Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бондаренко, Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 661–670

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:47:44

Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем

А. А. Бондаренко

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы размерности m и n над K , $\text{char } K \neq 2$. Рассматривается проблема бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$: когда произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$? Дано решение проблемы бирациональной композиции анизотропных квадратичных форм над K , если $m = n = 2$. Основной результат статьи – полное решение проблемы бирациональной композиции форм $f(X)$ и $g(Y)$ над локальным полем P , $\text{char } P \neq 2$.

Библиография: 9 названий.

Введение. Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и $Z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K , $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K , т.е. $f(X) \cdot g(Y)$ представляется квадратичной K -формой $h(Z)$ над $K(X, Y)$ и $x_i y_j \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют *бирациональную композицию* $h(Z)$ над полем K .

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о “сумме квадратов”: найти наименьшее t при заданных m и n , чтобы выполнялось тождество $(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \dots + \Phi_t^2$, где Φ_i – билинейные формы от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ над K . Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1], [2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам в изучении такой композиции квадратичных форм. Пфистер продолжил рассматривать такие тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4]. Проблема композиции сформулирована в [5] следующим образом: “Пусть f_1, f_2 – квадратичные формы от независимых переменных x_i, y_j . Когда произведение $f_1 f_2$ бирационально эквивалентно квадратичной форме ψ от переменных z_i ?” В [6] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K .

Естественно возникает проблема изучения бирациональной композиции квадратичных форм над классами полей.

Пусть P – локальное поле, т.е. полное дискретно нормированное поле с конечным полем вычетов, $\text{char } P \neq 2$.

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями.

Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над локальным полем P , если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропны над P , следует из теоремы 1 статьи [6]: произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно $h(Z)$ над P тогда и только тогда, когда $h(Z)$ – любая ненулевая квадратичная форма размерности $m + n$, невырожденная часть которой изотропна над P .

В п. 1 настоящей статьи получено решение проблемы бирациональной композиции анизотропных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K , если $m = n = 2$. Обозначим через $d(f)$ дискриминант $f(X)$, через $D_K(f)$ – множество элементов из K^* , представимых $f(X)$ над K . Доказана

ТЕОРЕМА 1. *Бинарные квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$, анизотропные над K , образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над K тогда и только тогда, когда $d(f)/d(g) \in (K^*)^2$. И если $d(f)/d(g) \in (K^*)^2$, то с точностью до K -эквивалентности $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = ab(z_1^2 + dz_2^2)$, где $a \in D_K(f)$, $b \in D_K(g)$, и $d = d(f)/a^2$.*

Из теоремы 1 следует решение проблемы бирациональной композиции бинарных анизотропных квадратичных форм над локальным полем P . В случае, если $f(X)$ и $g(Y)$ – бинарные анизотропные квадратичные формы над P и $d(f)/d(g) \notin (P^*)^2$, то бирациональной композиции над P этих квадратичных форм не существует. Оказывается, что во всех остальных случаях, кроме отмеченного, анизотропные над P квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию над P .

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над локальным полем, дает

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы размерности m и n над локальным полем P , $\text{char } P \neq 2$, $m \leq n$. Тогда $1 \leq m \leq n \leq 4$, квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ не образуют бирациональную композицию над P при $m = n = 2$ и $d(f)/d(g) \notin (P^*)^2$. В остальных случаях бирациональная композиция $h(Z)$ над P квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ определена однозначно с точностью до P -эквивалентности:*

- а) если $1 = m \leq n \leq 4$, то $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = cg(z_1, \dots, z_n)$, где $c \in D_P(f)$;
- б) если $m = n = 2$ и $d(f)/d(g) \in (P^*)^2$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = cg(z_1, z_2)$, где $c \in D_P(f)$;
- с) если $2 \leq m \leq n = 4$ и $2 \leq m \leq n = 3$, то $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2$, где $a, b \in P^*$, символ Гильберта $(a, b) = -1$.

Основные понятия и обозначения традиционны (см. [7], [8] либо [9]).

