \leq p-1$, $l_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Здесь Γ_z — любой замкнутый жордановый спрямляемый контур такой, что $g(z)$ регулярна на $\Gamma_z \cup \text{ext } \Gamma_z$, $\Gamma_z \subset D$, Γ_z достаточно близок к границе области D .

Кроме того, возникает вопрос, как по числовой совокупности $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ восстановить функцию $g(z)$ в (3)?

Ниже будем считать, что функции $\{W_j(z)\}_{j=0}^{p-1}$ в (3) в общем случае различны, а образы области D при отображениях функциями $W_j(z)$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, не являются $(2\pi/p)$ -инвариантными. Задачу поиска функции $g(z)$ и условий допустимости для

$\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ в (3) назовем *модифицированной проблемой моментов* (М-проблемой моментов).

Очевидно, что М-проблема моментов содержит общую проблему моментов Казьмина при оговоренных выше условиях на функции $A_j(z)$ в качестве весьма частного случая, а именно, в (3)

$$W_0(z) \equiv W_1(z) \equiv W_2(z) \equiv \dots \equiv W_{p-1}(z) \equiv W(z) \quad (4)$$

и образ области D при отображении функцией $W(z)$ является $(2\pi/p)$ -инвариантным множеством.

Данная работа состоит из двух основных частей. В первой части находится решение М-проблемы моментов. Во второй части указаны простейшие (но не тривиальные) приложения М-проблемы моментов к интерполяционной задаче Абеля–Гончарова и вопросам полноты некоторых систем аналитических функций в пространстве $A(D)$.

1. Решение М-проблемы моментов

Для того чтобы сформулировать основной результат, связанный с М-проблемой моментов, нам потребуются некоторые предположения о числовой совокупности $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ в правой части равенств (3).

Будем считать, что числовая совокупность $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующим свойством:

$$g_j(w) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nj}}{w^{np+l_j+1}} \in A_0(CG_j), \quad (5)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, p-1, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, где $G_j = W_j(D)$ – образы области D при отображении однолиственными голоморфными функциями $W_j(z)$ из (3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – любая односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD до $\mathbb{T}_z$ и числовая совокупность $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (5).

Решение М-проблемы моментов (3) в пространстве $A_0(CD)$ существует тогда и только тогда, когда существует совокупность из p функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, обладающих следующими свойствами (А-условия):

- 1) $f_j(w) \in A_0(CG_j)$, $f_j(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$;
- 2) $f_j(w)$ не имеют степеней вида $1/w^{np+l_j+1}$ в своем лорановском разложении в окрестности бесконечно удаленной точки, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$;
- 3) система функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$ удовлетворяет условию

$$\{g_0(W_0(z)) + f_0(W_0(z))\}W'_0(z)A_j(z) - \{g_j(W_j(z)) + f_j(W_j(z))\}W'_j(z)A_0(z) \in A(D),$$

$$j = 1, 2, \dots, p-1.$$

Необходимость. Пусть М-проблема моментов (3) имеет решение $\gamma(z) \in A_0(CD)$, $\gamma(z) \not\equiv 0$. В таком случае, учитывая однолиственность функций $W_j(z)$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, можем переписать (3) в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} w^{np+l_j} A_j(Z_j(w)) \gamma(Z_j(w)) Z'_j(w) dw = a_{nj}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где $\Gamma_j = W_j(\Gamma_z)$, $\Gamma_j \subset G_j$, а контур Γ_z описан в (3). Здесь $z = Z_j(w)$ – функции, обратные к $w = W_j(z)$ соответственно.

Из (5), (6) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} w^{np+l_j} \{A_j(Z_j(w))\gamma(Z_j(w))Z_j'(w) - g_j(w)\} dw = 0, \quad (7)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, p-1, n = 0, 1, \dots$.

Представим функции $A_j(Z_j(w))\gamma(Z_j(w))Z_j'(w) - g_j(w)$, каждую на соответствующем контуре Γ_j , в виде

$$A_j(Z_j(w))\gamma(Z_j(w))Z_j'(w) - g_j(w) = \Phi_j^+(w) + \Phi_j^-(w), \quad (8)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, здесь $\Phi_j^+(w) \in A(\Gamma_j \cup \text{int } \Gamma_j)$, $\Phi_j^-(w) \in A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{int } \Gamma_j)$, $\Phi_j^-(w) \neq 0$ (см. [5]).

