Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Геворкян, Шейповые морфизмы в транзитивные G -пространства, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 821–827

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:49:21

УДК 515.122.6

ШЕЙПОВЫЕ МОРФИЗМЫ В ТРАНЗИТИВНЫЕ G -ПРОСТРАНСТВА

П. С. Геворкян

Во многих задачах теории шейпов важную роль играет следующая проблема: при каких условиях шейповый морфизм $F: X \mapsto Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y порождается некоторым непрерывным отображением $f: X \mapsto Y$? В настоящей статье данная проблема рассматривается в эквивариантной теории шейпов и положительно решается для эквивариантно-шейповых морфизмов в транзитивные G -пространства, где G – компактная группа со счетной базой. В качестве следствия доказывается достаточное условие равенства эквивариантных шейпов G -пространства X и самой группы G . Доказаны также некоторые результаты, относящиеся к эквивариантным расслоениям, которые являются ключевыми для последних результатов и представляют самостоятельный интерес.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Во многих задачах теории шейпов важную роль играет следующая проблема: при каких условиях шейповый морфизм $F: X \mapsto Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y порождается некоторым непрерывным отображением $f: X \mapsto Y$? Из построения теории шейпов непосредственно следует, что эта проблема имеет положительное решение в случае, когда Y является ANR-пространством. В настоящей статье данная проблема рассматривается в эквивариантной теории шейпов и положительно решается для эквивариантно-шейповых морфизмов в транзитивные G -пространства, где G – компактная группа со счетной базой. В качестве следствия доказывается достаточное условие равенства эквивариантных шейпов G -пространства X и самой группы G . Доказаны также некоторые результаты, относящиеся к эквивариантным расслоениям, которые являются ключевыми для последних результатов и представляют самостоятельный интерес.

Действие группы G на пространстве X называется *транзитивным*, если орбита $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$ произвольной точки $x \in X$ совпадает с самим пространством X , т.е. если у G -пространства X имеется ровно одна орбита. Примерами транзитивных G -пространств служат пространства смежных классов $G|_H$ топологической группы G по ее замкнутым подгруппам H (на пространстве $G|_H$ рассматривается действие группы G посредством левых сдвигов: $g(g'H) = (gg')H$). Более того, известно, что если действующая группа G является компактной, то любое транзитивное G -пространство X эквиморфно некоторому пространству смежных классов, а точнее пространству $G|_{G_x}$, где $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ – стационарная подгруппа (или стабилизатор) точки x . Последнее замечание позволяет в качестве транзитивных G -пространств рассматривать

пространства смежных классов с естественным действием группы G , при этом не теряя общность рассуждений.

Другие факты теории непрерывных групп преобразований можно найти в работах [1] и [2].

2. Эquivariantные расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E и B – произвольные G -пространства. Скажем, что эквивариантное отображение $p: E \rightarrow B$ удовлетворяет *аксиоме об эквивариантной накрывающей гомотопии относительно G -пространства X* , если для любых эквивариантных отображений $f: X \rightarrow E$ и $F: X \times I \rightarrow B$ таких, что $F(x, 0) = pf(x)$, $x \in X$, существует эквивариантное отображение $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$, для которого $\tilde{F}(x, 0) = f(x)$ и $p \circ \tilde{F} = F$, т.е. коммутативна диаграмма 1.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times 0 & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow i & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

ДИАГРАММА 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Эквивариантное отображение $p: E \rightarrow B$ называется *эквивариантным расслоением*, или *G -расслоением*, если оно удовлетворяет аксиоме об эквивариантной накрывающей гомотопии относительно всех G -пространств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H – замкнутая подгруппа компактной группы Ли G . Тогда естественная G -эквивариантная проекция $p: G \rightarrow G|_H$ является G -расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $p: G \rightarrow G|_H$ удовлетворяет аксиоме об эквивариантной накрывающей гомотопии относительно всех G -пространств.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times 0 & \xrightarrow{f} & G \\
 \downarrow i & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & G|_H
 \end{array}$$

ДИАГРАММА 2

Пусть X – произвольное G -пространство, $f: X \rightarrow G$ – произвольное эквивариантное отображение, а $F: X \times I \rightarrow G|_H$ – эквивариантная гомотопия отображения $p \circ f: X \rightarrow G|_H$, т.е. $F(x, 0) = pf(x)$ для любого $x \in X$. Требуется доказать существование такого

эquivариантного отображения $\tilde{F}: X \times I \mapsto G$, которое делает коммутативной диаграмму 2, или, что то же самое, выполняются условия

$$p \circ \tilde{F} = F, \quad \tilde{F}(x, 0) = f(x) \quad (1)$$

для любого $x \in X$.