1. Важным этапом в решении вопроса о бирациональной композиции анизотропных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над локальным полем является его решение для случая $m = n = 2$. Примечательно, что критерий существования бирациональной композиции бинарных анизотропных квадратичных форм получен над произвольным полем K , $\text{char } K \neq 2$. Основная цель этого пункта

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $a \in D_K(f)$, $b \in D_K(g)$, то можем считать $f(X) = ax_1^2 + a_2x_2^2$, $g(Y) = by_1^2 + b_2y_2^2$. Произведение

$$f(X) \cdot g(Y) = ab(x_1^2 + dx_2^2)(y_1^2 + d_1y_2^2),$$

где $d = a_2/a$, $d_1 = b_2/b$. Это сводит вопрос о бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$ к случаю $f_1(X) = x_1^2 + dx_2^2$ и $g_1(Y) = y_1^2 + d_1y_2^2$. Докажем, что бирациональная композиция квадратичных форм $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $d_1/d \in (K^*)^2$.

Докажем достаточность. Пусть $d_1 = \alpha^2 d$, где $\alpha \in K$. Тогда

$$(x_1^2 + dx_2^2)(y_1^2 + \alpha^2 dy_2^2) = (x_1y_1 + \alpha dx_2y_2)^2 + d(x_2y_1 - \alpha x_1y_2)^2 = z_1^2 + dz_2^2,$$

где $z_1 = x_1y_1 + \alpha dx_2y_2$, $z_2 = x_2y_1 - \alpha x_1y_2$, $z_3 = x_1$, $z_4 = x_2$. Очевидно, что $x_1 = z_3$, $x_2 = z_4$ и y_1, y_2 рационально выражаются через z_1, z_2, z_3, z_4 . А это и доказывает существование бирациональной композиции $q(Z) = z_1^2 + dz_2^2$ над K квадратичных форм $f_1(X)$ и $g_1(Y)$.

Докажем необходимость. Пусть бирациональная композиция над K квадратичных форм $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ есть $q(Z)$. Предположим $\alpha = d_1/d \in (K^*)^2$. Тогда $L = K(\sqrt{\alpha}) \neq K$. Если $f_1(x)$ становится изотропной над L , то $\sqrt{-d} \in L$. Имеем цепочку расширений полей $K \subset K(\sqrt{-d}) \subset L$. Очевидно, $[L : K] = 2$ и $[K(\sqrt{-d}) : K] = 2$, ибо $\sqrt{-d} \notin K^*$. Следовательно, $L = K(\sqrt{-d})$. Легко видеть, что в этом случае и $g_1(Y)$ изотропна над L . Аналогично получаем, что $L = K(\sqrt{-d_1})$. Имеем $K(\sqrt{-d}) = K(\sqrt{-d_1})$, поэтому $\sqrt{-d_1} = a + b\sqrt{-d}$, где $a, b \in K$. Следовательно, $-d_1 = a^2 - b^2d + 2ab\sqrt{-d}$, и значит, $ab\sqrt{-d} = 0$. Если $a = 0$, то $d_1 = b^2d$ и $\alpha = b^2 \in (K^*)^2$. Если $b = 0$, то $\sqrt{-d_1} = a \in K^*$ и квадратичная форма $g_1(Y)$ изотропна над K . Получили противоречие при предположении изотропности $f_1(x)$ над L . Поэтому, если $\alpha \notin (K^*)^2$, то квадратичная форма $f_1(X)$ анизотропна над L . Аналогично получаем анизотропность $g_1(Y)$ над L .