Подставляя (8) в (7), видим, что справедливо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} w^{np+l_j} \Phi_j^-(w) dw = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Из (8), (9) заключаем, что функции $\{\Phi_j^-(w)\}_{j=0}^{p-1}$ обладают свойствами 1), 2) A -условий. Таким образом, остается проверить выполнение свойства 3) A -условий.

Перепишем (в слегка измененной форме) представления (8) на контур $\Gamma_z \subset D$ ($\Gamma_j = W_j(\Gamma_z)$):

$$\gamma(z) - g_j(W_j(z)) \frac{W_j'(z)}{A_j(z)} = \hat{\Phi}_j^+(z) + \Phi_j^-(W_j(z)) \frac{W_j'(z)}{A_j(z)}, \quad (10)$$

здесь $\hat{\Phi}_j^+(z) \in A(\Gamma_z \cup \text{int } \Gamma_z)$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Вычитая в (10) из первой строки ($j = 0$) вторую ($j = 1$) и выполняя элементарные преобразования, получим краевое условие на контуре Γ_z :

$$\{\Phi_0^-(W_0(z)) + g_0(W_0(z))\}W_0'(z)A_1(z) - \{g_1(W_1(z)) + \Phi_1^-(W_1(z))\}W_1'(z)A_0(z) = \Psi^+(z),$$

где $\Psi^+(z) \in A(\Gamma_z \cup \text{int } \Gamma_z)$.

Повторяя подобные преобразования с первой ($j = 0$) и третьей ($j = 2$) строками в (10) и т.д., заключаем, что для системы функций $\{\Phi_j^-(w)\}_{j=0}^{p-1}$ в (8) выполнены все пункты A -условий.

Достаточность. Пусть существует система функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, удовлетворяющая A -условиям. Образует функции

$$\Psi_j(w) \equiv g_j(w) + f_j(w), \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad (11)$$

где $\{g_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$ – функции, определенные в (5). Рассмотрим p краевых задач Римана на контуре $\Gamma_z \subset D$, Γ_z описан в (3). Нужно найти пары функций $\Phi_j^-(z) \in A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{int } \Gamma_z)$, $\Phi_j^+(z) \in A(D)$, связанных на контуре Γ_z условием

$$\frac{\Phi_j^-(z)A_j(z)}{W_j'(z)} = \Phi_j^+(z) + \Psi_j(W_j(z)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-1. \quad (12)$$

Каждая из краевых задач в (12) разрешима, и существует функция $\Phi_j^-(z) \neq 0$, удовлетворяющая соответствующему краевому условию (см. [5]). Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} W_j(z)^{np+l_j} A_j(z) \Phi_j^-(z) dz = a_{nj}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Покажем, что

$$\Phi_0^-(z) \equiv \Phi_1^-(z) \equiv \Phi_2^-(z) \equiv \dots \equiv \Phi_{p-1}^-(z), \quad z \in \Gamma_z \cup \text{ext } \Gamma_z. \quad (14)$$

Действительно, из (12) следуют соотношения

$$\Phi_j^-(z) = \hat{\Phi}^+(z) + \frac{\Psi_j(W_j(z))W_j'(z)}{A_j(z)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-1. \quad (15)$$

Вычтем из первой строки в (15) вторую и получим

$$\Phi_0^-(z) - \Phi_1^-(z) = \tilde{\Phi}^+(z) + \frac{\Psi_0(W_0(z))W_0'(z)}{A_0(z)} - \frac{\Psi_1(W_1(z))W_1'(z)}{A_1(z)},$$

