Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, Необходимые условия дифференцируемости функции расстояния, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 815–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:18:09

УДК 517.5

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ

В. С. Балаганский

Рассматриваются необходимые условия дифференцируемости по Гато функции расстояния до множества. Получен ряд характеризационных результатов.

Библиография: 11 названий.

В работе рассматриваются необходимые условия дифференцируемости по Гато функции расстояния от точки до множества. Ранее дифференцируемостью функции расстояния занимались в работах [1]–[10]. Указаны необходимые условия, совпадающие с полученными ранее достаточными; тем самым, улучшены результаты, имевшиеся в обзорной статье [8].

В работе приняты следующие обозначения:

X – вещественное банахово пространство;

$\overline{A}$, ∂A – соответственно замыкание, граница множества $A \subset X$;

$\mathbb{B}(x, r) = \{z \in X : \|z - x\| \leq r\}$ – шар в X ;

$\mathbb{S}(x, r) = \{z \in X : \|z - x\| = r\}$ – сфера;

$\mathbb{B}(Z)$, $\mathbb{S}(Z)$ – единичные шар и сфера в Z ;

$\|x - y\|$;

$d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ – расстояние от x до $A \subset X$;

$P_M : x \mapsto P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = d(x, M)\}$;

$\delta S(M) = \delta S_M$ – множество δ -солнечных точек, т.е. $x \in X \setminus M$ таких, что существует последовательность $v_n \neq x$, $v_n \rightarrow x$, для которой

$$\frac{d(v_n, M) - d(x, M)}{\|v_n - x\|} \rightarrow 1; \quad (1)$$

$\delta' S_M$ – множество тех $x \in X \setminus M$, для которых существуют $h \in \mathbb{S}(X)$, $t_n \rightarrow +0$ такие, что для $v_n = x + t_n h$ имеем (1);

$E(M) = \{x \in X : P_M(x) \neq \emptyset\}$ – множество точек существования элемента наилучшего приближения;

G_M – множество тех $x \in X \setminus M$, где $d(\cdot, M)$ имеет производную Гато $d'(x, M) = f \in X^*$, так что для всех $h \in X$

$$f(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x + th, M) - d(x, M)}{t}; \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96035.

$G_M^1 = \{x \in G_M : \|d(x, M)\| = 1\};$

Γ_M^1 – множество точек $x \in X \setminus M$ таких, что для некоторого $h \in \mathbb{S}(X)$ предел (2) равен 1 при $t \rightarrow +0$;

$T(M) = E(M) \cap U(M);$

$T'_M = \{x \in X : \text{diam}(\mathbb{B}(x, xM + \delta) \cap M) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow +0\};$

$\tau AC(M)$ – множество точек *аппроксимативной τ -компактности*, т.е. тех $x \in X \setminus M$, для которых всякая минимизирующая последовательность y_n (т.е. $y_n \in M, xy_n \rightarrow xM$) содержит подпоследовательность, τ -сходящуюся к элементу из M (зависящему от подпоследовательности);

в этой работе множество, подлежащее изучению, всегда обозначается через M ; при этом предполагается, что $M = \overline{M} \neq X$;

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ – семейство всех таких M ;

$\mathcal{F}_{\text{св}}(X)$ – семейство всех тех $M \in \mathcal{F}(X)$, для которых $X \setminus M$ выпукло;

через τ обозначается любая из топологий: n (нормированная, или сильная; n обычно опускается), w (слабая), $w\omega$ (секвенциальная слабая), w^* (слабая* сопряженного пространства);

(Rf) – класс рефлексивных пространств;

(R) – класс строго выпуклых пространств (т.е. таких, что единичная сфера $\mathbb{S}(X)$ не содержит отрезков);

(S) – класс гладких пространств (в каждой точке сферы существует единственная опорная гиперплоскость);

(τLUR) – *τ -локально равномерно выпуклые* пространства: если $x, x_n \in \mathbb{S}(X)$, $\|x + x_n\| \rightarrow 2$, то $x_n \xrightarrow{\tau} x$;

(F) – класс пространств с нормой, дифференцируемой по Фреше в каждой точке $x \in \mathbb{S}(X)$;

(CD) – класс пространств, в которых из условий $x, x_n \in \mathbb{S}(X)$, $f \in \mathbb{S}(X^*)$, $f(x) = 1$, $f(x_n) \rightarrow 1$ вытекает, что x_n имеет сходящуюся подпоследовательность;

$(w^*\omega CD^*)$ – класс сопряженных пространств X^* , в которых из условий $x \in \mathbb{S}(X)$, $f_n \in \mathbb{S}(X^*)$, $f_n(x) \rightarrow 1$ следует, что существует w^* -сходящаяся подпоследовательность f_{n_k} ; в частности, $X^* \in (w^*\omega CD^*)$, если X – рефлексивное, сепарабельное или гладкое банахово пространство.