В итоге над L имеем бирациональную композицию $f_1(X)$ и $g_1(Y)$, равную $\psi(U) = u_1^2 + du_2^2$, как установлено при доказательстве достаточности, ибо $\alpha = d_1/d \in L^{*2}$. По теореме 2 из [6] невырожденная часть $\psi(U)$ анизотропна над L и $\psi(U)$ эквивалентна $q(Z)$ над L . Следовательно, $\text{rang } q(Z) = \text{rang } \psi(U) = 2$. По лемме 1 из [6] $f_1(X) \in D_{K(X)}(q_1)$ и $g_1(Y) \in D_{K(Y)}(q_1)$, где q_1 – невырожденная часть q . Отсюда по теореме 2.1 из [7] получаем, что $q_1 \sim f_1$ и $q_1 \sim g_1$ над полем K , ибо $\dim q_1 = \dim f_1 = \dim g_1$. Следовательно, $f_1 \sim g_1$ над K , а значит, $d_1/d \in (K^*)^2$ как определители эквивалентных квадратичных форм над K . Получили противоречие с предположением $\alpha = d_1/d \notin (K^*)^2$. Оно и доказывает, что если существует бирациональная композиция над K квадратичных форм $f_1(X)$ и $g_1(Y)$, то $d_1/d \in (K^*)^2$.

Заметим, что включение $d_1/d \in (K^*)^2$ эквивалентно включению $d(f)/d(g) \in (K^*)^2$. Поэтому бинарные анизотропные над K квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над K тогда и только тогда, когда $d(f)/d(g) \in (K^*)^2$. И, если $d(f)/d(g) \in (K^*)^2$, то

$$h(z_1, z_2, z_3, z_4) = abq(Z) = ab(z_1^2 + dz_2^2),$$

где $z_1 = x_1y_1 + \alpha dx_2y_2$, $z_2 = x_2y_1 - \alpha x_1y_2$, $z_3 = x_1$, $z_4 = x_2$, ибо

$$f(X) \cdot g(Y) = abf_1(X)g_1(Y) = abq(Z).$$

Остается заметить, что бирациональная композиция $h(Z)$ квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K определена однозначно с точностью до K -эквивалентности по теореме 2 из [6]. Это и завершает доказательство теоремы 1.

Квадратичные формы f и g над полем K назовем *эквивалентными с точностью до множителя над K* , если существует $\alpha \in K^*$, что αf и g эквивалентны над K .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K . Над полем K $f' \sim \alpha f$ и $g' \sim \beta g$, где $\alpha, \beta \in K^*$, тогда f' и g' образуют бирациональную композицию $\alpha\beta h(Z)$ над полем K . Это позволяет заменять любую из квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ на эквивалентную с точностью до множителя над K при изучении бирациональной композиции; за результатом после замены легко проследить.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $d(f)/d(g) \in (K^*)^2$ равносильно эквивалентности с точностью до множителя над K для бинарных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K . Поэтому из теоремы 1 следует, что бирациональная композиция бинарных анизотропных над K квадратичных форм существует тогда и только тогда, когда они эквивалентны с точностью до множителя над K . И если бирациональная композиция $h(Z)$ над K существует, то невырожденная часть $h(Z)$ из того же класса эквивалентности с точностью до множителя над K , что и квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из строения группы $Q_p^*/(Q_p^*)^2$ (см., например, [8; с. 34] при $p \neq 2$ следует, что квадратичные формы $\langle 1, -u \rangle$, $\langle 1, -p \rangle$ и $\langle 1, -pu \rangle$, где u — единица Q_p^* , не являющаяся квадратом, дают полную систему представителей классов эквивалентности с точностью до множителя над Q_p бинарных анизотропных квадратичных форм. Для квадратичных форм из одного класса эквивалентности согласно замечанию 2 существует бирациональная композиция. А для квадратичных форм из разных классов эквивалентности с точностью до множителя над Q_p не существует бирациональной композиции над Q_p . Например, квадратичные формы $f(X) = x_1^2 - ux_2^2$ и $g(Y) = y_1^2 - py_2^2$ не образуют бирациональную композицию над Q_p .

2. Докажем утверждения о квадратичных формах над локальным полем P , необходимые для доказательства теоремы 2. Некоторые из них представляют и самостоятельный интерес.