откуда, учитывая (11) и A -условия, заключаем, что на $\Gamma_z \subset D$ справедливо

$$\Phi_0^-(z) - \Phi_1^-(z) = \tilde{\Phi}^+(z), \quad (16)$$

где $\tilde{\Phi}^+(z) \in A(\Gamma_z \cup \text{int } \Gamma_z)$. Применяя в (16) теорему Лиувилля (см. [5]) и учитывая равенство $\Phi_0^-(\infty) = \Phi_1^-(\infty) = 0$, видим, что $\Phi_0^-(z) \equiv \Phi_1^-(z)$ в CD . Повторяя подобные рассуждения с первой и третьей строкой в (15) и т.д., получим (14). Из (13) и (14) следует, что М-проблема моментов разрешима. Решение М-проблемы моментов (это функция $\Phi_0^-(z)$) находится как решение задачи Римана в (12) при $j = 0$. Оно может быть записано в виде

$$\Phi_0^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} \frac{g_0(W_0(t)) + f_0(W_0(t))}{A_0(t)(t-z)} W_0'(t) dt, \quad z \in \text{ext } \Gamma_t. \quad (17)$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 сводит М-проблему моментов (3) к поиску системы функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, удовлетворяющей A -условиям.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 1 области $G_j = W_j(D)$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, не обязаны быть $(2\pi/p)$ -инвариантными, а функции системы $\{W_j(z)\}_{j=0}^{p-1}$ в общем случае различны между собой.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 дает вид решения М-проблемы моментов, которое описывается контурным интегралом (17).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Решение М-проблемы моментов получено в предположении, что функции $\{A_j(z)\}_{j=0}^{p-1}$ не имеют нулей в области D . Это ограничение не является принципиальным, и решение М-проблемы моментов может быть получено для $A_j(z)$, имеющих конечное число нулей в области D . Однако в этом случае доказательство и формулировка теоремы 1 усложняются. В данной работе мы этого делать не будем.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В соответствии с теоремой 1 для того чтобы научиться находить решение М-проблемы моментов, достаточно научиться находить хотя бы $f_0(w)$ из системы функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, удовлетворяющей A -условиям. Ниже для некоторых случаев будет указан вполне конструктивный метод нахождения системы функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$.

2. Приложения теоремы 1

Рассмотрим интерполяционную задачу Абеля–Гончарова (А–Г): найти целую функцию $F(z)$ из некоторого пространства $A(\exp, D)$, удовлетворяющую условиям

$$F^{(n)}(\lambda_n) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность узлов интерполяции – имеет следующий вид:

$$\lambda_n = n + b(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

здесь

$$\begin{cases} b(n) = b_0 & \text{при } n = 2k, \\ b(n) = b_1 & \text{при } n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad b_0 \neq b_1, \quad b_0, b_1 \in \mathbb{C}.$$

Покажем, как с помощью теоремы 1 решаются проблемы единственности и конструкции в задаче А–Г (18), (19) (относительно проблем единственности и конструкции (см. [1], [2], [6]–[9]).

Обозначим через U следующую область:

$$U = \left\{ z = \rho e^{i\varphi} : 0 \leq \rho < \frac{\pi - |\varphi|}{\sin |\varphi|}, \quad |\varphi| \leq \pi \right\}.$$

Область U впервые была введена Гончаровым и Гельфондом (см. [7], [8]). Хорошо известно, что функция $w = ze^z$ голоморфна и однолистка в области U и отображает ее на плоскость $\mathbb{C}_w$ с разрезом от точки $u = -1/e$ ($w = u + iv$) вдоль отрицательной части действительной оси и до бесконечности (см. [9]).

2.1. Решение задачи Абеля–Гончарова. Пусть D – любая фиксированная односвязная ограниченная область с односвязным дополнением: $\overline{D} \subset U$ ($\overline{D}$ – замыкание области D). Представим числовую последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ в правой части (18) в виде

$$\{a_n\}_{n=0}^\infty = \{a_{2n}\}_{n=0}^\infty \cup \{a_{2n+1}\}_{n=0}^\infty.$$

Потребуем, чтобы числовые последовательности $\{a_{2n}\}_{n=0}^\infty$ и $\{a_{2n+1}\}_{n=0}^\infty$ обладали следующим свойством:

$$\begin{cases} g_0(w) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{w^{2n+1}} \in A_0(CD), \\ g_1(w) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{w^{2n+2}} \in A_0(CD), \end{cases} \quad (20)$$

где $G = W(D)$, $w = ze^z$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D – любая односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD до $\overline{\mathbb{C}_z}$, $\overline{D} \subset U$ и числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ в (18) такова, что выполнено условие (20).