Нам потребуются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А (см. [8, предложение 1.2]). *Для любого $M \in \mathcal{F}(X)$ справедливы соотношения*

$$F_M \subset G_M^1 \subset \delta S_M, \quad G_M \cap E(M) = G_M^1 \cap E(M),$$

а если $X \in (Rf)$, то $G_M^1 \subset \Gamma'_M$.

ТЕОРЕМА А [8, теорема 1.2]. *Пусть $M \in \mathcal{F}(X)$. Тогда*

а) если $X \in (LUR)$, то

а') $\delta' S_M \subset T'_M$;

а'') $\delta S_M \cap E(M) \subset T'_M$;

б) если $X \in (\tau LUR)$, то $\delta' S_M \cap E(M) \subset T(M) \cap \tau AC(M)$.

ТЕОРЕМА Б [8, с. 144]. Рассмотрим утверждения:

- а) $X \in (wLUR)$;
- б) $G_M \cap E(M) \subset T(M) \cap wAC(M)$ для всех $M \in \mathcal{F}(X)$ (вариант: для всех $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$).

Тогда а) $\implies$ б), а если $X \in (S)$, то б) $\implies$ а).

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – банахово пространство такое, что X^* удовлетворяет условию $(w^*\omega CD^*)$. Тогда если $X \notin (\tau LUR)$, то существуют $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$ и точка $x \in (G_M^1 \cap E(M)) \setminus (T(M) \cap \tau AC(M))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X не является строго выпуклым пространством, то найдутся точки $y, z \in \mathbb{S}(X)$ такие, что $\|y + z\| = 2$, $y \neq z$. По теореме Хана–Банаха найдется функционал $g \in \mathbb{S}(X^*)$ такой, что $g(y + z) = \|g\| \cdot \|y + z\| = 2$. Тогда для множества $M = \{x \in X : g(x) \geq 1\}$ имеем $x = 0 \in (G_M^1 \cap E(M)) \setminus T(M)$. Допустим, что $X \in (R) \setminus (\tau LUR)$, т.е. существуют $x, x_n \in \mathbb{S}(X)$, $\|x + x_n\| \rightarrow 2$, и x_n не является τ -сходящейся к x последовательностью. Возьмем $f_n \in \mathbb{S}(X^*)$, $f_n(x + x_n) = \|x + x_n\| \rightarrow 2$. Имеем $f_n(x_n) \leq 1$, $f_n(x) \leq 1$; следовательно, $f_n(x) \rightarrow 1$. В силу условия $(w^*\omega CD^*)$ считаем, что f_n w^* -сходится к $f_0 \in \mathbb{B}(X^*)$. Так как $f_n(x) \rightarrow 1$, $x \in \mathbb{S}(X)$, то $f_0(x) = 1 = \|f_0\|$. Пусть

$$M_n = \left\{ z \in X : f_n(z) \geq 2 + \frac{1}{n} \right\} \quad \text{при } n = 1, 2, \dots,$$

$$M_0 = \{z \in X : f_0(z) \geq 2\}, \quad M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n.$$

В силу $X \in (R)$ получаем, что $M_n \neq M_0$ при $n \neq 0$.

Докажем, что $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$. Выпуклость $X \setminus M = \bigcap_{n=0}^{\infty} (X \setminus M_n)$ очевидна. Если $y_n \in M$, $y_n \rightarrow y$, то найдется подпоследовательность k_n такая, что $y_n \in M_{k_n}$, $yM_{k_n} \rightarrow 0$. Если $y \in M_{k_n}$ при каком-нибудь k_n , то $y \in M$; если $y \notin M_{k_n}$ ни при каком номере n , то $yM_{k_n} = 2 + 1/k_n - f_{k_n}(y) \rightarrow 0$. Так как $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$, то $f_0(y) = 2$ и $y \in M_0 \subset M$. Тогда M замкнуто, $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$.

