Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ахтямов, О коэффициентах разложений по собственным функциям краевых задач с параметром в граничных условиях, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 493–506

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:57:51

УДК 517.984

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

А. М. Ахтямов

Рассматриваются краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка с полиномиальным вхождением спектрального параметра в уравнение и краевые условия. Для широкого класса таких задач найдены коэффициенты разложений в ряд по системе собственных и присоединенных функций линеаризатора Шкаликова.

Библиография: 16 названий.

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$l(y, \lambda) = l_0(y) + \lambda l_1(y) + \dots + \lambda^n l_n(y) = 0, \quad (1)$$

$$U_j(y, \lambda) = U_j^0(y) + \lambda U_j^1(y) + \dots + \lambda^{\nu_j} U_j^{\nu_j}(y) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь

$$l_\nu(y) = \sum_{s=\nu}^n p_{\nu s}(x) y^{(n-s)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$
$$U_j^\nu(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j\nu k} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{j\nu k} y^{(k)}(1), \quad \nu = 0, 1, \dots, \nu_j.$$

Коэффициенты $a_{j\nu k}$, $b_{j\nu k}$ – комплексные числа, которые, в частности, могут быть равны нулю, $p_{ss}(x) = \text{const}$, $s = 1, 2, \dots, n$, $p_{nn} \neq 0$, $p_{\nu s}(x)$ – достаточно гладкие функции, а $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ – произвольные полиномы от λ .

Изучение краевых задач вида (1), (2) ведет начало от работ Биркгофа [1], [2]. В случае, когда $l_s(y) = 0$ при $s = 1, 2, \dots, n-1$, $p_{00} = 1$ и $p_{0k} = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$, в этих работах была найдена фундаментальная система решений уравнения (1) и выделен класс регулярных краевых условий, для которого была получена теорема о разложении гладких функций в ряды по собственным и присоединенным функциям задачи.

В [3] была найдена асимптотика (по λ) системы фундаментальных решений уравнения (1) и получена теорема о возможности разложения гладкой функции в ряд по собственным функциям задачи (1), (2) в самом общем случае.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00996, и Министерства образования России, грант Е02-1.0-77.

В фундаментальных работах Келдыша [4], [5] было показано, что запас собственных и присоединенных функций полиномиального пучка n -го порядка столь богат, что в ряды по этим функциям, как правило, могут быть разложены одновременно n функций. Кроме того, Келдыш отметил, что постановка задачи об n -кратных разложениях возникает естественным образом для обоснования метода Фурье при решении начально-краевой задачи для соответствующего уравнения с частными производными, из которого спектральная задача получается после разделения переменных.

В работе [6] были построены операторы, линеаризующие задачу (1), (2) в пространствах $\mathcal{W}_{2,U}^r \times \mathbb{C}^{N_r}$, которые являются подпространствами конечной коразмерности в произведениях пространств $W_2^{n+r-1} \times \dots \times W_2^r \times \mathbb{C}^{N_r}$. Эти пространства в [6] построены явно. При этом если $r \geq r_0 = \max(0, \rho - n + 1)$, где ρ – максимальный из порядков краевых условий спектральной задачи (1), (2), то $N_r = 0$ и линеаризатор имеет вид

$$H\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, -p_{nn}^{-1}(l_0(v_0) + l_1(v_1) + \dots + l_{n-1}(v_{n-1}))\}.$$

При условии регулярности задачи (1), (2) в [6] доказана теорема о базисности Рисса собственных и присоединенных функций $\tilde{\mathbf{v}}_k^h$ линеаризатора H . А именно, любой элемент пространства $\mathcal{W}_{2,U}^r$ может быть разложен в ряд

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_k^h, \quad (3)$$

где ряд безусловно сходится после заключения некоторых его членов в скобки, расстановка которых не зависит от $\tilde{\mathbf{v}}$.

Важной является задача вычисления c_{kh} разложения элемента $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}_{2,U}^r$ в ряд по системе $\tilde{\mathbf{v}}_k^h$. Конечно, $c_{kh} = \langle \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{g}}_k^h \rangle$, где $\{\tilde{\mathbf{g}}_k^h\}$ – система функций, биортогональная к $\{\tilde{\mathbf{v}}_k^h\}$. Но вычислить явно $\{\tilde{\mathbf{g}}_k^h\}$ – трудно осуществимая задача. Мы же хотим выразить коэффициенты разложений в терминах собственных функций задачи, сопряженной к (1), (2).

Если краевые условия (2) не зависят от λ , то задачу (1), (2) можно рассматривать как пучок n -го порядка дифференциальных операторов в $L_2(0, 1)$:

$$(P_0 + \lambda P_1 + \dots + \lambda^n P_n)y = 0,$$

где области определения операторов P_ν можно считать совпадающими с

$$D(P_0) = \{y: y \in W_2^2, U_j(y) = 0, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

В этом случае формулы для коэффициентов разложения получаются из общих формул [7, теорема 2.1].

Если краевые условия (2) зависят от λ , то область определения пучка операторов также зависит от λ и формулы из [7] непосредственно применены быть не могут.

В этой работе мы выделим класс задач вида (1), (2), для которых мы предложим два метода для вычисления коэффициентов разложения. Полученные формулы будут иметь разную форму. Если система $\{\tilde{\mathbf{v}}_k^h\}$ собственных и присоединенных функций линеаризатора H полна в пространстве, где действует этот оператор (например, это так, если задача регулярна), то биортогональная система определяется однозначно, а потому значения коэффициентов разложения, даваемые разными формулами, будут совпадать.