Решение интерполяционной задачи А–Г (18), (19) в пространстве $A(\exp, D)$ существует тогда и только тогда, когда существует пара функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^1$ ($f_0(w)$ – четная, $f_1(w)$ – нечетная), удовлетворяющая условию

$$\{g_0(W(z)) + f_0(W(z))\}e^{-b_0z} - \{g_1(W(z)) + f_1(W(z))\}e^{-b_1z} \in A(D), \quad (21)$$

где $w = ze^z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть интерполяционная задача А–Г (18), (19) разрешима в пространстве $A(\exp, D)$. В таком случае существует функция $F(z) \in A(\exp, D)$, удовлетворяющая (18), с узлами интерполяции (19). Используя (1), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^n e^{nt} e^{b(n)t} \gamma(t) dt = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

здесь $\gamma(t) \not\equiv 0$, $\gamma(z) \in A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{int } \Gamma_t)$, Γ_t – жорданов спрямляемый кусочно-гладкий путь, достаточно близкий к границе области D , $\Gamma_t \subset D$. Из (22) вытекает

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n} e^{2nt} e^{b_0 t} \gamma(t) dt = a_{2n}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} t^{2n+1} e^{(2n+1)t} e^{b_1 t} \gamma(t) dt = a_{2n+1}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Таким образом, получаем М-проблему моментов при $p = 2$, $W_0(z) \equiv W_1(z) = ze^z$, $A_0(z) = e^{b_0 z}$, $A_1(z) = e^{b_1 z}$. Из теоремы 1 и (20) заключаем, что существует пара функций $f_j(w) \in A_0(CG)$, $j = 0, 1$, $f_0(w)$ четная, $f_1(w)$ нечетная, удовлетворяющие условию

$$\{g_0(W_0(z)) + f_0(W_0(z))\}W_0'(z)e^{b_1 z} - \{g_1(W_1(z)) + f_1(W_1(z))\}W_1'(z)e^{b_0 z} \in A(D). \quad (24)$$

Учитывая, что $W_0(z) \equiv W_1(z)$ и $W_0'(z) \neq 0$ в D , получаем (21).

Достаточность. Пусть выполнено условие (20) и существует пара функций $f_j(w)$, $j = 0, 1$, удовлетворяющая (21). В таком случае имеет место (24). Применяя теорему 1 (при $p = 2$), заключаем, что существует функция $\Phi_0^-(z) \not\equiv 0$, $\Phi_0^-(z) \in A_0(CD)$, для которой справедливы соотношения

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} [W_0(t)]^{2n} e^{b_0 t} \Phi_0^-(t) dt = a_{2n}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} [W_1(t)]^{2n+1} e^{b_1 t} \Phi_0^-(t) dt = a_{2n+1}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда заключаем, что задача А–Г (18), (19) имеет решение $F(z)$ в пространстве $A(\exp, D)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{zt} \Phi_0^-(t) dt.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 2 сводит задачу А–Г (18), (19) к поиску пары функций $f_j(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1$, $f_0(w)$ четная, а $f_1(w)$ нечетная, $f_j(w) \in A_0(CG)$, удовлетворяющих условию:

$$\{g_0(w) + f_0(w)\}e^{-b_0 \psi(w)} - \{g_1(w) + f_1(w)\}e^{-b_1 \psi(w)} \in A(G), \quad (25)$$

где $g_j(w)$, $j = 0, 1$, – функции, описанные в (20), $z = \psi(w)$ – функция, обратная к $w = ze^z$, $G = W(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Теорема 2 дает вид решения интерполяционной задачи А–Г (18), (19), т.е. решает проблему конструкции в упомянутой выше интерполяционной задаче.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если положить, что $b_0 = \tau$, $b_1 = -\tau$, $\tau \in \mathbb{C}$, то последовательность узлов интерполяции (19) превращается в последовательность

$$\lambda_n = n + (-1)^n \tau, \quad \tau \in \mathbb{C},$$

изученную ранее в других работах (см. [10]–[12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В теореме 2 область $G = W(D)$ ($w = ze^z$) не обязана быть симметричной относительно начала координат, как это требовалось бы при применении метода Казьмина (см. [3]).