Имеем $\|f_n\| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $\text{int } \mathbb{B}(0, 2) \subset X \setminus M_n$ при любом $n = 0, 1, 2, \dots$; следовательно, $d(0, M) = 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} xM &= \inf\{xM_n : n = 0, 1, 2, \dots\} = \min\left\{xM_0, \inf\left\{2 + \frac{1}{n} - f_n(x) : n = 1, 2, \dots\right\}\right\} \\ &= \min\left\{1, \inf\left\{2 + \frac{1}{n} - f_n(x) : n = 1, 2, \dots\right\}\right\} = 1 = xM_0; \end{aligned}$$

следовательно, $xM = 1 < xM_n$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Тогда $2x \in P_M(x)$, $x \in E(M)$.

Докажем, что для любого $y \in \mathbb{S}(X)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + ty) - \varphi(x)}{t} = -f_0(y). \quad (3)$$

Пусть $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow 0$, $z_k = x + \lambda_k \cdot h$. Можно считать, что $z_k \notin M$. Тогда

$$\varphi(z_k) = \inf\{z_k M_n : n = 0, 1, \dots\} = \min\left\{2 - f_0(z_k), \inf\left\{2 + \frac{1}{n} - f_n(z_k) : n = 1, 2, \dots\right\}\right\}.$$

Выберем последовательность $y_k \in M$ такую, что $z_k y_k \leq z_k M + \lambda_k/k$. Тогда $xy_k \rightarrow xM$. По построению для каждого номера k найдется неотрицательное целое число n_k такое, что $y_k \in M_{n_k}$. Если последовательность n_k содержит стационарную подпоследовательность n_0 , то получаем $\varphi(x) = d(x, M_{n_0}) = 2 + 1/n_0 - f_{n_0}(x) > 1$ для $n_0 > 0$; следовательно, $n_0 = 0$, $\varphi(z_k) = d(z_k, M_0)$ и для этой подпоследовательности равенство (3) установлено. Без потери общности можно считать, что $n_k \rightarrow \infty$ и предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z_k) - \varphi(x)}{\lambda_k}$$

существует.

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z_k) - \varphi(x)}{\lambda_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k y_k - \varphi(x)}{\lambda_k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k M_{n_k} - \varphi(x)}{\lambda_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n_k - f_{n_k}(z_k) - \varphi(x)}{\lambda_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n_k - f_{n_k}(x) - \lambda_k \cdot f_{n_k}(h) - \varphi(x)}{\lambda_k} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} -f_{n_k}(h) = -f_0(h). \end{aligned}$$

Имеем $f_n(x) \rightarrow 1$; следовательно, для каждого номера k найдется номер $i_k \geq k$ такой, что $(1 + 1/i_k - f_{i_k}(x))/\lambda_k \leq 1/k$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z_k) - \varphi(x)}{\lambda_k} &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k M_{i_k} - \varphi(x)}{\lambda_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/i_k - f_{i_k}(z_k) - \varphi(x)}{\lambda_k} \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/i_k - f_{i_k}(\lambda_k h) - f_{i_k}(x) - \varphi(x)}{\lambda_k} \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}(h) = -f_0(h). \end{aligned}$$

В силу произвольности $h \in \mathbb{S}(X)$ равенство (3) доказано, и справедливо $\varphi'(x) = -f_0$, $\|\varphi'(x)\| = \|f_0\| = 1$.

Докажем, что $x \notin \tau AC(M) \cap T(M)$. Рассмотрим последовательность

$$z_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{x + x_n}{\|x + x_n\|}.$$

Имеем $f_n(z_n) = 2 + 1/n$; следовательно, $z_n \in M_n \subset M$. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - z_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{x + x_n}{\|x + x_n\|} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - 2 \cdot \frac{x + x_n}{\|x + x_n\|} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (x + x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 1 = xM. \end{aligned}$$

Последовательность x_n не является τ -сходящейся к x последовательностью; следовательно, последовательность z_n не τ -сходится к $2x \in P_M(x)$.

