Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Дубицкас, Некоторые диофантовы свойства меры Малера, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 828–833

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 09:35:21

УДК 511

НЕКОТОРЫЕ ДИОФАНТОВЫ СВОЙСТВА МЕРЫ МАЛЕРА

А. Дубицкас

Доказано, что многочлен от нескольких мер Малера с положительными рациональными коэффициентами равен целому числу тогда и только тогда, когда все эти меры Малера являются целыми числами. Получена оценка расстояния между метрической мерой Малера и целым числом. Наконец, доказана иррациональность соотношения двух различных мер Малера от алгебраических единиц.

Библиография: 8 названий.

Пусть α – алгебраическое число над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Ясно, что произведение коэффициента при старшем члене минимального многочлена для α , $a(\alpha)$ и всех сопряженных α , по модулю больших единицы, $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$ (если таковые существуют) является вещественным числом. Его модуль $M(\alpha)$ называется *мерой Малера* алгебраического числа α , т.е.

$$M(\alpha) = \pm a(\alpha) \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k)}.$$

Ясно, что мера Малера является целым алгебраическим числом и $M(\alpha) \geq 1$.

Задача о нахождении всех значений $M(\alpha)$, когда α пробегает множество всех алгебраических чисел, является очень сложной. Например, неизвестен ответ на вопрос Лемера [1] о том, для любого ли положительного числа ε существует $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, где $\overline{\mathbb{Q}}$ обозначает множество всех алгебраических чисел с мерой Малера $M(\alpha)$, принадлежащей интервалу $(1, 1 + \varepsilon)$. Бойд [2] доказал (см. также [3]), что все сопряженные алгебраического числа $M(\alpha)$ (если они существуют) лежат в области $1/M(\alpha) \leq |z| < M(\alpha)$. Ранее, Адлер и Маркус [4] доказали более слабый вариант этого утверждения о том, что мера Малера является числом Перрона. Напомним, что числом Перрона называется положительное алгебраическое число β , все сопряженные которого (если они существуют) лежат в круге $|z| < \beta$.

Предположим, что $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$ – это мера Малера, т.е. существует (и, как правило, нам известно) $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ такое, что $\gamma = M(\alpha)$. Как найти *все решения* уравнения $M(x) = \gamma$? Например, если $\gamma = 1$, Кронекер [5] показал, что $M(x) = 1$ тогда и только тогда, когда x – корень из единицы. В работе [3] автор исследовал обратную задачу для меры Малера от целых чисел и описал решения уравнения $M(x) = \gamma$ при $\gamma \in \{2, 3, \dots\}$. Пусть E обозначает множество алгебраических чисел α , все сопряженные которых, включая

само α , лежат либо в единичном круге $|z| \leq 1$, либо находятся строго вне его. В [3] показано, что, для того чтобы $M(\alpha)$ было натуральным числом, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \in \mathbb{E}$. Однако, если γ – мера Малера и не является целым числом, то даже в простейших случаях неизвестно, как найти все решения уравнения $M(x) = \gamma$.

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторое конечное множество векторов $\langle \ell_1, \dots, \ell_n \rangle$ с неотрицательными целыми координатами $\ell_1, \dots, \ell_n$. Рассмотрим многочлен

$$P(z_1, \dots, z_n) = \sum k(\ell_1, \dots, \ell_n) z_1^{\ell_1} \dots z_n^{\ell_n},$$

где суммирование ведется по векторам $\langle \ell_1, \dots, \ell_n \rangle \in \mathcal{K}$. Предположим, что все коэффициенты $k(\ell_1, \dots, \ell_n)$ – положительные рациональные числа, а для каждого i , где $i = 1, 2, \dots, n$, найдется $\ell_i > 0$ такое, что $\langle \ell_1, \dots, \ell_i, \dots, \ell_n \rangle \in \mathcal{K}$. Последнее условие означает, что многочлен P действительно зависит от всех n переменных $z_1, \dots, z_n$. Для краткости многочлены, удовлетворяющие этим условиям, мы будем называть *положительными рациональными многочленами от n переменных*.

В настоящей работе мы сначала рассмотрим уравнение $P(z_1, \dots, z_n) = t$, где t и n – фиксированные натуральные числа, P – положительный рациональный многочлен от n переменных, а $z_1, \dots, z_n$ – некие меры Малера.

ТЕОРЕМА 1. Пусть t и n – фиксированные натуральные числа, P – положительный рациональный многочлен от n переменных. Если для n алгебраических (не обязательно различных) чисел $\alpha, \beta, \dots, \omega$ верно равенство

$$P(M(\alpha), M(\beta), \dots, M(\omega)) = t,$$

то $M(\alpha), M(\beta), \dots, M(\omega)$ – натуральные числа.