Предположим, что формы $U_1^0(y), U_2^0(y), \dots, U_n^0(y)$ задачи (1), (2) линейно независимы (этого всегда можно добиться, рассматривая соответствующие линейные комбинации форм $U_j(y, \lambda)$). Обозначим через

$$U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)$$

n линейных однородных форм от переменных $y^{(k)}(0), y^{(k)}(1), k = 0, 1, \dots, n-1$, с коэффициентами, не зависящими от λ , такие, что формы

$$U_1^0(y), U_2^0(y), \dots, U_n^0(y), U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)$$

образовывали бы линейную независимую систему.

На протяжении всей работы через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть $l_0^*(z)$ – дифференциальное выражение, сопряженное к выражению $l_0(y)$ в пространстве L_2 , определяемое интегрированием по частям:

$$\langle l_0(y), z \rangle_{L_2} = \langle y, l_0^*(z) \rangle_{L_2} + P_0(y, z).$$

Через $V_1^0(z), \dots, V_n^0(z), V_{n+1}^0(z), \dots, V_{2n}^0(z)$ обозначим линейные однородные формы от переменных $z^{(k)}(0), z^{(k)}(1), k = 0, 1, \dots, n-1$, которые содержатся в билинейной форме обинтегрированных членов

$$P_0(y, z) = U_1^0(y) \cdot \overline{V_{2n}^0(z)} + U_2^0(y) \cdot \overline{V_{2n-1}^0(z)} + \dots + U_{2n}^0(y) \cdot \overline{V_1^0(z)}.$$

В конце статьи приводится основной результат работы – теорема о вычислении коэффициентов разложения (3) для спектральных задач (1), (2), удовлетворяющих следующим условиям **U** и **P**.

УСЛОВИЕ U. Формы $U_j^\nu(y)$ при $\nu = 1, 2, \dots, m$ являются линейными однородными формами от переменных $U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)$:

$$U_i^\nu(y) = \xi_{i1}^\nu U_{n+1}^0(y) + \xi_{i2}^\nu U_{n+2}^0(y) + \dots + \xi_{in}^\nu U_{2n}^0(y),$$

где $\xi_{ij}^\nu \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

(Постоянные ξ_{ij}^ν могут быть равны нулю. В частности, если краевые условия не зависят от λ , то условие **U** выполняется, поскольку можно выбрать все ξ_{ij}^ν равными нулю).

УСЛОВИЕ P. Билинейные формы обинтегрированных членов $P_\nu(y, z)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, которые возникают из равенства

$$\langle l_\nu(y), z \rangle_{L_2} = \langle y, l_\nu^*(z) \rangle_{L_2} + P_\nu(y, z),$$

удовлетворяют условию

$$P_\nu(y, z) = \overline{\gamma_1^\nu} \cdot U_{n+1}^0(y) + \overline{\gamma_2^\nu} \cdot U_{n+2}^0(y) + \dots + \overline{\gamma_n^\nu} \cdot U_{2n}^0(y), \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

где коэффициенты $\overline{\gamma_1^\nu}, \overline{\gamma_2^\nu}, \dots, \overline{\gamma_n^\nu}$ – некоторые линейные однородные функции от переменных $z(0), z(1), z'(0), z'(1), \dots, z^{(n-1)}(0), z^{(n-1)}(1)$.

Заметим, что условия **U** и **P** не столь ограничительны, как это может показаться на первый взгляд. В частности, эти условия выполнены, если краевые условия не зависят от спектрального параметра. Таким образом, рассматриваемый класс охватывает все задачи для пучков линейных дифференциальных операторов, в краевые условия которых спектральный параметр не входит. Кроме того, конкретные задачи с параметром в краевых условиях (см. [8]–[16]), рассмотренные ранее, также попадают в этот класс. В конце статьи для примера вычислены коэффициенты разложения для одной из таких задач.

Доказательство теоремы о вычислении коэффициентов проводится в два этапа. На первом этапе спектральная задача сводится к пучку неограниченных операторов, действующему в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$, таким образом, чтобы между собственными функциями сопряженного пучка операторов и сопряженной спектральной задачи можно было установить взаимно однозначное соответствие. На втором этапе показывается, что коэффициенты разложения по производным цепочкам пучка операторов совпадают с коэффициентами из равенства (3).

Доказательству теоремы предшествуют три леммы. В лемме 1 доказывается существование сопряженного пучка операторов. В лемме 2 указан общий метод определения области определения сопряженного пучка операторов (или сопряженного оператора). В лемме 3 показано, что собственные значения сопряженной спектральной задачи и сопряженного пучка операторов совпадают, а между их собственными и присоединенными функциями можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для доказательства этих результатов нам потребуются вспомогательные конструкции.

Далее через m обозначаем $\max(n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, а через q – порядок максимальной производной переменных $y^{(i)}(0), y^{(i)}(1)$, содержащейся в формах $U_{n+1}^0, U_{n+2}^0, \dots, U_{2n}^0$.

Определим в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$ операторы A_ν следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\nu y &= \{l_\nu(y), U_1^\nu(y), U_2^\nu(y), \dots, U_n^\nu(y)\}, \\ D(A_\nu) &= \{y = \{y, c_1, c_2, \dots, c_n\} : y \in W_2^n, \\ &\quad c_1 = U_{n+1}^0(y), c_2 = U_{n+2}^0(y), \dots, c_n = U_{2n}^0(y)\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\nu = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots, m, \quad m = \max(n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n).$$

При $n < m$ выражение $l_\nu(y)$, $\nu = n+1, \dots, m$, считаем тождественным нулю; а при $\nu_j < m$ считаем тождественно равными нулю также и формы $U_j^\nu(y)$, $\nu = \nu_{j+1}, \nu_{j+2}, \dots, m$.