2.2. Нахождение пространств единственности задачи Абеля–Гончарова.

Обозначим через $\Delta(w; b_0, b_1)$ следующую функцию:

$$\Delta(w; b_0, b_1) = (-1)\{\exp[b_0\psi(w) + b_1\psi(-w)] + \exp[b_0\psi(-w) + b_1\psi(w)]\}. \quad (26)$$

Легко проверить, что $\Delta(w; b_0, b_1)$ имеет нули только в точках корней уравнений

$$\psi(w) - \psi(-w) = \pm \frac{\pi i}{b_0 - b_1}. \quad (27)$$

Возможны следующие случаи:

- а) $b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$, $b_0 - b_1 \neq 0$;
- б) $b_0 - b_1 \in \mathbb{C}$, $b_0 - b_1 \neq 0$.

Рассмотрим их по отдельности.

- а) Пусть $b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$, $b_0 - b_1 \neq 0$. Обозначим через $2\tau = b_0 - b_1$, тогда $\tau \neq 0$ и

$$\psi(w) - \psi(-w) = \pm \frac{\pi i}{2\tau}.$$

Выбирая знак в правой части совпадающим со знаком τ , получим

$$\psi(w) - \psi(-w) = \pm \frac{\pi i}{2\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \tau \neq 0. \quad (28)$$

Корни уравнения (28) принадлежат положительной части мнимой оси в $\mathbb{C}_w$ (см. [11]), пусть w^* – ближайший к началу координат корень уравнения (28). Обозначим через p^+ разрез в $\mathbb{C}_w$ следующего вида: он начинается в точке w^* и продолжается вдоль положительной части мнимой оси в бесконечность; p^- – разрез в $\mathbb{C}_w$, симметричный с p^+ относительно начала координат. Таким образом, в $\mathbb{C}_w \setminus \{p^+ \cup p^-\}$ нет нулей функции $\Delta(w; b_0, b_1)$ ($b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$). Образы разрезов p^+ и p^- при отображении $z = \psi(w)$, обратном к $w = ze^z$, обозначим через γ^+ и γ^- соответственно. Кривые γ^+ и γ^- симметричны друг другу относительно действительной оси, они принадлежат области U и расположены в верхней и нижней полуплоскости $\mathbb{C}_z$ соответственно.

Можно описать γ^+ более подробно (см. [12]). Кривая γ^+ начинается в точке

$$z^* = x^* + iy^*, \quad x^* = \frac{\pi}{4|\tau|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4|\tau|}, \quad y^* = \frac{\pi}{4|\tau|}, \quad z^* = \psi(w^*), \quad 2\tau = b_0 - b_1,$$

и продолжается вдоль кривой, заданной уравнением $x = y \operatorname{tg} y$, $y \in [\pi/(4|\tau|); \pi/2)$, в бесконечность.

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – ограниченная односвязная область с односвязным дополнением CD до $\overline{C}_z$, $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+ \cup \gamma^-\}$ и $G = W(D)$ ($w = ze^z$).

Если числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ в (18) удовлетворяет условиям (20), то в пространстве $A_0(CG)$ существует единственная пара функций $f_j(w)$, $j = 0, 1$ ($f_0(w)$ четная, а $f_1(w)$ нечетная), удовлетворяющая условию (21) при $b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функции $\Phi_j^-(w) \in A_0(CG)$, $\Phi_j^-(w) \neq 0$, $j = 0, 1$, и $\Phi^+(w) \in A(G)$, удовлетворяющие следующему краевому условию на контуре $\Gamma_w \subset G$ (Γ_w достаточно близок к границе области G):

$$\{g_0(w) + \Phi_0^-(w)\}e^{-b_0\psi(w)} - \{g_1(w) + \Phi_1^-(w)\}e^{-b_1\psi(w)} = \Phi^+(w). \quad (29)$$

В случае, если мы найдем четную функцию $\Phi_0^-(w)$ и нечетную функцию $\Phi_1^-(w)$, удовлетворяющие (29), то утверждение теоремы будет доказано.

