Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Фаддеев, О спектральных свойствах дискретного оператора Шрёдингера с чисто мнимым финитным потенциалом, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 451–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:12:54

О спектральных свойствах дискретного оператора Шрёдингера с чисто мнимым финитным потенциалом

М. М. Фаддеев

В работе рассматриваются спектральные свойства дискретного оператора Шрёдингера в пространстве квадратично суммируемых двусторонних последовательностей с чисто мнимым потенциалом конечного ранга с нулевым средним значением. Показано, что при малости таких потенциалов спектр исследуемого оператора совпадает со спектром невозмущенного оператора, а сам исследуемый оператор подобен самосопряженному.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается дискретный аналог задачи о спектральных свойствах оператора Шрёдингера с $\mathcal{PT}$ -симметричным потенциалом, т.е. таким потенциалом $v(x)$, для которого $v(x) = \overline{v(-x)}$. В частности, указанным свойством обладают чисто мнимые нечетные потенциалы. В работах [1]–[3] (и многих других) рассмотрено большое количество примеров операторов с $\mathcal{PT}$ -симметричными потенциалами и показано, что во многих случаях спектр таких операторов вещественен.

Мы будем рассматривать задачу о возмущении дискретного оператора Шрёдингера H_0 , действующего в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ по правилу $(H_0 u)_k = u_{k-1} + u_{k+1}$, с чисто мнимым нечетным потенциалом V ($v_k = v_{1-k}$, $\operatorname{Re} v_k = 0$). Фактически мы рассмотрим несколько более широкий класс потенциалов, именно, такие чисто мнимые потенциалы V , для которых $\sum_k v_k = 0$. Помимо вопроса о вещественности спектра исследуемого оператора мы будем анализировать вопрос о его подобии самосопряженному. Напомним, что оператор H в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *подобным самосопряженному*, если существуют такие самосопряженный оператор A и ограниченный, ограниченно обратимый оператор X , что $H = X^{-1}AX$.

Сначала рассмотрим простейший из возможных случаев – случай финитного потенциала.

2. Случай финитного потенциала.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $v_k \in \mathbb{R}$, $v_k = 0$ при $k > n$ или $k < m$, $m < n$, причем $\sum_{k=m}^n v_k = 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при всех $t \in (-\delta, \delta)$ спектр оператора $H(t) = H_0 + itV$ совпадает с интервалом $[-2, 2]$, а сам оператор $H(t)$ подобен самосопряженному оператору.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00249а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5403.2006.16) и фонда INTAS (грант № 05-100000807883).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda \notin \sigma(H(t))$ резольвента оператора $H(t)$ определяется (см. [4]) формулой

$$(H(t) - \lambda I)_{kl}^{-1} = \frac{u_{k>}^+(t, z) u_{k<}^-(t, z)}{W(t, z)},$$

где $k_{>} = \max(k, l)$, $k_{<} = \min(k, l)$, $u^\pm$ – решения рекуррентного соотношения

$$u_{k+1}^\pm + u_{k-1}^\pm + (itv_k - \lambda)u_k^\pm = 0, \quad (1)$$

причем при $k \geq n$ $u_k^+ = z^k$, а при $k \leq m$ $u_k^- = z^{-k}$, где $z + z^{-1} = \lambda$, $|z| < 1$. В дальнейшем мы будем входящие в рассмотрение функции рассматривать и как функции переменной z , и как функции переменной λ , где z и λ связаны указанным соотношением.

Знаменатель резольвенты W определяется как вронскиан (не зависящий от k) решений $u^\pm(t, z)$: $W(t, z) = u_{k+1}^+(t, z)u_k^-(t, z) - u_k^+(t, z)u_{k+1}^-(t, z)$. Таким образом, дискретный спектр оператора $H(t)$ совпадает с множеством нулей вронскиана $W(t, z)$ как функции переменной λ .

Так как $\|H(t)\| \leq 2 + |t| \cdot \|V\|$, весь его спектр сосредоточен в круге радиуса $r = 2 + |t| \cdot \|V\|$. Поэтому вронскиан W не имеет нулей при $|\lambda| > r$ и, тем более, при $|z| < (r - \sqrt{r^2 - 4})/2$.

Как функции переменной z решения $u^\pm$ и их вронскиан W определены при $0 < |z| < 1$, однако в силу финитности потенциала V допускают аналитическое продолжение во внешность единичного круга. Именно, компоненты $u^\pm$ и вронскиан W будут рациональными функциями переменной z (в нуле и на бесконечности вронскиан имеет полюса).

В силу непрерывной зависимости решений $u_k^\pm$ и вронскиана W от параметра t и аналитичности по переменной z этих же функций, нули вронскиана W непрерывно зависят от параметра t .