Составим из операторов A_ν пучок операторов

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^n A_n + \dots + \lambda^m A_m.$$

Легко показать, что

1) собственные значения краевой задачи (1), (2) и пучка операторов $A(\lambda)$ совпадают с учетом их кратностей;

2) каждой цепочке собственной и присоединенных функций $y^0, y^1, \dots, y^{p_k}$ задачи (1), (2), отвечающей собственному значению λ_0 , соответствует цепочка собственной и присоединенных функций $y^0, y^1, \dots, y^{p_k}$ пучка $A(\lambda)$, отвечающая тому же собственному

значению λ_0 ; при этом первые компоненты собственной (соответственно присоединенной) функции

$$\mathbf{y}^s = \{y^s, U_{n+1}^0(y^s), U_{n+2}^0(y^s), \dots, U_{2n}^0(y^s)\}$$

пучка $A(\lambda)$ совпадают с собственной (соответственно присоединенной) функцией y^s задачи (1), (2).

ЛЕММА 1 (о плотности). *Области определения операторов A_ν , $\nu = 0, 1, \dots, m$, плотны в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Области определения операторов A_ν , $\nu = 0, 1, \dots, m$, совпадают и равны

$$D(A_\nu) = \{\mathbf{y} = \{y, c_1, c_2, \dots, c_n\} : y \in W_2^n, \\ c_1 = U_{n+1}^0(y), c_2 = U_{n+2}^0(y), \dots, c_n = U_{2n}^0(y)\}.$$

Для доказательства плотности $D(A_\nu)$ в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$ достаточно показать, что для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, любого $\varepsilon > 0$ и любой функции

$$\mathbf{v} = \{v, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in L_2 \times \mathbb{C}^n$$

найдется такая функция $\mathbf{y} = \{y, U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)\}$, что

$$U_{n+i}^0(y) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{и} \quad \|v - y\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Формы $U_{n+i}^0(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независимы. Значит, для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ можно подобрать функцию $u \in W_2^n$, для которой выполнены равенства $U_{n+i}^0(u) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как порядки форм $U_{n+i}^0(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, не превосходят $n - 1$, то множество всех функций $w \in W_2^n$, удовлетворяющих краевым условиям $U_{n+i}^0(w) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, всюду плотно в пространстве L_2 . Поэтому любая функция из L_2 может быть приближена функцией w . Любая функция из L_2 может быть представлена в виде $v - u$, где v — произвольная функция из L_2 ; следовательно, $\|(v - u) - w\|_{L_2} < \varepsilon$. Положив $y = u + w$, получаем, что $\|v - y\| < \varepsilon$ и $U_{n+i}^0(y) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Область определения пучка операторов $A(\lambda)$ плотна в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогично можно показать, что линейал функций

$$\{y, U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)\},$$

где $y \in W_2^r$, $r > n$, плотен в пространстве $L_2 \times \mathbb{C}^n$.

Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

ЛЕММА 2 (о сопряженном операторе). *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ заданы операторы H и M , образом которых является все пространство $\mathcal{H}$. Если оператор H имеет плотную область определения в $\mathcal{H}$ и, кроме того, для любых элементов $\mathbf{v} \in D(H)$ и $\mathbf{g} \in D(M)$ выполнено равенство*

$$\langle H\mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}, M\mathbf{g} \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (4)$$

то оператор M является сопряженным к H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4) означает, что $M \subseteq H^*$. Для доказательства того, что $M = H^*$, осталось доказать включение $D(M) \supseteq D(H^*)$. Пусть $\mathbf{r} \in D(H^*)$ и $H^*\mathbf{r} = \mathbf{h}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{v} \in D(H)$ верно равенство

$$\langle H\mathbf{v}, \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (5)$$

Поскольку образом оператора M является все пространство $\mathcal{H}$, то для элемента $\mathbf{h}$ найдется элемент $\mathbf{r}_1$ такой, что $M\mathbf{r}_1 = \mathbf{h}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{v} \in D(H)$ верно равенство

$$\langle H\mathbf{v}, \mathbf{r}_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (6)$$

Из (5), (6) получаем следующее равенство:

$$\langle H\mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Обозначим через $\mathbf{f}$ элемент $H\mathbf{v}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (7)$$

Равенство (7) означает, что элемент $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ортогонален элементу $\mathbf{f}$. Но так как $\mathbf{f}$ является произвольным элементом пространства $\mathcal{H}$, то (7) равносильно тому, что элемент $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ортогонален всему пространству $\mathcal{H}$. Отсюда $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$.