Если $a \in P^* \setminus (P^*)^2$, то квадратичная форма $\langle 1, -a \rangle$ анизотропна над P , причем (см. [9; с. 168]) $D_P(\langle 1, -a \rangle)$ — подгруппа P^* индекса 2. И, следовательно, для любого $a \in P^* \setminus (P^*)^2$ существует такое $b \in P^* \setminus D_P(\langle 1, -a \rangle)$, что квадратичная форма $\langle 1, -a, -b \rangle$ анизотропна над P , а значит, символ Гильберта (см. [9; с. 164]) $(a, b) = -1$. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $a, b \in P^*$, $(a, b) = -1$, то квадратичная форма от четырех переменных $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$ анизотропна над P . Любая анизотропная квадратичная форма над P от четырех переменных эквивалентна над P квадратичной форме $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существуют такие значения $a_1, a_2, a_3, a_4 \in P$, не все равные 0, что $a_1^2 - aa_2^2 - ba_3^2 + aba_4^2 = 0$. В силу выбора $a \in P^*$, если $a_1^2 - aa_2^2 = 0$, то $a_1 = a_2 = 0$. Поэтому a_3 и a_4 одновременно не могут быть равны 0. Следовательно, в силу выбора $a \in P^*$ и $a_3, a_4 \in P$

$$a_3^2 - aa_4^2 \neq 0 \quad \text{и} \quad b = \frac{a_1^2 - aa_2^2}{a_3^2 - aa_4^2}.$$

А значит, $b \in D_P(\langle 1, -a \rangle)$, ибо $D_P(\langle 1, -a \rangle)$ – подгруппа P^* , что отмечено в начале п. 2. Но $b \in P^*$ выбран так, что $(a, b) = -1$, т.е. квадратичная форма $\langle 1, -a, -b \rangle$ не представляет нуля над P , а значит, $b \notin D_P(\langle 1, -a \rangle)$. Полученное противоречие и доказывает, что квадратичная форма от четырех переменных $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$ анизотропна над P .

Согласно утверждению 63.17 [9; с. 169] любая анизотропная квадратичная форма над P от четырех переменных эквивалентна над P квадратичной форме

$$\langle 1, -\Delta, \pi, -\pi\Delta \rangle,$$

где Δ – единица из P квадратичного дефекта $4\wp$, π – фиксированный униформирующий элемент из P . Если Δ_1 другая единица квадратичного дефекта $4\wp$, π_1 – другой униформирующий элемент из P , то квадратичная форма $\langle 1, -\Delta_1, \pi_1, -\pi_1\Delta_1 \rangle$ эквивалентна над P квадратичной форме $\langle 1, -\Delta, \pi_1, -\pi_1\Delta \rangle$, ибо согласно утверждения 63.4 [9; с. 161] $\Delta_1 \in \Delta U^2$, где U – группа единиц поля P . Из анизотропности над P квадратичных форм $\langle 1, -\Delta, \pi, -\pi\Delta \rangle$ и $\langle 1, -\Delta, \pi_1, -\pi_1\Delta \rangle$ имеем $\pi, \pi_1 \notin D_P(\langle 1, -\Delta \rangle)$. Но тогда $\pi/\pi_1 \in D_P(\langle 1, -\Delta \rangle)$, ибо $[P^*: D_P(\langle 1, -\Delta \rangle)] = 2$. Квадратичная форма $\langle 1, -\Delta \rangle$ мультипликативна [7; с. 9], поэтому $D_P(\langle 1, -\Delta \rangle) = G_P(\langle 1, -\Delta \rangle)$. Следовательно, $\pi/\pi_1 \langle 1, -\Delta \rangle \sim \langle 1, -\Delta \rangle$, и значит,

$$\begin{aligned} \langle 1, -\Delta, \pi_1, -\pi_1\Delta \rangle &= \langle 1, -\Delta \rangle \perp \pi_1 \langle 1, -\Delta \rangle \\ &\sim \langle 1, -\Delta \rangle \perp \pi_1 \cdot (\pi/\pi_1) \langle 1, -\Delta \rangle = \langle 1, -\Delta, \pi, -\pi\Delta \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому квадратичные формы $\langle 1, -\Delta, \pi, -\pi\Delta \rangle$ и $\langle 1, -\Delta_1, \pi_1, -\pi_1\Delta_1 \rangle$ эквивалентны над полем P . Это и доказывает однозначность анизотропной квадратичной формы над P от четырех переменных с точностью до P -эквивалентности. А значит, любая анизотропная квадратичная форма над P от четырех переменных P -эквивалентна квадратичной форме $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$, где $a, b \in P^*$, $(a, b) = -1$.