Например, из теоремы 1 следует, что уравнение $3M(\alpha) + 2M(\beta)^2 = 7$ не имеет решений в алгебраических числах α и β . Уравнение $3M(\alpha)^2 + 4M(\beta)M(\gamma) = 26$ тоже не имеет решений в алгебраических числах α, β, γ . Чтобы убедиться в этом, предположим обратное. Тогда $M(\alpha)$ – четное число, и поэтому $M(\alpha) = 2$, так как $M(\alpha) < 3$. Равенство $2M(\beta)M(\gamma) = 7$ невозможно в силу того, что $M(\beta)$ и $M(\gamma)$ – натуральные числа.

Чтобы описать множество решений уравнения $3M(\alpha) + 2M(\beta)^2 = 8$ в алгебраических числах, для $s \in \mathbb{N}$ мы определим множество $\mathbb{E}_s$ как множество $\alpha \in \mathbb{E}$ таких, что $\max\{a(\alpha), a(1/\alpha)\} = s$. Здесь $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел. Легко видеть, что $\mathbb{E}_s$ попарно не пересекаются и

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2 \cup \dots \cup \mathbb{E}_s \cup \dots$$

Заметим, что $\mathbb{E}_1$ – это в точности все корни из единицы. В [3] доказано, что для равенства $M(\alpha) = s$ необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \in \mathbb{E}_s$. Таким образом, решения уравнения $3M(\alpha) + 2M(\beta)^2 = 8$ – это всевозможные пары $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{E}_2 \times \mathbb{E}_1$. Решения уравнения $3M(\alpha)^2 + 4M(\beta)M(\gamma) = 27$ – это всевозможные тройки $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ из множеств $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \mathbb{E}_3, \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_3 \times \mathbb{E}_2$ и $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_6 \times \mathbb{E}_1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha, \beta, \dots, \omega$ – алгебраические (не обязательно различные) числа. Если $M(\alpha) \notin \mathbb{N}$, то $M(\alpha)M(\beta) \cdots M(\omega)$ и $M(\alpha) + M(\beta) + \cdots + M(\omega)$ – иррациональные числа.

В работе [6] автор и Смит рассматривали вариант меры Малера, метрическую меру Малера $\mathfrak{M}(\alpha)$, которая определяется как

$$\mathfrak{M}(\alpha) = \inf M(\beta)M(\gamma) \cdots M(\omega),$$

где $\beta, \gamma, \dots, \omega$ – любые алгебраические числа, удовлетворяющие условию $\alpha = \beta\gamma \cdots \omega$. Высказана гипотеза о том, что для любого $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ инфимум является минимумом. Будем называть ее гипотезой о метрической мере Малера. Она проверена для чисел Пизо, Салема и корней из рациональных чисел. Мы напомним лишь определение чисел Пизо, так как они нам потребуются позже: алгебраическое число $\beta > 1$ называется числом Пизо, если все его сопряженные, кроме самого β , лежат строго в единичном круге $|z| < 1$. Гипотеза верна для всех алгебраических чисел, если существует абсолютная положительная постоянная c такая, что для любого натурального $d \geq 3$ и для любого $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ степени d , верно неравенство

$$M(\alpha) > 1 + \frac{c}{\log \log d},$$

если только α не корень из единицы (см. [6]). Неравенство Добровольского [7] при тех же условиях дает

$$M(\alpha) > 1 + c \left(\frac{\log \log d}{\log d} \right)^3.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть α – алгебраическое число, для которого верна гипотеза о метрической мере Малера. Если $\mathfrak{M}(\alpha) \in \mathbb{N}$, то α либо принадлежит множеству E , либо является произведением двух чисел, каждое из которых принадлежит E .

Верно следующее неравенство о расстоянии между метрической мерой Малера и целым числом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть α – алгебраическое число, для которого верна гипотеза о метрической мере Малера, и пусть $t \in \mathbb{N}$. Если степень числа $\mathfrak{M}(\alpha)$ равна D и $\mathfrak{M}(\alpha) \neq t$, то

$$|\mathfrak{M}(\alpha) - t| > (2t)^{-D}.$$

Более того, для любых $t, D \in \mathbb{N}$ существует $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ такое, что степень числа $\mathfrak{M}(\alpha)$ равна D , $\mathfrak{M}(\alpha) \neq t$ и

$$|\mathfrak{M}(\alpha) - t| \leq t^{2-D}.$$

Отметим, что в следствии 1 умножение нельзя заменить на деление, а сумму – на вычитание. Так, например,

$$M\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1,$$

а при любом натуральном $m > 1$ выполняется равенство

$$\frac{M(m^2 + m\sqrt{m^2 - 1})}{M(m + \sqrt{m^2 - 1})} = m.$$

Заменить умножение на деление все-таки можно, если ограничиться группой алгебраических единиц $\mathbb{U}$. Напомним, что $\alpha \in \mathbb{U}$, если α и $1/\alpha$ оба являются целыми алгебраическими числами.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\alpha, \dots, \omega$ – n алгебраических единиц, $k_1, \dots, k_n$ – целые числа, то число $M(\alpha)^{k_1} \dots M(\omega)^{k_n}$ или равно единице, или иррационально.*

