Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Заторский, Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 834–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:49:15

УДК 519.1

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ И ТРАЕКТОРИИ НА ДИАГРАММАХ ФЕРРЕ

Р. А. Заторский

Рассматриваются некоторые функции, заданные на множестве целых треугольных матриц, а также их модификации. Эти функции являются аналогами классических функций определителя и перманента и дают мощный аппарат исследования последовательностей, порожденных линейными рекуррентными уравнениями. При помощи модификаций этих функций решается задача о траекториях на диаграммах Ферре и устанавливаются новые комбинаторные тождества.

Библиография: 4 названия.

1. Треугольные матрицы, параопределители и параперманенты. В этом пункте мы дадим определения параопределителя и параперманента. Более основательно эти функции треугольных действительных матриц изучаются в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Треугольную таблицу чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \quad (1.1)$$

назовем *треугольной матрицей*, а число n – ее *порядком*.

Каждому элементу a_{ij} матрицы (1.1) поставим в соответствие $(i - j + 1)$ элементов a_{ik} , $k = j, \dots, i$, которые назовем *производными элементами* матрицы, порожденными *ключевым элементом* a_{ij} . Ключевой элемент одновременно является и своим производным элементом. Произведение всех производных элементов, порожденных ключевым элементом a_{ij} , обозначим через $\{a_{ij}\}$ и назовем *факториальным произведением* ключевого элемента a_{ij} , т.е. $\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Набор ключевых элементов матрицы (1.1) назовем *нормальным набором* этой матрицы, если они порождают множество производных элементов мощности n , каждые два из которых не лежат в одном столбце этой матрицы.

Пусть $A(n)$ – множество упорядоченных разбиений $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ натурального числа n . Известно, что $|A(n)| = 2^{n-1}$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)$, тогда каждой компоненте α_s , $s = 1, \dots, r$, этого разбиения поставим в соответствие ключевой элемент a_{ij} матрицы (1.1) при помощи следующего алгоритма:

1° начать;

- 2° $j = 1; s = 0; i = 0$;
- 3° $s = s + 1; i = i + \alpha_s$ элемент $(s) = a_{ij}$;
- 4° если $s < r$, то $j = j + \alpha_s$; перейти к 3°;
- 5° конец.

Каждому нормальному набору a ключевых элементов припишем знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, где $\varepsilon(a)$ – сумма всех индексов ключевых элементов этого набора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Параопределителем* треугольной матрицы (1.1) назовем число

$$\text{ddet}(A) = \diamond_n = \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s), j(s)}\},$$

где $a_{i(s), j(s)}$ – ключевой элемент, соответствующий s -й компоненте разбиения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, а $(-1)^{\varepsilon(a)}$ – знак нормального набора a ключевых элементов.

Аналогично понятию параопределителя введем понятие параперманента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Параперманентом* матрицы (1.1) назовем число

$$\text{pper}(A) = \square_n = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right]_n = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s), j(s)}\},$$

где $a_{i(s), j(s)}$ – ключевой элемент, который соответствует s -й компоненте разбиения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ из множества $A(n)$.

Следует отметить, что параопределитель и параперманент матрицы (1.1) состоят всего из 2^{n-1} слагаемых. Поэтому, если выразить члены некоторой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ в виде параопределителя или параперманента, достигается значительная экономия числа операций. Поскольку для каждой числовой последовательности, порожденной линейным рекуррентным уравнением с некоторыми начальными условиями, можно построить соответствующий параперманент $\square_n$ (см. теорему 2.1), то понятия параопределителя и параперманента во многих случаях становятся незаменимыми.

Введем для параопределителя и параперманента понятия, аналогичные классическим понятиям минора и алгебраического дополнения. С этой целью каждому элементу a_{ij} матрицы (1.1) поставим в соответствие треугольную таблицу элементов этой матрицы с этим элементом в левом нижнем углу, которую назовем *углом матрицы* и обозначим через R_{ij} . Углу R_{ij} принадлежат только те элементы a_{rs} матрицы (1.1), индексы которых удовлетворяют соотношениям $j \leq s \leq r \leq i$. Очевидно, что угол R_{ij} является матрицей $(i - j + 1)$ -го порядка. В дальнейшем будем считать, что

$$\text{ddet}(R_{01}) = \text{ddet}(R_{n, n+1}) = \text{pper}(R_{01}) = \text{pper}(R_{n, n+1}) = 1.$$