При $t = 0$, очевидно, $u_k^\pm = z^{\pm k}$ и $W[u^+, u^-] = z - z^{-1}$. Таким образом, для невозмущенного оператора вронскиан W имеет два простых корня $z_{1,2} = \pm 1$. Тем самым, при достаточно малых значениях параметра t вронскиан W будет иметь один корень в окрестности точки $z = 1$, один корень в окрестности $z = -1$ и, возможно, некоторое (конечное) число корней во внешности единичной окружности (т.е. на нефизическом листе), стремящихся к бесконечности при стремлении t к нулю. Через $z_\pm(t)$ мы обозначим тот корень вронскиана W , который стремится к ± 1 при стремлении t к нулю.

Вычислим теперь производную $dz_\pm/ds$ (где $s = t^2$) при $t = 0$. Так как $W|_{t=0} = z - z^{-1}$,

$$\left. \frac{dz_+}{ds} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial W}{\partial s} \right|_{z=1, t=0}.$$

При $z = 1$ ($\lambda = 2$) решение u^+ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$u_{k+1}^+ + (itv_k - 2)u_k^+ + u_{k-1}^+ = 0$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} u_k^+ &= 1 \quad \text{при } k \geq n, \\ \frac{u_{n-1}^+}{u_n^+} &= 1 - itv_n, \end{aligned}$$

$$\frac{u_{n-2}^+}{u_{n-1}^+} = 2 - itv_{n-1} - \frac{1}{1 - itv_n} = 1 - it(v_{n-1} + v_n) + t^2 v_n^2 + o(t^2),$$

$$\frac{u_{n-3}^+}{u_{n-2}^+} = 2 - itv_{n-2} - \frac{u_{n-1}^+}{u_{n-2}^+} = 1 - it(v_{n-2} + v_{n-1} + v_n) + t^2((v_{n-1} + v_n)^2 + v_n^2) + o(t^2).$$

Продолжая решение рекуррентного соотношения, получим

$$\frac{u_{m-1}^+}{u_m^+} = 2 - itv_m - \frac{u_{m+1}^+}{u_m^+} = 1 - it \sum_{k=m}^n v_k + t^2 \sum_{k=m+1}^n \left(\sum_{j=k}^n v_j \right)^2 + o(t^2). \quad (2)$$

Учитывая, что $u_m^- = u_{m-1}^- = 1$ и $\sum_{k=m}^n v_k = 0$, мы видим, что

$$W[u^+, u^-]_{z=1} = u_m^+ - u_{m-1}^+ = u_m^+ \left(1 - \frac{u_{m-1}^+}{u_m^+} \right).$$

А так как при стремлении t к нулю $u_k^\pm$ стремятся к 1, то

$$W[u^+, u^-]_{z=1} = -t^2 \sum_{k=m+1}^n \left(\sum_{j=k}^n v_j \right)^2 + o(t^2) = -As + o(s), \quad \text{где } A > 0. \quad (3)$$

Таким образом, $dz_+/ds|_{t=0} > 0$. Аналогично можно показать, что $dz_-/ds|_{t=0} < 0$. А это означает, что найдется такое $\delta > 0$, что при всех $t \in (-\delta, \delta)$ все корни вронскиана W решений u^+ и u^- как функции переменной z находятся во внешности единичного круга (на “нефизическом” листе). Поэтому при указанных t мы имеем $\inf_{|z|<1} |W(t, z)| > 0$.

Из этого сразу следует, что спектр возмущенного оператора $H(t)$ совпадает с интервалом $[-2, 2]$. Покажем, что в данном случае оператор $H(t)$ подобен самосопряженному оператору. Проще всего это заметить, введя в рассмотрение характеристическую матрицу-функцию оператора $H(t)$, определяемую равенством

$$\Theta_{H(t)}(\lambda) = I + 2itJ|V|^{1/2}(H(-t) - \lambda I)^{-1}|V|^{1/2},$$

где $V = J|V|$ — полярное представление оператора V . В случае, когда знаменатель W резольвенты оператора $H(t)$ не обращается в нуль вне интервала $[-2, 2]$, характеристическая функция $\Theta_{H(t)}(\lambda)$ будет ограниченной матрицей-функцией при $\lambda \notin [-2, 2]$, откуда [5], [6] следует подобие оператора $H(t)$ самосопряженному. Можно также заметить (по аналогии с [7], [8], где соответствующие утверждения доказаны для дифференциальных операторов), что при отсутствии невещественного спектра и спектральных особенностей спектральные проекторы оператора $H(t)$ являются ограниченными операторами.