С помощью теоремы 1 мы можем дополнить теорему Б следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – сепарабельное банахово пространство, $X^* \in (w^*\omega CD^*)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) $X \in (\tau LUR)$;
- б) $G_M \cap E(M) \subset T(M) \cap \tau AC(M)$ для всех $M \in \mathcal{F}(X)$;
- в) $G_M \cap E(M) \subset T(M) \cap \tau AC(M)$ для всех $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация а) $\Rightarrow$ б). По предположению А имеем $G_M \cap E(M) = G_M^1 \cap E(M)$, $G_M^1 \subset \delta S_M$, по теореме А $\delta S_M \cap E(M) \subset T(M) \cap \tau AC(M)$. Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна. Импликация в) $\Rightarrow$ а) по теореме 1.

В [8] доказано, что в $X \in (wLUR)$ для $M \in \mathcal{F}(X)$ справедливо включение $G_M \cap E(M) \subset T(M) \cap wAC(M)$, а в $X \in (Rf) \cap (LUR)$ для $M \in \mathcal{F}(X)$ справедливо $G_M^1 \subset T'_M$ (см. также [2]). Последнее утверждение можно улучшить.

СЛЕДСТВИЕ 2. Следующие условия эквивалентны:

- а) $X \in (Rf) \cap (LUR)$;
- б) для любого $M \in \mathcal{F}(X)$ $G_M^1 \subset T'_M$;
- в) для любого $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$ $G_M^1 \subset T'_M$;
- г) для любого $M \in \mathcal{F}(X)$ $G_M^1 \subset T(M) \cap wAC(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б). По предположению А в $X \in (Rf)$ справедливо включение $G_M^1 \subset \Gamma'_M$. По определению $\Gamma'_M \subset \delta' S_M$. По теореме А в $X \in (LUR)$ имеем $\delta' S_M \subset T'_M$.

Импликации б) $\Rightarrow$ в) и б) $\Rightarrow$ г) очевидны.

в) $\Rightarrow$ а), г) $\Rightarrow$ а). Взяв в качестве M замкнутое полупространство, получаем по теореме Джеймса $X \in (Rf)$. По следствию 1 $X \in (LUR)$ в случае в) $\Rightarrow$ а). В случае г) $\Rightarrow$ а) имеем $X \in (Rf)$; следовательно, X^* удовлетворяет условию $(w^*\omega CD^*)$. Тогда по теореме 1 $X \in (wLUR)$, по теореме Б $X \in (CD)$, значит, $X \in (LUR)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Следующие условия эквивалентны:

- а) $X \in (Rf) \cap (wLUR)$;
- б) для любого $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$ $G_M^1 \subset T(M) \cap wAC(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б). По предположению 1 из [11] в $X \in (Rf)$ для любого множества $M \in \mathcal{F}_{cc}(X)$ справедливо включение $G_M^1 \subset E(M)$. Тогда $G_M^1 \subset G_M \cap E(M)$ и по следствию 1 $G_M \cap E(M) \subset T(M) \cap wAC(M)$.

б) $\Rightarrow$ а). Взяв в качестве M полупространство и применив теорему Джеймса, получаем, что $X \in (Rf)$, по следствию 1 $X \in (wLUR)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Asplund E. Čebyšev sets in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 235–240.
- [2] Fitzpatrick S. Metric projections and the differentiability of distance functions // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. V. 22. № 2. P. 291–312.
- [3] Fitzpatrick S. Differentiation of real-valued functions and continuity of metric projections // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 91. № 4. P. 544–548.

- [4] Дудов С. И. Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 29–52.
- [5] Дудов С. И. Субдифференцируемость и функции расстояния // Матем. заметки. 1975. Т. 61. № 4. С. 530–542.
- [6] Балаганский В. С. Дифференцируемость по Фреше функции расстояния и структура множества // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 6. С. 725–734.
- [7] Балаганский В. С. Достаточные условия дифференцируемости метрической функции // Тр. Института математики и механики. Т. 1. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. С. 84–89.
- [8] Балаганский В. С., Власов Л. П. Проблема выпуклости чебышевских множеств // УМН. 1996. Т. 51. № 6(312). С. 125–188.
- [9] Borwein J. M., Fitzpatrick S. P., Giles J. R. The differentiability of real functions on normed linear spaces using generalized subgradients // Math. Anal. Appl. 1987. V. 128. № 2. P. 512–534.
- [10] Zajíček L. Differentiability of the distance function and points of multi-valuedness of the metric projection in Banach space // Czech. Math. J. 1983. V. 33(108). P. 292–308.
- [11] Балаганский В. С. Об аппроксимативных свойствах множеств с выпуклым дополнением // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 20–29.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Поступило
13.03.2002