Часто в дальнейшем окажется полезной

ЛЕММА. *Любая анизотропная квадратичная форма ранга 2 над P эквивалентна с точностью до множителя над P квадратичной форме $\langle 1, -a \rangle$, где $a \in P^* \setminus (P^*)^2$, и является подформой подходящей анизотропной квадратичной формы ранга 3 над P . Анизотропная квадратичная форма ранга 3 над P эквивалентна с точностью до множителя над P квадратичной форме $\langle 1, -c, -d \rangle$, где $c, d \in P^*$, $(c, d) = -1$, и является подформой анизотропной квадратичной формы ранга 4, единственной с точностью до эквивалентности над P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая анизотропная квадратичная форма ранга 2 над P приводится к диагональному виду $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$, где $a_1a_2 \in P^*$. Очевидно,

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = a_1 \left(x_1^2 - \frac{-a_2}{a_1} x_2^2 \right).$$

Положим $a = -a_2/a_1$. Из анизотропности квадратичной формы $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ над P получаем, что $a = -a_2/a_1 \notin (P^*)^2$ и исходная квадратичная форма эквивалентна с точностью до множителя над P квадратичной форме $\langle 1, -a \rangle$. Очевидно, квадратичная форма $a_1(x_1^2 - ax_2^2)$ подформа анизотропной квадратичной формы $a_1(x_1^2 -$

$ax_2^2 - bx_3^2$), где $(a, b) = -1$, ранга 3. Существование подходящего b для $a \in P^* \setminus (P^*)^2$ отмечалось в начале. Это завершает доказательство первого утверждения леммы.

Далее, аналогичное рассуждение с анизотропной квадратичной формой f над P ранга 3 доказывает ее эквивалентность квадратичной форме $b_1(x_1^2 - cx_2^2 - dx_3^2)$, где $b_1, c, d \in P^*$, $(c, d) = -1$. Из предложения 1 следует, что $b_1(x_1^2 - cx_2^2 - dx_3^2 + cdx_4^2)$ – анизотропная квадратичная форма ранга 4. Очевидно f эквивалентна над P подформе квадратичной формы $b_1(x_1^2 - cx_2^2 - dx_3^2 + cdx_4^2)$, которая анизотропна над P и ранга 4. И любая анизотропная квадратичная форма ранга 4 ей P -эквивалентна согласно предложению 1. Лемма доказана.

Для квадратичных форм от трех переменных над локальным полем получаем интересное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Все анизотропные квадратичные формы над P от трех переменных эквивалентны с точностью до множителя над P между собой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ и $g(y_1, y_2, y_3)$ произвольные анизотропные квадратичные формы над P . Согласно лемме $f(X)$ и $g(Y)$ являются подформами анизотропной квадратичной формы h от четырех переменных над P , т.е. $h \sim f \perp f_1$ и $h \sim g \perp g_1$, где $f_1 = \langle a \rangle$ и $g_1 = \langle b \rangle$, $a, b \in P^*$. Следовательно, $h \sim f \perp f_1$ и $(a/b)h \sim (a/b)g \perp (a/b)g_1$, где $(a/b)g_1 = \langle a \rangle$. Согласно предложению 1 анизотропные квадратичные формы от четырех переменных h и $(a/b)h$ эквивалентны над P . Очевидно, что $f_1 = \langle a \rangle$ и $(a/b)g_1 = \langle a \rangle$ эквивалентные квадратичные формы над P . Тогда по теореме сокращения [8; с. 59] получаем, что квадратичная форма $f(X)$ эквивалентна $(a/b)g(Y)$ над P . Это и означает, по определению, эквивалентность квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ с точностью до множителя P . Предложение доказано.