Заметим, что из проведенных рассуждений следует, что при нарушении условия $\sum_k v_k = 0$ оператор $H(t)$ будет обладать спектром вне интервала $[-2, 2]$ при сколь угодно малых вещественных t .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы 1 параметр $t \in (-\delta, \delta)$ (так что спектр оператора $H(t) = H_0 + itV$ совпадает с интервалом $[-2, 2]$ и сам оператор $H(t)$ подобен самосопряженному оператору). Пусть Q — произвольный финитный потенциал, $q_k \in \mathbb{C}$, $q_k = 0$ при $|k| > k_0$. Тогда существует такое $\delta_1 > 0$, что при всех $\tau \in \mathbb{C}$ таких, что $|\tau| < \delta_1$, спектр оператора $H(t, \tau) = H_0 + itV + \tau Q$ совпадает с интервалом $[-2, 2]$ и оператор $H(t, \tau)$ подобен самосопряженному оператору.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что вронскиан W решений u^+ и u^- для оператора $H(t)$ как функция переменной z имеет только два нуля, находящиеся во внешности единичного круга. Следовательно, этим же свойством будет обладать при достаточно малых τ и вронскиан решений u^+ и u^- для оператора $H(t, \tau)$. А отсюда, как мы увидели по ходу доказательства теоремы, следует сохранение спектра оператора $H(t, \tau)$ и его подобие самосопряженному оператору.

Обратим внимание на то, что спектр возмущенного оператора $H(t)$ стал устойчив относительно малых финитных возмущений. Этим свойством невозмущенный оператор H_0 не обладал – в случае вещественного потенциала Q при любом вещественном τ оператор $H_0 + \tau Q$ имеет хотя бы одну точку спектра вне интервала $[-2, 2]$ (см. [9]).

В завершение рассмотрим простейший пример, в котором величина δ легко находится явно. Пусть $v_1 = 1$, $v_0 = -1$. Тогда $u_1^- = z^{-1} + it$, $u_0^+ = 1 - itz$, $W[u^+, u^-] = z^{-1}(z^2(1 - t^2) - 1)$. Тем самым, при $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ нули вронскиана (как функции переменной z) лежат во внешности единичного круга, откуда следует подобие оператора $H(t)$ самосопряженному и отсутствие у него спектра вне интервала $[-2, 2]$. При $t = \pm\sqrt{2}$ вронскиан W имеет два корня $\pm i$, которые будут являться спектральными особенностями для оператора $H(t)$. Тем самым, исследуемый оператор при указанных значениях t уже не будет подобным самосопряженному оператору, хотя его спектр по-прежнему совпадает с интервалом $[-2, 2]$. Наконец, при $|t| > \sqrt{2}$ оператор $H(t)$ будет обладать невещественным спектром.

3. Заключительные замечания. Нетрудно показать, что доказанные утверждения справедливы не только в случае финитного потенциала, но и в более общем случае экспоненциально убывающего потенциала. Именно, в этом случае решения $u_k^\pm$ являются решениями рекуррентного соотношения (1), обладающими асимптотиками $u_k^+ = z^k(1 + o(1))$ при $k \rightarrow +\infty$ и $u_k^- = z^{-k}(1 + o(1))$ при $k \rightarrow -\infty$. Если $|v_k| \leq Cr^{-|k|}$, где $r > 1$, то эти решения, а также их вронскиан, будут являться аналитическими функциями в круге радиуса $\sqrt{r}$ [4]. Это позволяет перенести на указанный случай доказательства теоремы 1 и ее следствия. Следует только заметить, что конечные суммы в (2) и (3) заменяются соответствующими суммами рядов:

$$\frac{u_{m-1}^+}{u_m^+} = 1 - it \sum_{k=m}^{\infty} v_k + t^2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j \right)^2 + o(t^2),$$

$$W[u^+, u^-]|_{z=1} = -t^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j \right)^2 + o(t^2).$$

В заключение автор выражает свою благодарность С. Н. Набоко и А. А. Шкаликову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Albeverio, S. Kuzhel, “Pseudo-Hermiticity and theory of singular perturbations”, *Lett. Math. Phys.*, **67**:3 (2004), 223–238.
- [2] S. Albeverio, S.-M. Fei, P. Kurasov, “Point interactions: $\mathcal{PT}$ -Hermiticity and reality of the spectrum”, *Lett. Math. Phys.*, **59**:3 (2002), 227–242.

- [3] C. M. Bender, S. Boettcher, “Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:24 (1998), 5243–5246.
- [4] В. Э. Лянце, “Несамосопряженный разностный оператор”, *Докл. АН СССР*, **173**:6 (1967), 1260–1263.
- [5] С. Н. Набоко, “Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам”, *Функц. анализ и его прил.*, **18**:1 (1984), 16–27.
- [6] Л. А. Сахнович, “Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:1 (1969), 52–64.
- [7] Б. Я. Левин, “Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **106**:2 (1956), 187–190.
- [8] В. В. Блазак, “О разложении по главным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на всей оси”, *Докл. АН УССР*, **4** (1965), 416–419.
- [9] D. Damanik, D. Hundertmark, R. Killip, B. Simon, “Variational estimates for discrete Schrödinger operators with potentials of indefinite sign”, *Comm. Math. Phys.*, **238**:3 (2003), 545–562.

М. М. Фаддеев

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: mmf@ns2691.spb.edu

Поступило

27.02.2008