В силу (20) из (29) получаем систему краевых задач на контуре Γ_w :

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w)e^{-b_0\psi(w)} - \Phi_1^-(w)e^{-b_1\psi(w)} \\ = \Phi^+(w) + g_1(w)e^{-b_1\psi(w)} - g_0(w)e^{-b_0\psi(w)}, \\ \Phi_0^-(w)e^{-b_0\psi(-w)} + \Phi_1^-(w)e^{-b_1\psi(-w)} \\ = \Phi^+(w) + g_1(w)e^{-b_1\psi(-w)} + g_0(w)e^{-b_0\psi(-w)}. \end{cases}$$

Отсюда следует система краевых условий (задач) на контуре Γ_w :

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w) = \frac{1}{\beta(w)} \{\widehat{\Phi}_0^+(w) + g_0^*(w)\}, \\ \Phi_1^-(w) = \frac{1}{\beta(w)} \{\widehat{\Phi}_1^+(w) + g_1^*(w)\}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$\beta(w) = -\frac{\Delta(w; b_0, b_1)}{\exp\{(\psi(w) + \psi(-w))(b_0 + b_1)\}}, \quad (31)$$

а функции $g_j^*(w)$, $j = 0, 1$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_0^*(w) &= \frac{2g_1(w)}{\exp\{b_1[\psi(w) + \psi(-w)]\}} \\ &+ \frac{g_0(w)}{\exp\{b_0\psi(-w) + b_1\psi(w)\} - \exp\{b_0\psi(w) + b_1\psi(-w)\}}, \\ g_1^*(w) &= g_1(w) \left\{ \frac{1}{\exp\{b_0\psi(w) + b_1\psi(-w)\}} - \frac{1}{\exp\{b_0\psi(-w) + b_1\psi(w)\}} \right\} \\ &+ \frac{2g_0(w)}{\exp\{b_0[\psi(w) + \psi(-w)]\}}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $g_0^*(w)$ четная, а $g_1^*(w)$ нечетная функции. Число решений и разрешимость каждой из краевых задач в (30) зависит от индекса

$$\chi = \text{ind}_{\Gamma_w}(\beta(w)),$$

который в нашем случае равен числу нулей функции $\Delta(w; b_0, b_1)$, попавших внутрь контура Γ_w (см. [5]). В свою очередь, нули $\Delta(w; b_0, b_1)$ зависят от b_0, b_1 . В нашем случае $b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$, поэтому в области G нет нулей $\Delta(w; b_0, b_1)$ и, следовательно, $\chi = 0$. В этом случае существует единственное и отличное от нуля решение Φ_0^- и Φ_1^- каждой из краевых задач (30) (см. [5]), причем Φ_0^- четная, а Φ_1^- нечетная функции (последнее следует из вида функций $g_0^*(w)$ и $g_1^*(w)$). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В условиях теоремы 3 область D такова, что выполнено $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+ \cup \gamma^-\}$. Фактически же достаточно потребовать только, чтобы $\overline{D} \subset U$ и в области $G = W(D)$ ($w = ze^z$) не было нулей функции $\Delta(w; b_0, b_1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D – ограниченная односвязная область с односвязным дополнением CD до $\overline{\mathbb{C}}_z$, $\overline{D} \subset U \setminus \{\gamma^+ \cup \gamma^-\}$. Если числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ в (18) удовлетворяет условию (20) и $b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$, то решение интерполяционной задачи A – Γ (18)–(19) существует и является единственным в пространстве $A(\exp, D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 2, замечания 6 и теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D – ограниченная односвязная область с односвязным дополнением CD до $\overline{\mathbb{C}}_z$, $\overline{D} \subset U$. Если числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ в (18) удовлетворяет условию (20), то решение интерполяционной задачи A – Γ (18)–(19) при $b_0 - b_1 \in \mathbb{R}$ существует, но оно уже не является единственным в пространстве $A(\exp, D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что в области $G = W(D)$ ($w = ze^z$) появляются нули функции $\Delta(w; b_0, b_1)$. В этом случае краевые задачи (30) имеют уже не единственные решения $\Phi_0^-(w)$ и $\Phi_1^-(w)$, удовлетворяющие (29). Используя теорему 2 и замечание 6, получаем требуемое.