Таким образом, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \in \mathcal{H}$ и лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть для каждого из коэффициентов задачи (1), (2) выполнены условия **U** и **P**. Тогда собственные значения сопряженной краевой задачи и собственные значения сопряженного к $A(\lambda)$ пучка операторов $[A(\bar{\lambda})]^*$ совпадают с учетом их кратностей, а каждой цепочке собственной и присоединенных функций $z_k^0, z_k^1, \dots, z_k^h$, сопряженной задачи, отвечающей собственному значению λ_k , соответствует цепочка собственного и присоединенных функций $z_k^0, z_k^1, \dots, z_k^h$ пучка $[A(\bar{\lambda})]^*$, отвечающая тому же собственному значению λ_k . При этом первые компоненты элемента z_k^s , $s = 0, 1, \dots, h$, пучка $[A(\bar{\lambda})]^*$ совпадают с элементом z_k^s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что формы

$$U_1(y, \lambda), U_2(y, \lambda), \dots, U_n(y, \lambda), U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)$$

являются линейно независимыми при любом фиксированном λ . Действительно, предположим противное. Пусть формы не являются линейно независимыми. С помощью условия **U** получим, что формы

$$U_1^0(y), U_2^0(y), \dots, U_n^0(y), U_{n+1}^0(y), U_{n+1}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)$$

линейно зависимы. А это противоречит выбору линейных однородных форм

$$U_{n+1}^0(y), U_{n+1}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y).$$

Таким образом, формы

$$U_1(y, \lambda), U_2(y, \lambda), \dots, U_n(y, \lambda), U_{n+1}^0(y), U_{n+2}^0(y), \dots, U_{2n}^0(y)$$

являются линейно независимыми при любом фиксированном λ . Отсюда и из условий **U** и **P** следует, что сопряженная к задаче (1), (2) задача имеет следующий вид:

$$l^*(z, \lambda) = \sum_{\nu=0}^n \lambda^{\nu} \sum_{s=\nu}^n (-1)^{n-s} \cdot (\overline{p_{\nu s}(x)} \cdot z(x))^{(n-s)} = 0, \quad (8)$$

$$U_j^*(z, \lambda) = \overline{V_{n+1-j}^0(z)} + \sum_{\nu=1}^m \lambda^{\nu} (\overline{\gamma_j^{\nu}(z)} - \xi_{j1}^{\nu} \cdot \overline{V_{2n}^0(z)} - \dots - \xi_{jn}^{\nu} \cdot \overline{V_{n+1}^0(z)}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Здесь и далее формы $\overline{\gamma_1^{\nu}(z)}, \overline{\gamma_2^{\nu}(z)}, \dots, \overline{\gamma_n^{\nu}(z)}$ при $\nu = n+1, n+2, \dots, m$ тождественно равны нулю. Эти формы введены для сокращения записи.

Введем в рассмотрение пучок операторов $[A(\bar{\lambda})]^*$, действующий по формуле

$$\begin{aligned} [A(\bar{\lambda})]^* \mathbf{z} = & \{l_0^*(z) V_n^0(z) V_{n-1}^0(z), \dots, V_1^0(z)\} \\ & + \lambda \cdot \{l_1^*(z) b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}\} + \lambda^2 \cdot \{l_2^*(z) b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}\} + \dots \\ & + \lambda^n \cdot \{l_n^*(z) b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}\} + \lambda^{n+1} \cdot \{0, b_{n+1,1}, b_{n+1,2}, \dots, b_{n+1,n}\} + \dots \\ & + \lambda^m \cdot \{0, b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn}\}, \end{aligned}$$

и имеющий область определения

$$D([A(\bar{\lambda})]^*) = \{\mathbf{z} = \{z, a_1, a_2, \dots, a_n\} : \mathbf{z} \in W_2^n, \\ a_1 = -V_{2n}^0(z), a_2 = -V_{2n-1}^0(z), \dots, a_n = -V_{n+1}^0(z)\}.$$

Здесь $b_{\nu j}, \nu = 1, 2, \dots, n$, — числа, определенные равенствами

$$b_{\nu j} = \gamma_j^{\nu} - \overline{\xi_{1j}^{\nu}} \cdot V_{2n}^0(z) - \overline{\xi_{2j}^{\nu}} \cdot V_{2n-1}^0(z) - \dots - \overline{\xi_{nj}^{\nu}} \cdot V_{n+1}^0(z),$$

а $b_{\nu j}, \nu = n+1, n+2, \dots, m$, — это числа, определенные равенствами

$$b_{\nu j} = -\overline{\xi_{1j}^{\nu}} \cdot V_{2n}^0(z) - \overline{\xi_{2j}^{\nu}} \cdot V_{2n-1}^0(z) - \dots - \overline{\xi_{nj}^{\nu}} \cdot V_{n+1}^0(z).$$

Нетрудно проверить, что

$$\langle A(\lambda) \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^2} = \langle \mathbf{y}, [A(\bar{\lambda})]^* \mathbf{z} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^2}. \quad (10)$$

Равенство (10) означает, что оператор $[A(\bar{\lambda})]^*$ является сужением сопряженного пучка операторов. Операторы $A(\lambda)$ и $[A(\bar{\lambda})]^*$ являются отображениями на все пространство $L_2 \times \mathbb{C}^n$. Отсюда и из леммы 2 следует, что пучок операторов $[A(\bar{\lambda})]^*$ совпадает с сопряженным к $A(\lambda)$ пучком операторов.

Если z^0 — собственная функция задачи (8), (9), отвечающая собственному значению λ_0 , то, как следует из определения оператора $[A(\bar{\lambda})]^*$, элемент

$$\mathbf{z}^0 = \{z^0, -V_{2n}^0(z^0), -V_{2n-1}^0(z^0), \dots, -V_{n+1}^0(z^0)\}$$

из пространства $L_2 \times \mathbb{C}^n$ принадлежит области определения $D([A(\bar{\lambda})]^*)$ сопряженного пучка операторов и является собственной функцией пучка $[A(\bar{\lambda})]^*$, отвечающего тому же собственному значению λ_0 .