Так как f – эquivариантное отображение, то $X = X|_G \times G$ ($X|_G \times G$ рассматривается как G -пространство с действием $g(\tilde{x}, g') = (\tilde{x}, gg')$ для произвольных $g, g' \in G$ и $\tilde{x} \in X|_G$). Следовательно, диаграмму 2 можно представить в виде, показанном на диаграмме 3.

$$\begin{array}{ccc} X|_G \times G \times 0 & \xrightarrow{f=\text{pr}_2} & G \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X|_G \times G \times I & \xrightarrow{F} & G|_H \end{array}$$

ДИАГРАММА 3

Рассмотрим диаграмму 4, где

$$f_e = f|_{(X|_G \times \{e\} \times 0)}, \quad F_e = F|_{(X|_G \times \{e\} \times I)}, \quad i_e = i|_{(X|_G \times \{e\} \times 0)}.$$

$$\begin{array}{ccc} X|_G \times \{e\} \times 0 & \xrightarrow{f_e} & G \\ \downarrow i_e & \nearrow \tilde{F}_e & \downarrow p \\ X|_G \times \{e\} \times I & \xrightarrow{F_e} & G|_H \end{array}$$

ДИАГРАММА 4

Так как $p: G \mapsto G|_H$ – расслоение [3], то в последней диаграмме существует отображение $\tilde{F}_e$, которое превращает всю диаграмму в коммутативную. Искомое отображение $\tilde{F}: X|_G \times G \times I \mapsto G$ определим формулой

$$\tilde{F}(\tilde{x}, g, t) = g\tilde{F}_e(x, e, t). \quad (2)$$

Эquivариантность отображения $\tilde{F}$ проверяется непосредственно. Докажем коммутативность диаграммы 3, что эквивалентно равенствам (см. (1))

$$\tilde{F}(\tilde{x}, g, 0) = g\tilde{F}_e(\tilde{x}, e, 0) = gf_e(\tilde{x}, e, 0) = gf(\tilde{x}, e, 0) = f(\tilde{x}, g, 0)$$

для любого $(\tilde{x}, g, 0) \in X|_G \times G \times 0$,

$$p\tilde{F}(\tilde{x}, g, t) = p(g\tilde{F}_e(\tilde{x}, e, t)) = gp\tilde{F}_e(\tilde{x}, e, t) = g\tilde{F}_e(\tilde{x}, e, t) = gF(\tilde{x}, e, t) = F(\tilde{x}, g, t)$$

для любого $(\tilde{x}, g, t) \in X|_G \times G \times I$.

Тем самым, теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть H и K – замкнутые нормальные подгруппы группы G и $H \subset K$. Если $G|_H$ – группа Ли, то естественный G -эquivariantный эпиморфизм $p: G|_H \rightarrow G|_K$ является G -расслоением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при заданных условиях G -эquivariantное отображение $p: G|_H \rightarrow G|_K$ удовлетворяет аксиоме об equivariantной накрывающей гомотопии относительно любого G -пространства X . Для этого достаточно доказать, что в диаграмме 5, где $F: X \times I \rightarrow G|_K$ – equivariantная гомотопия отображения $p \circ f: X \times 0 \rightarrow G|_K$, существует отображение $\tilde{F}: X \times I \rightarrow G|_H$, делающее всю диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times 0 & \xrightarrow{f} & G|_H \\
 \downarrow i & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & G|_K
 \end{array}$$

ДИАГРАММА 5

В диаграмме 5 перейдем к пространствам H -орбит. Тогда получим диаграмму 6, где π_0 и π – H -орбитные проекции, а $f|_H$ и $F|_H$ – отображения пространств H -орбит, порожденные equivariantными отображениями f и F соответственно.