б) $b_0 - b_1 \in \mathbb{C}$, $b_0 - b_1 \neq 0$.

Этот случай рассматривается полностью аналогично пункту а). Получаются результаты, дословно повторяющие утверждения теорем 3 и 4 (с небольшими вариациями).

2.3. Полнота некоторых систем аналитических функций. Пусть числовая совокупность $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^\infty$ в (3) есть совокупность нулей.

Спрашивается, существует ли функция $g(z)$ такая, что $g(z) \in A_0(CD)$, $g(z) \neq 0$, для которой имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_z} [W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z) g(z) dz = 0, \quad (32)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad 0 \leq l_j \leq p-1, \quad l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Задача поиска такой функции $g(z)$ эквивалентна неполноте системы функций

$$\bigcup_{j=0}^{p-1} [W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z),$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad 0 \leq l_j \leq p-1, \quad l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

в пространстве $A(D)$ (см. [2], [3]). Из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 5. Пусть D – любая односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD до $\overline{\mathbb{C}}_z$.

Система функций

$$\bigcup_{j=0}^{p-1} [W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z),$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad 0 \leq l_j \leq p-1, \quad l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2, \quad A_j(z) \neq 0,$$

полна в пространстве $A(D)$ тогда и только тогда, когда не существует ни одной совокупности из p функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $f_j(w) \in A_0(CG_j)$, $f_j(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$;
- 2) лорановские части функций $f_j(w)$ не имеют степеней вида $1/w^{n+l_j+1}$;
- 3) система функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$ удовлетворяет условию

$$f_0(W_0(z))W_0'(z)A_j(z) - f_j(W_j(z))W_j'(z)A_0(z) \in A(D), \quad j = 1, 2, \dots, p-1.$$

Рассмотрим применение теоремы 5 (при $p = 2$) к вопросу полноты некоторых систем аналитических функций в пространстве $A(D)$.

Пусть D_R – круг радиуса R : $D_R = \{z: |z| < R, R > 0\}$, а функции $W_0(z)$ и $W_1(z)$ являются голоморфными, однолиственными и нечетными в D_R . Кроме того, рассмотрим функции $A_0(z)$, $A_1(z)$, которые являются голоморфными в D_R и не имеют там нулей. Через A_R обозначим пространство $A(D_R)$. Справедлива

ТЕОРЕМА 6. Система функций

$$\{[W_0(z)]^{2n}A_0(z)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{[W_1(z)]^{2n+1}A_1(z)\}_{n=0}^{\infty}$$

полна в пространстве A_R тогда и только тогда, когда функция

$$\varphi(z) \equiv A_0(z)A_1(-z) + A_0(-z)A_1(z)$$

не имеет нулей в области D_R .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Евграфов М. А. Основные понятия интерполяции целых функций. М.: Препринт ИПМ РАН, 1975.
- [2] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
- [3] Казьмин Ю. А. Общая проблема моментов в комплексной области // Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions (Budapest, 1969). Budapest, 1972. P. 225–254.
- [4] Казьмин Ю. А. К проблеме моментов в комплексной области // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 6. С. 1309–1312.
- [5] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [6] Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абе́ля–Гончарова. М.: Гостехиздат, 1954.
- [7] Гончаров В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции // УМН. 1937. Т. 3. С. 113–143.
- [8] Гельфонд А. О. Проблема представления и единственности аналитической функции первого порядка // УМН. 1937. Т. 3. С. 144–174.
- [9] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
- [10] Осколков В. А. Об одном классе узлов, для которых справедлива точная оценка интерполяционных полиномов Гончарова // Тр. МИХМ. 1973. Т. 50. С. 34–38.
- [11] Адикебян Р. В. Об интерполяционной задаче Абе́ля–Гончарова для целых функций экспоненциального типа // Уч. зап. Ереванского гос. ун-та. Сер. естеств. науки. 1983. Т. 3. С. 20–27.
- [12] Андриянов Г. И. Интерполяционная задача Абе́ля–Гончарова. Дисс. ... к.ф.-м.н. М., 1998.