В частности, соотношение двух различных мер Малера от алгебраических единиц иррационально.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{U}$ и $M(\alpha) \neq M(\beta)$. Тогда $M(\alpha)/M(\beta)$ – иррациональное число.*

Для степени меры Малера от алгебраической единицы имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть k – ненулевое целое число и $\alpha \in \mathbb{U}$ не является корнем из единицы. Если $M(\alpha)$ иррационально, то и $M(\alpha)^k$ иррационально.*

Теперь приведем доказательства сформулированных теорем и следствий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathbb{K}$ – нормальное расширение поля $\mathbb{Q}(M(\alpha), \dots, M(\omega))$. Если, например, $M(\alpha)$ иррационально, то существует автоморфизм поля $\mathbb{K}$, который переводит $M(\alpha)$ в его сопряженное с меньшим модулем (так как $M(\alpha)$ является числом Перрона). При этом числа $M(\beta), \dots, M(\omega)$ перейдут либо в себя, либо в свои сопряженные с меньшими модулями. Ввиду положительности и рациональности коэффициентов многочлена P число $P(M(\alpha), \dots, M(\omega))$ перейдет в число с меньшим модулем. Так как левая часть равенства $P(M(\alpha), M(\beta), \dots, M(\omega)) = t$ перейдет в меньшее по модулю число, а правая часть – в себя, то наше предположение неверно. Следовательно, число $M(\alpha)$ рациональное. Ввиду того, что мера Малера – целое алгебраическое число, $M(\alpha)$ – целое рациональное. Так как мера Малера не меньше единицы, то $M(\alpha) \in \mathbb{N}$. То же самое условие выполняется и для $M(\beta), \dots, M(\omega)$, что и завершает доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Требуемое утверждение вытекает из теоремы 1, если положить $P(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 z_2 \dots z_n$ и $P(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. (Это многочлены с положительными рациональными коэффициентами.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из условий следует, что существуют $\beta, \dots, \omega \in \overline{\mathbb{Q}}$ такие, что $\alpha = \beta \dots \omega$ и

$$\mathfrak{M}(\alpha) = M(\beta) \dots M(\omega) \in \mathbb{N}.$$

Из следствия 1 получается, что $M(\beta), \dots, M(\omega)$ являются целыми положительными числами. Как уже было замечено раньше, в работе [3] показано, что это возможно лишь в случае, когда $\beta, \dots, \omega \in \mathbb{E}$. Пусть φ – произведение тех чисел из набора $\beta, \dots, \omega$ (возможно с повторениями), размер которых не превышает 1. (Конечно, если таковые в этом

множестве есть. Иначе, положим $\varphi = 1$.) Напомним, что *размер* алгебраического числа – это максимальный модуль среди всех его сопряженных. Ясно, что $\varphi \in \mathbb{E}$, так как размер числа φ не превышает 1.

Пусть также $1/\zeta$ – произведение тех чисел из набора $1/\beta, \dots, 1/\omega$ (возможно с повторениями), размер которых строго меньше 1. (Опять-таки, если они в этом множестве есть. Иначе, положим $\zeta = 1$.) Ясно, что $\zeta \in \mathbb{E}$, так как размер числа $1/\zeta$ не превышает 1.

Очевидно, что $\alpha = \varphi\zeta$. Теперь, если $\varphi = 1$ или $\zeta = 1$, мы имеем первую альтернативу следствия 2, т.е. $\alpha \in \mathbb{E}$. Если же $\varphi \neq 1$ и $\zeta \neq 1$, то мы имеем вторую альтернативу, т.е. α – произведение двух чисел из множества $\mathbb{E}$. Конечно, может оказаться, что и в этом случае не только $\varphi, \zeta \in \mathbb{E}$, но и $\alpha = \varphi\zeta \in \mathbb{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть γ – число Перрона, а $\gamma^{(u)}$, где $u = 2, 3, \dots, D$, – его сопряженные, отличные от γ . Если γ – целое алгебраическое число и $\gamma \neq m$, то

$$1 \leq |\gamma - m| \cdot |\gamma^{(2)} - m| \cdots |\gamma^{(D)} - m|.$$

Покажем, что $|\gamma - m| > (2m)^{-D}$.