Верно и обратное: если $\mathbf{z}^0$ – собственная функция пучка $[A(\bar{\lambda})]^*$, то первая компонента этой функции является собственной функцией сопряженной краевой задачи (8), (9) отвечающей тому же собственному значению λ_0 . Далее, если $z^0, z^1, \dots, z^h$ – цепочка собственных и присоединенных функций краевой задачи (8), (9), отвечающая собственному значению λ_0 , то элементы

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^0 &= \{z^0, -V_{2n}^0(z^0), -V_{2n-1}^0(z^0), \dots, -V_{n+1}^0(z^0)\}, \\ \mathbf{z}^1 &= \{z^1, -V_{2n}^0(z^1), -V_{2n-1}^0(z^1), \dots, -V_{n+1}^0(z^1)\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{z}^h &= \{z^h, -V_{2n}^0(z^h), -V_{2n-1}^0(z^h), \dots, -V_{n+1}^0(z^h)\}\end{aligned}$$

составляют цепочку собственных и присоединенных функций пучка $[A(\bar{\lambda})]^*$. И наоборот, первые компоненты собственных и присоединенных функций сопряженного пучка операторов образуют цепочку собственных и присоединенных функций сопряженной краевой задачи. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя лемму 2, нетрудно найти сопряженные к операторам A_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots, m$, и показать, что сопряженный пучок $[A(\bar{\lambda})]^*$ совпадает с пучком сопряженных операторов

$$A^*(\bar{\lambda}) = A_0^* + \lambda A_1^* + \dots + \lambda^n A_n^* + \dots + \lambda^m A_m^*,$$

причем $D([A(\bar{\lambda})]^*) = D(A_0^*)$.

Обозначим через y_k^h , $k = 1, 2, \dots$; $h = 0, 1, \dots, p_k$, собственные и присоединенные функции краевой задачи (1), (2), образующие каноническую по Келдышу систему. Здесь p_k – длина цепочки собственных и присоединенных функций, отвечающих собственному значению λ_k краевой задачи (1), (2).

Через $\mathbf{y}_k^h$ обозначим следующий элемент:

$$\mathbf{y}_k^h = \{y_k^h, U_{n+1}^0(y_k^h), U_{n+2}^0(y_k^h), \dots, U_{2n}^0(y_k^h)\},$$

а через $\hat{\mathbf{y}}_k^h$ – производные по Келдышу цепочки длины m , построенные по элементам $\mathbf{y}_k^h$ (см. [7]).

Пусть z_k^s – собственные и присоединенные функции сопряженной к (1), (2) краевой задачи, образующие каноническую по Келдышу цепочку (здесь $s = 0, 1, \dots, p_k$), а $\hat{\mathbf{z}}_k^h$ – производные по Келдышу цепочки длины m , построенные по элементам

$$\mathbf{z}_k^s = \{z_k^s, -V_{2n}^0(z_k^s), -V_{2n-1}^0(z_k^s), \dots, -V_{n+1}^0(z_k^s)\}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть задача (1), (2) регулярна и выполнены условия **U** и **P**. Тогда элемент $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}_{2,U}^r$, где $r \geq \max(\rho - n + 1, m - n + q)$, разлагается в ряд (3) единственным образом и коэффициенты разложения находятся по следующей формуле:

$c_{kh} = P_{kh}/Q_{kh}$. Здесь величины P_{kh} и Q_{kh} определены выражениями

$$P_{kh} = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} \langle l_{\nu+1+s}(v_\nu), z_k^{p_k-h,s} \rangle_{L_2} - \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{m-1-s} U_j^{\nu+s+1}(v_\nu) \cdot \overline{V_{2n+1-j}^0}(z_k^{p_k-h,s}), \quad (11)$$

$$Q_{kh} = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{m-1-s} \langle l_{\nu+1+s}(y_k^{h,\nu}), z_k^{p_k-h,s} \rangle_{L_2} - \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{m-1-s} U_j^{\nu+s+1}(y_k^{h,\nu}) \cdot \overline{V_{2n+1-j}^0}(z_k^{p_k-h,s}) \quad (12)$$

или выражениями

$$P_{kh} = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} (v_s, l_{\nu+1+s}^*(z_k^{p_k-h,\nu}))_{L_2} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} U_{n+i}^0(v_s) \cdot \overline{\gamma_i^{\nu+1+s}}(z_k^{p_k-h,\nu}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} U_{n+i}^0(v_s) \cdot \xi_{n-j+1,i}^{\nu+1+s} \cdot \overline{V_{n+j}^0}(z_k^{p_k-h,\nu}), \quad (13)$$

$$Q_{kh} = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} (y_k^{h,s}, l_{\nu+1+s}^*(z_k^{p_k-h,\nu}))_{L_2} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} U_{n+i}^0(y_k^{h,s}) \cdot \overline{\gamma_i^{\nu+1+s}}(z_k^{p_k-h,\nu}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} U_{n+i}^0(y_k^{h,s}) \cdot \xi_{n-j+1,i}^{\nu+1+s} \cdot \overline{V_{n+j}^0}(z_k^{p_k-h,\nu}). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Доказательство формул (11), (12). Доказательство состоит из двух этапов. На первом этапе находятся коэффициенты $\hat{c}_{kh}$ разложений по производным цепочкам пучка операторов. На втором показывается, что эти коэффициенты совпадают с коэффициентами c_{kh} из разложения (3).