3. Доказательство теоремы 2. Из утверждения 63.19 (см. [9; с. 170]) следует, что если квадратичная форма над P анизотропна, то ее размерность не превосходит 4. Поэтому $1 \leq m \leq n \leq 4$. Из теоремы 1 настоящей статьи имеем, что если $m = n = 2$ и $d(f)/d(g) \notin (P^*)^2$, то квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ не образуют бирациональную композицию над P . Оставшиеся возможности для m и n исчерпываются следующими случаями:

- а) $m = 1, n \leq 4$;
- б) $m = n = 2$ и $d(f)/d(g) \in (P^*)^2$;
- с) $2 \leq m \leq n = 4$ и $2 \leq m \leq n = 3$.

Из теоремы 2 статьи [6] следует, что если квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над P , то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до эквивалентности над P . Покажем, что в случаях а), б) и с) $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию над P и укажем квадратическую форму $h(Z)$ бирационально эквивалентную произведению $f(X)$ и $g(Y)$ над P . Это и докажет нашу теорему.

В случае а) по определению $h(Z)$ – квадратичная форма от $(n + 1)$ переменного. Если $f(X) = cx_1^2$, то

$$f(X) \cdot g(Y) = cx_1^2 g(y_1, \dots, y_n) = cg(z_1, \dots, z_n),$$

где $c \in D_K(f)$, $n = 1, 2, 3$ либо 4, и

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1, \\ \dots\dots\dots \\ z_n = x_1 y_n, \\ z_{n+1} = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = z_{n+1}, \\ y_1 = \frac{z_1}{z_{n+1}}, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \frac{z_n}{z_{n+1}}. \end{cases}$$

Это доказывает бирациональную эквивалентность над P произведения $f(X) \cdot g(Y)$ и квадратичной формы $h(z_1, \dots, z_{n+1}) = cg(z_1, \dots, z_n)$.

Случай б) следует из теоремы 1: если $d(f)/d(g) \in (P^*)^2$ и $m = n = 2$, то $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над P квадратичной форме $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = cg(z_1, z_2)$, где $c \in D_K(f)$.

Случай с) требует более тщательного рассмотрения. Если $2 \leq m \leq n = 4$, то согласно предложению 1 настоящей статьи $g \sim \langle 1, -a, -b, ab \rangle$ над P , где $a, b \in P^*$, $(a, b) = -1$. Анизотропная квадратичная форма $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$ над P является пфистеровой (определение см. [7; с. 8]). Согласно лемме из п. 2 квадратичная форма $f(X)$ эквивалентна над P подформе квадратичной формы $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$. По следствию 2 из [6] существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над P , равная $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2$. В оставшемся случае $2 \leq m \leq n = 3$ мы проведем непосредственное доказательство и выразим $z_1, \dots, z_{m+n}$ через $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$.

Пусть $m = n = 3$. Согласно лемме и предложению 2 из п. 2 можем считать квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентными с точностью до множителя над P квадратичной форме $\langle 1, -a, -b \rangle$, где $a, b \in P^*$, $(a, b) = -1$. По замечанию 1 для упрощения можем считать $f(X) = x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2$, $g(Y) = y_1^2 - ay_2^2 - by_3^2$. Получаем