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times 0 & \xrightarrow{\pi_0} & X|_H \times 0 & \xrightarrow{f|_H} & G|_H \\
 \downarrow i & & \downarrow i|_H & \nearrow \tilde{F}|_H & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{\pi} & X|_H \times I & \xrightarrow{F|_H} & G|_K
 \end{array}$$

ДИАГРАММА 6

Заметим, что

$$f|_H \circ \pi_0 = f, \quad F|_H \circ \pi = F. \quad (3)$$

Так как H – замкнутая нормальная подгруппа группы G , то на пространстве $X|_H \times I$ действует группа $G|_H$ по формуле

$$\tilde{g}(\tilde{x}, t) = (g\tilde{x}, t), \quad (4)$$

где $\tilde{g} = gH \in G|_H$, $(\tilde{x}, t) = (Hx, t) \in X|_H \times I$, а $(g\tilde{x}, t) = (Hgx, t) \in X|_H \times I$. Имеется и естественное действие группы $G|_H$ на $G|_K$, так как

$$G|_K = (G|_H)|_{(K|_H)}, \quad (5)$$

где $K|_H$ – замкнутая подгруппа компактной группы Ли $G|_H$. Таким образом, компактная группа Ли $G|_H$ действует на всех пространствах левой части диаграммы 6 и все отображения в этой части $G|_H$ -эquivariantны. Очевидно, что на всех этих пространствах действует и группа G (через естественный эпиморфизм $G \mapsto G|_H$). Очевидно, что все отображения диаграммы 6 также и G -эquivariantны.

В силу теоремы 1 $G|_H$ -эquivariantное отображение $p: G|_H \mapsto G|_K$ является $G|_H$ -расслоением. Следовательно, в диаграмме 6 существует $G|_H$ -эquivariantная гомотопия $\tilde{F}|_H: X|_H \times I \mapsto G|_H$, делающая правую часть этой диаграммы коммутативной. Теперь искомую G -эquivariantную гомотопию $\tilde{F}: X \times I \mapsto G|_H$ (см. диаграмму 5) можно задать формулой

$$\tilde{F} = \tilde{F}|_H \circ \pi. \quad (6)$$

Проверим G -эquivariantность отображения $\tilde{F}$:

$$\tilde{F}(g(x, t)) = \tilde{F}|_H \pi(g(x, t)) = \tilde{F}|_H(g\pi(x, t)) = g\tilde{F}|_H \pi(x, t) = g\tilde{F}(x, t).$$

Заметим, что

$$\tilde{F}(x, 0) = \tilde{F}|_H \pi(x, 0) = f|_H \pi(x, 0) = f|_H \pi_0(x, 0) = f(x, 0).$$

И, наконец, $p \circ \tilde{F} = p \circ \tilde{F}|_H \circ \pi = F|_H \circ \pi = F$.

Теорема доказана.

3. G -шейповые морфизмы, порожденные equivariantными отображениями.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – компактная группа со счетной базой, $H \subset G$ – замкнутая нормальная подгруппа, а X – произвольное G -пространство. Тогда любой G -шейповый морфизм $F: X \mapsto G|_H$ порождается некоторым equivariantным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа G компактна и имеет счетную базу, то такова и группа $G|_H$. По известной теореме Понтрягина (см. [4, теорема 68, с. 332]) существуют замкнутые нормальные делители $K_i, i = 1, 2, \dots$, группы $G|_H$ такие, что $K_{i+1} \subset K_i$, а $(G|_H)|_{K_i}$ – группа Ли для любого $i = 1, 2, \dots$ и

$$G|_H = \varprojlim \{(G|_H)|_{K_i}; p_{i,i+1}\}, \quad (7)$$

где $p_{i,i+1}: (G|_H)|_{K_{i+1}} \mapsto (G|_H)|_{K_i}$ – естественные эпиморфизмы, порожденные включениями $K_{i+1} \subset K_i$.

Заметим, что для любого $i = 1, 2, \dots$ группа $(G|_H)|_{K_i}$ изоморфна (топологически и алгебраически) группе $G|_{\tilde{K}_i}$, где $\tilde{K}_i = p^{-1}(K_i)$, а $p: G \mapsto G|_H$ – естественный эпиморфизм. Группы $\tilde{K}_i, i = 1, 2, \dots$, будучи непрерывными прообразами замкнутых нормальных подгрупп $K_i \subset G|_H$, замкнуты и нормальны. Таким образом,

$$G|_H = \varprojlim \{G|_{\tilde{K}_i}; p_{i,i+1}\}, \quad (8)$$

где все отображения $p_{i,i+1}$ G -эquivariantны, если пространства $G|_{\tilde{K}_i}$ рассматривать с естественным действием группы G .