Первый этап доказательства. В работе [7] для общего пучка операторов, действующего в гильбертовом пространстве, были получены соотношения биортогональности, связывающие производные по Келдышу цепочки самого пучка и сопряженного к нему. Приложив этот результат [7, с. 154] к рассматриваемому пучку

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^n A_n + \dots + \lambda^m A_m,$$

получаем следующие соотношения биортогональности:

$$\frac{\langle G\hat{\mathbf{y}}_k^h, \hat{\mathbf{z}}_j^s \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}}{\langle G\hat{\mathbf{y}}_k^h, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}} = \delta_{k,j} \cdot \delta_{h,p_j-s}, \quad (15)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{m-1} & A_m \\ A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m-1} & A_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих соотношений биортогональности следует, что если некоторый элемент $\hat{\mathbf{y}} \in (L_2 \times \mathbb{C}^n)^m$ разлагается в ряд

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} \hat{c}_{kh} \hat{\mathbf{y}}_k^h,$$

то коэффициенты $\hat{c}_{kh}$ находятся по следующей формуле:

$$\hat{c}_{kh} = \frac{\langle G\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}}{\langle G\hat{\mathbf{y}}_k^h, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}}. \quad (16)$$

Второй этап доказательства. Согласно работе [6] вектор-функция $\tilde{\mathbf{v}}$ разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям оператора H :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kh} \tilde{\mathbf{v}}_k^h. \quad (17)$$

Сходимость ряда в (17) рассматривается в норме пространства $\mathcal{W}_2^{r+1}$. Поэтому равенство (17) означает выполнение следующих n равенств:

$$v_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} y_k^{h,\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18)$$

где $y_k^{h,\nu}$ – производные по Келдышу цепочки, построенные по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи (1), (2), а сами равенства (18) понимаются как равенства функций в пространстве $W_2^{r+1+\nu}$. Из равенств (18) получаем следующие разложения:

$$U_{n+j}^0(v_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} U_{n+j}^0(y_k^{h,\nu}), \quad (19)$$

где $j = 1, 2, \dots, n; \nu = 0, 1, \dots, n-1$.

Выражение $U_i^0(v_\nu)$ имеет смысл только в том случае, когда порядок соболевского пространства W_2^k , которому принадлежит элемент v_ν , на единицу больше порядка формы $U_i^0(\cdot)$. Именно поэтому в формулировке теоремы требуется, чтобы выполнялось неравенство $r \geq m - n + q$.

Максимальный порядок краевых условий ρ не меньше, чем m . Поэтому при $m \geq n$ имеют смысл следующие равенства:

$$H\tilde{\mathbf{v}} = H \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \tilde{\mathbf{v}}_k^h \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} H\tilde{\mathbf{v}}_k^h = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \cdot (\lambda_k \tilde{\mathbf{v}}_k^h + \tilde{\mathbf{v}}_k^{h-1}).$$

Сходимость рядов в этих равенствах рассматривается уже в норме пространств $\mathcal{W}_2^r$. Отсюда, в частности, следуют равенства

$$\begin{aligned}(H\tilde{\mathbf{v}})_{n-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \cdot (\lambda_k \tilde{\mathbf{v}}_k^h + \tilde{\mathbf{v}}_k^{h-1})_{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \cdot (\lambda_k y_k^{h,n-1} + y_k^{h-1,n-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} y_k^{h,n}\end{aligned}$$

для $(n-1)$ -ой компоненты $(H\tilde{\mathbf{v}})_{n-1}$ вектор-функции $H\tilde{\mathbf{v}}$, понимаемые как равенства в пространстве W_2^r . Здесь $y_k^{h,n}$ — n -я компонента производной цепочки Келдыша.

Представляя аналогичным образом последние компоненты остальных операторов H^i , $i = 2, 3, \dots, m-n$, получим следующие равенства:

$$(H^i \tilde{\mathbf{v}})_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \cdot y_k^{h,n+i-1}, \quad (20)$$

понимаемые как равенства в пространстве W_2^{r-i+1} . Здесь $y_k^{h,n+i-1}$ — $(n+i-1)$ -я компонента производной цепочки Келдыша.

Из (20) следует, что имеют смысл и верны в пространстве $\mathbb{C}$ комплексных чисел следующие равенства:

$$U_{n+j}^0 (H^i \tilde{\mathbf{v}})_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} U_{n+j}^0 (y_k^{h,n+i-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Элементы $(H^i \tilde{\mathbf{v}})_{n-1}$, $i = 1, 2, \dots, m-n$, будем обозначать через v_{i+n-1} . В новых обозначениях равенства (18)–(21) означают, что элемент

$$\hat{\mathbf{y}} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\}, \quad (22)$$

где $\mathbf{v}_\nu = \{v_\nu, U_{n+1}^0(v_\nu), U_{n+2}^0(v_\nu), \dots, U_{2n}^0(v_\nu)\}$, разлагается в ряд по элементам

$$\hat{\mathbf{y}}_k^h = \{\mathbf{y}_k^{h,0}, \mathbf{y}_k^{h,1}, \dots, \mathbf{y}_k^{h,m-1}\},$$

где $\mathbf{y}_k^{h,\nu} = \{y_k^{h,\nu}, U_{n+1}^0(y_k^{h,\nu}), U_{n+2}^0(y_k^{h,\nu}), \dots, U_{2n}^0(y_k^{h,\nu})\}$:

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{p_k} c_{kh} \hat{\mathbf{y}}_k^h. \quad (23)$$

Равенство (23) понимается как равенство вектор-функций в пространстве

$$(W_2^{n+r} \times \mathbb{C}^n) \times (W_2^{n+r-1} \times \mathbb{C}^n) \times \dots \times (W_2^{n+r-m} \times \mathbb{C}^n).$$

Так как сходимость в сильной норме влечет за собой сходимость в слабой норме, то сходимость ряда в разложении (23) можно рассматривать в норме пространства $(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m$. Но элементы $\hat{\mathbf{y}}_k^h$ являются производными по Келдышу цепочками пучка

$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^m A_m$. Поэтому разложение (23) можно рассматривать как разложение элемента $\hat{\mathbf{y}}$ по производным цепочкам Келдыша пучка $A(\lambda)$.