Предположим, что $\gamma < m$. Тогда $|\gamma^{(u)} - m| \leq |\gamma^{(u)}| + |m| < 2m$ для $u = 2, 3, \dots, D$, так что требуемое неравенство получается немедленно. Если же $m < \gamma \leq m + (2m)^{-D}$, то $|\gamma^{(u)} - m| \leq 2m + (2m)^{-D}$ при каждом $u = 2, 3, \dots, D$. Неравенство

$$1 \leq (2m)^{-D} (2m + (2m)^{-D})^{D-1} = \frac{(1 + (2m)^{-D-1})^{D-1}}{2m}$$

невозможно. Действительно,

$$(1 + (2m)^{-D-1})^{D-1} \leq (1 + 2^{-D-1})^{D-1} \leq \exp\{(D-1)2^{-D-1}\}.$$

Ясно, что максимум последнего выражения, когда D пробегает множество $\mathbb{N}$, достигается при $D = 2$ и $D = 3$. Он равен $\exp\{1/8\}$, что меньше 2, а значит и $2m$. Следовательно, $\gamma > m + (2m)^{-D}$, что и доказывает требуемое неравенство.

Так как для α выполняется гипотеза о метрической мере Малера, то $\mathfrak{M}(\alpha)$ – число Перрона (как произведение чисел Перрона). Неравенство

$$|\mathfrak{M}(\alpha) - m| > (2m)^{-D}$$

доказано.

Для $D = 1$, чтобы получить требуемую оценку сверху, достаточно взять $\alpha = m + 1$. В этом случае неравенство превращается в равенство. Если $D > 1$, $m = 1$, то достаточно взять любое число Пизо степени D в интервале $(1, 2)$. Такие числа существуют (см. [8]), а в [6] показано, что $\mathfrak{M}(\alpha) = \alpha$, если α – число Пизо.

Пусть $m, D > 1$. В работе [3] было показано, что для любых натуральных $m, D > 1$ многочлен

$$z^D - (m-1)(z^{D-1} + z^{D-2} + \cdots + z + 1)$$

неприводим над полем $\mathbb{Q}$ и его корнем является число Пизо α степени D такое, что $\alpha \neq m$ и $\log|\alpha - m| < (2-D)\log m$. Для этого числа Пизо имеем требуемое неравенство

$$|\mathfrak{M}(\alpha) - m| = |\alpha - m| < m^{2-D}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть

$$M(\alpha)^{k_1} \dots M(\omega)^{k_n} = \frac{s}{r}$$

с натуральными числами s и r . Ясно, что если $\alpha \in \mathbb{U}$, то и $M(\alpha) \in \mathbb{U}$. Ввиду того, что $\mathbb{U}$ – группа, левая часть равенства является алгебраической единицей. Теперь, так как левая часть равенства принадлежит $\mathbb{U}$, то и $s/r \in \mathbb{U}$. Это возможно лишь тогда, когда $s = r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Требуемое утверждение вытекает из теоремы 3 ввиду того, что $M(\alpha)M(\beta)^{-1} \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Требуемое утверждение получается из теоремы 3, если предположить обратное, т.е. что $M(\alpha)^k \in \mathbb{Q}$. Тогда $M(\alpha)$ – корень из единицы. Очевидно, что единственный положительный корень из единицы равен 1. Следовательно, по теореме Кронекера, α – корень из единицы. Получили противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lehmer D. H. Factorization of certain cyclotomic functions // Ann. of Math. 1933. V. 34. P. 461–479.
- [2] Boyd D. W. Perron units which are not Mahler measures // Ergod. Theory and Dynamic. Systems. 1986. V. 6. P. 485–488.
- [3] Dubickas A. Mahler measures close to an integer // Canadian Math. Bull. 2002. V. 45. P. 196–203.
- [4] Adler R. L., Marcus B. Topological entropy and equivalence of dynamical systems // Mem. Amer. Math. Soc. 1979. V. 20. №219.
- [5] Kronecker L. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // J. Reine Angew. Math. 1857. V. 53. P. 173–175.
- [6] Dubickas A., Smyth C. J. On the metric Mahler measure // J. Number Theory. 2001. V. 86. P. 368–387.
- [7] Dobrowolski E. On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial // Acta Arith. 1979. V. 34. P. 391–401.
- [8] Bertin M.-J., Decomps-Guilloux A., Grandet-Hugot M., Pathiaux-Delefosse M., Schreiber J.-P. Pisot and Salem Numbers. Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.

Вильнюсский университет, Литва
E-mail: arturas.dubickas@maf.vu.lt

Поступило
27.06.2001
Исправленный вариант
26.02.2002