Пусть теперь дан G -шейповый морфизм $F: X \mapsto G|_H$. Рассмотрим G -шейповое отображение $S_G(p_i) \circ F: X \mapsto G|_{\tilde{K}_i}$, где S_G – G -шейповый функтор, а $p_i: G \mapsto G|_{\tilde{K}_i}$ – предельные проекции. Так как все $G|_{\tilde{K}_i}$ суть G -ANR-пространства, то существуют G -эквивариантные отображения $f_i: X \mapsto G|_{\tilde{K}_i}$ такие, что

$$S_G(p_i) \circ F = S_G(f_i). \quad (9)$$

Но

$$\begin{aligned} S_G(f_i) &= S_G(p_i) \circ F = S_G(p_{i,i+1}) \circ S_G(p_{i+1}) \circ F \\ &= S_G(p_{i,i+1}) \circ S_G(f_{i+1}) = S_G(p_{i,i+1} \circ f_{i+1}). \end{aligned}$$

Итак, G -отображения f_i и $p_{i,i+1} \circ f_{i+1}$ в G -ANR-пространство $G|_{\tilde{K}_i}$ порождают один и тот же G -шейповый морфизм. Значит, они G -гомотопны:

$$f_i \underset{G}{\simeq} p_{i,i+1} \circ f_{i+1}. \quad (10)$$

Положим $h_1 = f_1$. В силу теоремы 2 все отображения $p_{i,i+1}$ – G -расслоения. Следовательно, существует G -отображение $h_2: X \mapsto G|_{\tilde{K}_2}$ такое, что $h_2 \underset{G}{\simeq} f_2$ и $h_1 = p_{1,2} \circ h_2$. Продолжая это построение по индукции, получим G -отображения $h_i: X \mapsto G|_{\tilde{K}_i}$ такие, что

$$h_i \underset{G}{\simeq} f_i, \quad h_i = p_{i,i+1} \circ h_{i+1}. \quad (11)$$

Положим

$$h = \varprojlim h_i.$$

Очевидно, что h – G -отображение из X в $G|_H$. Докажем, что h искомое, т.е.

$$S_G(h) = F. \quad (12)$$

В самом деле, в силу непрерывности шейпового функтора [5] имеем

$$S_G(h) = S_G\left(\varprojlim h_i\right) = \varprojlim S_G(h_i) = \varprojlim S_G(f_i) = \varprojlim S_G(p_i) \circ F = 1 \circ F = F. \quad (13)$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – компактная группа со счетной базой, $H \subset G$ – замкнутая нормальная подгруппа, а X – произвольное G -пространство. Если существует G -шейповый морфизм $F: X \mapsto G|_H$, то $X = G \times_H A$, где A – некоторое H -пространство, а F порожден G -эквивариантным отображением $f: G \times_H A \mapsto G|_H$, заданным формулой $f([g, a]) = gH$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F: X \mapsto G|_H$ – G -шейповый морфизм. По теореме 3 существует G -эквивариантное отображение $f: X \mapsto G|_H$ такое, что $S_G(f) = F$. Положим $A = f^{-1}(eH)$. Известно [2], что тогда $X = G \times_H A$, а $f([g, h]) = gH$.

В формулировке последней теоремы, взяв в качестве замкнутой нормальной подгруппы H единичную группу $\{e\}$, получим

СЛЕДСТВИЕ 1. Если существует G -шейповый морфизм F из G -пространства X в компактную группу G со счетной базой, то $X = X|_G \times G$, а F порожден естественной проекцией $\text{pr}_2: X|_G \times G \mapsto G$.

ТЕОРЕМА 5. Если существует G -шейповый морфизм из G -пространства X в компактную группу G со счетной базой и $\text{sh}(X|_G) = 0$, то $\text{sh}_G X = \text{sh}_G G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1 $X = X|_G \times G$, где на пространстве $X|_G \times G$ группа G действует формулой $g(\tilde{x}, g') = (\tilde{x}, gg')$ для любых $(\tilde{x}, g') \in X|_G \times G$ и $g \in G$. Вычислим

$$\text{sh}_G(X|_G \times G) = \text{sh}_G(X|_G) \times \text{sh}_G G = 0 \times \text{sh}_G G = \text{sh}_G G.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Palais R. S. The classification of G -spaces // Mem. Amer. Math. Soc. 1960. №36. P. 1–72.
- [2] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
- [3] Gleason A. Spaces with a compact Lie group transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. V. 1. №1. P. 35–43.
- [4] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Гостехиздат, 1954.
- [5] Holsztyński W. Continuity of Borsuk's shape functor // Bull. Acad. Polon. Sci. 1971. V. 19. №12. P. 1105–1108.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gevorgyan@mech.math.msu.su, pgev@angelfire.com

Поступило
 23.07.2001