Если в качестве $\hat{\mathbf{y}}$ выбрать элемент (22), то коэффициенты $\hat{c}_{kh}$ являются также коэффициентами c_{kh} разложения (17). Поэтому равенство (16) можно использовать и при вычислении коэффициентов разложения (17). Используя конкретное представление для элемента $\hat{\mathbf{y}}$, вычислим коэффициенты c_{kh} . Для этого найдем сначала скалярное произведение, стоящее в числителе дроби последнего равенства. Имеем

$$\begin{aligned} \langle G\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m} &= \langle A_1 \mathbf{y}_0 + A_2 \mathbf{y}_1 + \dots + A_m \mathbf{y}_{m-1}, \mathbf{z}_k^{p_k-h,0} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} \\ &\quad + \langle A_0 \mathbf{y}_0 + A_1 \mathbf{y}_1 + \dots + A_{m-1} \mathbf{y}_{m-2}, \mathbf{z}_k^{p_k-h,1} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} + \dots \\ &\quad + \langle A_0 \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_k^{p_k-h,m-1} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{m-1-s} \langle A_{\nu+s+1} \mathbf{y}_\nu, \mathbf{z}_k^{p_k-h,s} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} \langle l_{\nu+1+s}(v_\nu), z_k^{p_k-h,s} \rangle_{L_2} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{m-1-s} U_j^{\nu+s+1}(v_\nu) \cdot \overline{V_{2n+1-j}^0} (z_k^{p_k-h,s}). \end{aligned}$$

Скалярное произведение $\langle G\hat{\mathbf{y}}_k^h, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle$ вычисляется аналогично. Доказательство формул (11), (12) закончено.

2. Доказательство формул (13), (14). Поскольку операторы A_ν имеют сопряженные, то справедливы следующие равенства:

$$\hat{c}_{kh} = \frac{\langle G\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}}{\langle G\hat{\mathbf{y}}_k^h, \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}} = \frac{\langle \hat{\mathbf{y}}, G^* \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}}{\langle \hat{\mathbf{y}}_k^h, G^* \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m}}, \quad (24)$$

где G^* – квадратная матрица размера $m \times m$, составленная из операторов $A_1^*, A_2^*, \dots, A_{m-1}^*, A_m^*$:

$$G^* = \begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* & \dots & A_{m-1}^* & A_m^* \\ A_2^* & A_3^* & A_4^* & \dots & A_m^* & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m-1}^* & A_m^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_m^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем сначала скалярное произведение, стоящее в числителе дроби из правой части (24). Имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{y}}, G^* \hat{\mathbf{z}}_k^{p_k-h} \rangle_{(L_2 \times \mathbb{C}^n)^m} &= \langle \mathbf{y}_0, A_1^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,0} + A_2^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,1} + \dots + A_m^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,m-1} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} \\ &\quad + \langle \mathbf{y}_1, A_2^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,0} + A_3^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,1} + \dots + A_m^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,m-2} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} + \dots \\ &\quad + \langle \mathbf{y}_{m-1}, A_m^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,0} \rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} \left\langle \mathbf{y}_s, \sum_{\nu=0}^{m-1-s} A_{\nu+1+s}^* \mathbf{z}_k^{p_k-h,\nu} \right\rangle_{L_2 \times \mathbb{C}^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} \langle v_s, l_{\nu+1+s}^* (z_k^{p_k-h, \nu}) \rangle_{L_2} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1-s} U_{n+i}^0(v_s) \cdot \xi_{n-j+1, i}^{\nu+1+s} \cdot \overline{V_{n+j}^0} (z_k^{p_k-h, \nu}).
\end{aligned}$$

Скалярное произведение $\langle \hat{y}_k^h, G^* \hat{z}_k^{p_k-h} \rangle$ вычисляется аналогично. Доказательство теоремы закончено.

ПРИМЕР. При изучении волновых движений жидкости возникает следующая спектральная задача [14]:

$$y'' + p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad U_1 = y(0) = 0, \quad U_2 = y'(1) + (a + \lambda b - \lambda^2 c)y(1) = 0. \quad (25)$$

В [15] для этой задачи были вычислены и коэффициенты разложений по производным по Келдышу цепочкам. Метод, использованный в этой работе, опирался на построение сопряженного оператора к оператору H и являлся громоздким. Теорема позволяет получить этот же результат проще, непосредственной подстановкой в общую формулу.

Не ограничивая общности (как и в работе [15]), будем считать, что все ее собственные значения являются простыми и нуль не является собственным значением.