$$\begin{aligned} f(X) \cdot g(Y) &= (x_1 y_1 + ax_2 y_2 + bx_3 y_3)^2 \\ &\quad - a(x_2 y_1 + x_1 y_2)^2 - b(x_3 y_1 + x_1 y_3)^2 + ab(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 \\ &= z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2 + 0z_5^2 + 0z_6^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 + ax_2 y_2 + bx_3 y_3, \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2, \\ z_3 = x_3 y_1 + x_1 y_3, \\ z_4 = x_2 y_3 + x_3 y_2, \\ z_5 = x_1, \\ z_6 = x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Чтобы выразить x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 из (2) через $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ заметим, что $-x_3z_2 + x_2z_3 - x_1z_4 = 0$ (можно проверить непосредственным вычислением). Поэтому $x_1 = z_5, x_2 = z_6$ и $x_3 = (z_6z_3 - z_5z_4)/z_2$, а y_1, y_2, y_3 выражаются через $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ рационально из первых трех равенств (2). Это и доказывает бирациональную эквивалентность $f(X) \cdot g(Y)$ и $h(z_1, \dots, z_6) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2$ в случае $m = n = 3$. Осталось рассмотреть случай $m = 2, n = 3$. В этом случае согласно лемме и предложению 2 $f(X)$ эквивалентна с точностью до множителя над P квадратичной форме $\langle 1, -a \rangle$, где $a \in P^* \setminus (P^*)^2$, а $g(Y)$ – квадратичной форме $\langle 1, -a, -b \rangle$, где $b \in P^*, (a, b) = -1$. И по замечанию 1 для упрощения можем считать $f(X) = x_1^2 - ax_2^2, g(Y) = y_1^2 - ay_2^2 - by_3^2$. Тогда

$$\begin{aligned} f(X) \cdot g(Y) &= (x_1^2 - ax_2^2)(y_1^2 - ay_2^2) - (x_1^2 - ax_2^2) \cdot by_3^2 \\ &= (x_1y_1 + ax_2y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 - b(x_1y_3)^2 + ab(x_2y_3)^2 \\ &= z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2 + 0z_5^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + ax_2y_2, \\ z_2 = x_1y_2 + x_2y_1, \\ z_3 = x_1y_3, \\ z_4 = x_2y_3, \\ z_5 = y_3. \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) получаем $y_3 = z_5, x_2 = z_4/z_5, x_1 = z_3/z_5$; подставив x_1 и x_2 в первые два равенства (3), получим выражение y_1 и y_2 через $z_1, \dots, z_5$. Это и доказывает бирациональную эквивалентность $f(X) \cdot g(Y)$ и $h(z_1, \dots, z_5) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2$ над P в случае $m = 2, n = 3$. При непосредственных доказательствах в случае $2 \leq m \leq n = 3$ мы заменяли $f(X)$ и $g(Y)$ на эквивалентные квадратичные формы с точностью до множителя над P . Но при этом результат композиции $h(Z)$ изменялся с точностью до эквивалентности над P , ибо все анизотропные квадратичные формы от четырех переменных эквивалентны над P . Это и завершает доказательство теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При доказательстве теоремы 2 было приведено одно из возможных рациональных выражений $z_1, \dots, z_{m+n}$ через $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$, которое подтверждало бирациональную эквивалентность $f(X) \cdot g(Y)$ и $h(Z)$ в случае $2 \leq m \leq n = 3$.

В случае $2 \leq m \leq n = 4$ несложно сделать аналогичное. Если $m = n = 4$, то можем считать $f(X) = x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2, g(Y) = y_1^2 - ay_2^2 - by_3^2 + aby_4^2$, где $a, b \in P^*, (a, b) = -1$, ибо согласно предложению 1 любая анизотропная квадратичная форма от четырех переменных эквивалентна такой квадратичной форме. Тогда

$$\begin{aligned} f(X) \cdot g(Y) &= (x_1y_1 + ax_2y_2 + bx_3y_3 + abx_4y_4)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1 + bx_3y_4 + bx_4y_3)^2 \\ &\quad - b(x_1y_3 + x_3y_1 - ax_2y_4 - ax_4y_2)^2 + ab(x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 + x_3y_2)^2 \\ &= z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2 + 0z_5^2 + 0z_6^2 + 0z_7^2 + 0z_8^2 \\ &= h(z_1, \dots, z_8), \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + ax_2y_2 + bx_3y_3 + abx_4y_4, \\ z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + bx_3y_4 + bx_4y_3, \\ z_3 = x_1y_3 + x_3y_1 - ax_2y_4 - ax_4y_2, \\ z_4 = x_1y_4 - x_4y_1 - x_2y_3 + x_3y_2, \\ z_5 = x_1, \\ z_6 = x_2, \\ z_7 = x_3, \\ z_8 = x_4. \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4$ выражаются через $z_1, \dots, z_8$ как рациональные функции над P .