Поскольку билинейная форма обьнтегрированных членов имеет вид

$$P_0(y, z) = y'(1)\overline{z(1)} + y'(0)\overline{[-z(0)]} + y(0)\overline{z'(0)} + y(1)\overline{[-z'(1)]},$$

то

$$\begin{aligned}
U_1^0 &= y(0), & U_2^0 &= y'(1) + ay(1), & U_3^0 &= y'(0), & U_4^0 &= y(1), \\
V_4^0 &= z'(0), & V_3^0 &= z(1), & V_2^0 &= -z(0), & V_4^0 &= -z'(1) - \bar{a}z(1).
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
U_1 &= U_1^0, & U_2 &= U_2^0 + \lambda U_2^1 - \lambda^2 U_2^2, & U_2^1 &= bU_4^0, & U_2^2 &= -cU_4^0, \\
l_1^*(z) &= 0, & l_2^*(z) &= -z, & P_1(y, z) &= 0, & P_2(y, z) &= 0,
\end{aligned}$$

все $\gamma_i^{\nu+s+1}$ равны нулю, $\xi_{22}^1 = b$, $\xi_{22}^2 = -c$, остальные $\xi_{i, n-j+1}^{\nu+s+1}$ равны 0.

Из теоремы следует, что $c_k = P_k/Q_k$, где значения P_k и Q_k можно вычислить по двум формулам. Согласно первой формуле имеем

$$\begin{aligned}
P_k &= \langle l_1(v_0), z_k \rangle_{L_2} + \langle l_2(v_1), z_k \rangle_{L_2} + \langle l_2(v_0), \overline{\lambda_k z_k} \rangle_{L_2} \\
&\quad - \sum_{s=0}^1 \sum_{\nu=0}^{1-s} U_1^{\nu+s+1}(v_\nu) V_{5-1}^0(z_k^{0,s}) - \sum_{s=0}^1 \sum_{\nu=0}^{1-s} U_2^{\nu+s+1}(v_\nu) V_{5-2}^0(z_k^{0,s}) \\
&= -\langle v_1, z_k \rangle_{L_2} - \lambda_k \langle v_0, z_k \rangle_{L_2} \\
&\quad - b \cdot v_0(1) \cdot \overline{z_k(1)} + c \cdot v_1(1) \cdot \overline{z_k(1)} + c \lambda_k \cdot v_0(1) \cdot \overline{z_k(1)} \\
&= - \int_0^1 [\lambda_k v_0(x) + v_1(x)] \cdot \overline{z_k(x)} dx + (c \lambda_k - b) \cdot v_0(1) \cdot \overline{z_k(1)} + c v_1(1) \cdot \overline{z_k(1)}, \\
Q_k &= -2 \lambda_k \int_0^1 y_k(x) \cdot \overline{z_k(x)} dx + 2 c \lambda_k \cdot y_k(1) \cdot \overline{z_k(1)} - b y_k(1) \cdot \overline{z_k(1)}.
\end{aligned}$$

Согласно второй получаем

$$\begin{aligned}
 P_k &= \langle v_0, l_2^*(\overline{\lambda_k z_k}) \rangle_{L_2} + \langle v_1, l_2^*(z_k) \rangle_{L_2} + 0 \\
 &\quad - U_4^0(v_0) \cdot \xi_{22}^1 \cdot \overline{V_3^0(z_k)} - U_4^0(v_0) \cdot \xi_{22}^2 \cdot \overline{V_3^0(\lambda_k(z_k))} - U_4^0(v_1) \cdot \xi_{22}^2 \cdot \overline{V_3^0(z_k)} \\
 &= - \int_0^1 [\lambda_k v_0(x) + v_1(x)] \cdot \overline{z_k(x)} dx + (c\lambda_k - b) \cdot v_0(1) \cdot \overline{z_k(1)} + cv_1(1) \cdot \overline{z_k(1)}, \\
 Q_k &= -2\lambda_k \int_0^1 y_k(x) \cdot \overline{z_k(x)} dx + 2c\lambda_k \cdot y_k(1) \cdot \overline{z_k(1)} - by_k(1) \cdot \overline{z_k(1)}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты вычислены в настоящей работе для разложений в пространстве $\mathcal{W}_{2,U}^1$, а в работе [15] для разложений в пространстве $\mathcal{W}_{2,U}^0 \times \mathbb{C}$.

В заключение автор выражает признательность А. А. Шкаликову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Birkhoff G. D. On asymptotic character of the solution of certain linear differential equations containing parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. P. 219–231.
- [2] Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. P. 373–395.
- [3] Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
- [4] Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.
- [5] Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 15–41.
- [6] Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.
- [7] Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 1989. № 14. С. 140–224.
- [8] Крылов А. Н. Некоторые замечания о крещерах и индикаторах // Изв. Академии наук. 6 серия. С.-Петербург. 1909. Т. 3. № 15. С. 623–654.
- [9] Мелешко С. В., Покорный Ю. В. Об одной вибрационной краевой задаче // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1466–1467.
- [10] Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. 1973. V. 133. № 4. P. 301–312.
- [11] Hinton D. B. An expansion theorem for an eigenvalue parameter in boundary condition // Quart. J. Math. Oxford. 1979. V. 30. № 2. P. 33–42.
- [12] Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. О спектральной задаче из теории парабола-гиперболического уравнения теплопроводности // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 4. С. 451–454.
- [13] Губреев Г. М., Пивоварчик В. Н. Спектральный анализ задачи Редже с параметрами // Функцион. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 1. С. 70–74.
- [14] Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1983. № 6. С. 40–51.
- [15] Ахтямов А. М. О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам одной спектральной задачи // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 137–139.
- [16] Ахтямов А. М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Изв. вузов. Сер. матем. 2000. № 2. С. 13–18.