Если $m = 3$, $n = 4$ и взять $f(X) = x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2$, $g(Y) = y_1^2 - ay_2^2 - by_3^2 + aby_4^2$, произвольный случай сводится к этому, то для получения выражения $z_1, \dots, z_7$ через $x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4$ достаточно в (4) положить $x_4 = 0$. Получим

$$f(X) \cdot g(Y) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2 + 0z_5^2 + 0z_6^2 + 0z_7^2 = h(z_1, \dots, z_7),$$

где

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + ax_2y_2 + bx_3y_3, \\ z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + bx_3y_4, \\ z_3 = x_1y_3 + x_3y_1 - ax_2y_4, \\ z_4 = x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2, \\ z_5 = x_1, \\ z_6 = x_2, \\ z_7 = x_3. \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) $x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4$ выражаются через $z_1, \dots, z_7$, как рациональные функции над P . Если $m = 2$ и $n = 4$, то по тем же причинам можем ограничиться $f(X) = x_1^2 - ax_2^2$ и $g(Y) = y_1^2 - ay_2^2 - by_3^2 + aby_4^2$. И для получения выражения $z_1, \dots, z_6$ через $x_1, x_2, y_1, \dots, y_4$ достаточно положить $x_3 = 0$ в (5).

Получим

$$f(X)g(Y) = z_1^2 - az_2^2 - bz_3^2 + abz_4^2 + 0z_5^2 + 0z_6^2 = h(z_1, \dots, z_6),$$

где

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + ax_2y_2, \\ z_2 = x_1y_2 + x_2y_1, \\ z_3 = x_1y_3 - ax_2y_4, \\ z_4 = x_1y_4 - x_2y_3, \\ z_5 = x_1, \\ z_6 = x_2. \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4$ выражаются через $z_1, \dots, z_6$ как рациональные функции над P .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из доказательства теоремы 2 и замечания 4 имеем: если существует бирациональная композиция анизотропных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над P , то существует $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = h_1(z_1, \dots, z_t)$, где h_1 – невырожденная часть квадратичной формы $h(Z)$, и при этом $z_1, \dots, z_t$ билинейные функции от $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$. Из этого следует, что если есть бирациональная композиция анизотропных квадратичных форм над P , т.е. и билинейная композиция для этих квадратичных форм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Hurwitz, “Über die Komposition der quadratischen Formen”, *Math. Ann.*, **88**:1–2 (1922), 1–25.
- [2] J. Radon, “Lineare Scharen orthogonalen Matrizen”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1**:1 (1922), 1–14.
- [3] K. Y. Lam, “Topological methods for studying the composition of quadratic forms”, *Quadratic and Hermitian Forms* (Hamilton, Ont., 1983), CMS Conf. Proc., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, 173–192.
- [4] A. Pfister, “Multiplicative quadratische Formen”, *Arch. Math. (Basel)*, **16**:1 (1965), 363–370.
- [5] В. П. Платонов, В. И. Черноусов, “О рациональности канонических спинорных многообразий”, *Докл. АН СССР*, **252**:4 (1980), 796–800.
- [6] А. А. Бондаренко, “О бирациональной композиции квадратичных форм”, *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 2007, № 4, 56–61.
- [7] M. Knebusch, W. Scharlau, *Algebraic Theory of Quadratic Forms. Generic methods and Pfister forms. Notes taken by Heisook Lee*, DMV Sem., **1**, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.
- [8] Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.
- [9] О. Т. О’Мeara, *Introduction to Quadratic Forms*, Grundlehren Math. Wiss., **117**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

А. А. Бондаренко

Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступило

11.03.2008