Если в угле R_{ij} j -й столбец заменить соответствующими элементами k -го столбца ($k < j$), а все остальные элементы угла оставить неизменными, то такой угол обозначим через $R_{i; j \mapsto k}$. Будем считать, что $\text{ddet}(R_{n; n+1 \mapsto n}) = \text{pper}(R_{n; n+1 \mapsto n}) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Прямоугольную таблицу элементов матрицы (1.1) назовем *вписанной* в эту матрицу, если одна ее вершина совпадает с элементом a_{n1} , а противоположная к ней вершина – с элементом a_{ii} , $i = 1, \dots, n$. Обозначим эту таблицу через $T(i)$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.1. Если в определении 1.5 $i = 1$ или $i = n$, то вписанная прямоугольная таблица вырождается соответственно в первый столбец или последнюю строчку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Алгебраическими дополнениями* D_{ij} , P_{ij} к факториальному произведению ключевого элемента a_{ij} матрицы (1.1) назовем соответственно числа

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ddet}(R_{j-1,1}) \text{ddet}(R_{n,i+1}), \quad P_{ij} = \text{pper}(R_{j-1,1}) \text{pper}(R_{n,i+1}),$$

где $R_{j-1,1}$ и $R_{n,i+1}$ – углы матрицы (1.1).

Интересным является тот факт, что некоторые свойства параопределителей аналогичны свойствам классических определителей (см. [1]).

2. Применение параперманентов к решению линейных рекуррентных уравнений. Приведем две важные теоремы, которые позволяют решить линейное рекуррентное уравнение k -го порядка с постоянными коэффициентами, избегая решения соответствующего алгебраического уравнения того же порядка. Доказательства приведенных ниже теорем можно найти в [1].

Пусть задано линейное рекуррентное уравнение k -го порядка

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$u_i = b_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Параперманент вида*

$$u_{n+k} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 x_2 & & & & & \\ a_2 x_1 / a_1 & a_1 x_3 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{k-1} x_1 / a_{k-2} & a_{k-2} / a_{k-3} & \dots & a_2 / a_1 & a_1 x_k & \\ a_k x_1 / a_{k-1} & a_{k-1} / a_{k-2} & \dots & a_3 / a_2 & a_2 / a_1 & a_1 \\ 0 & a_k / a_{k-1} & \dots & \dots & a_2 / a_1 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n-1} & a_k / a_{k-1} & \dots & \dots & a_2 / a_1 & a_1 \end{bmatrix}_{n+k-1},$$

$$u_1 = x_1,$$

где поправки x_i определяются из равенств

$$x_1 = b_1, \quad x_i = \frac{b_i}{a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots + a_{i-1} b_1}, \quad i = 2, \dots, k,$$

является решением уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2), причем $b_r = 0$, если $r \leq 0$.

ПРИМЕЧАНИЕ 2.1. Решение уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2) при помощи теоремы о связи параопределителя и парAPERMANЕНТА (см. [1]) можно выразить через параопределитель.

Для рекуррентного уравнения (2.1) начальные условия вида

$$u_1 = 1, \quad u_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2/a_1 & a_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{i-1}/a_{i-2} & a_{i-2}/a_{i-3} & \dots & a_1 \end{bmatrix}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, k, \quad (2.3)$$

назовем *стандартными начальными условиями*.

ТЕОРЕМА 2.2. *Линейное рекуррентное уравнение k -го порядка (2.1) с постоянными коэффициентами и стандартными начальными условиями (2.3) имеет решение вида*

$$u_{n+k} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2/a_1 & a_1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_k/a_{k-1} & a_{k-1}/a_{k-2} & \dots & a_3/a_2 & a_2/a_1 & a_1 & \\ 0 & a_k/a_{k-1} & \dots & \dots & a_2/a_1 & a_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n-1} & a_k/a_{k-1} & \dots & \dots & a_2/a_1 & a_1 \end{bmatrix}_{n+k-1},$$

$$n, k = 1, 2, \dots$$

3. Модификации параопределителей и парAPERMANЕНТОВ. В этом пункте мы введем некоторые модификации параопределителей и парAPERMANЕНТОВ, которые назовем F -параопределителями и F -парAPERMANЕНТАМИ.

Пусть задана матрица (1.1). Каждому элементу a_{ij} , $1 \leq j \leq i \leq n$, этой матрицы поставим в соответствие $i - j + 1$ элементов w_{ik} , $k = j, \dots, i$, которые назовем *виртуальными элементами* этой матрицы, порожденными ключевым элементом a_{ij} . Ключевой элемент одновременно является и своим виртуальным элементом. Виртуальные элементы играют роль вспомогательных элементов и предназначены облегчить доказательство некоторых утверждений. Если виртуальные элементы задаются посредством одного из равенств $w_{ik} = a_{ij} + k - j$ или $w_{ik} = a_{ij} - k + j$, $k = j, \dots, i$, то следующие два выражения:

$$\{a_{ij}\}^\circ = \frac{\overline{a_{ij}^{i-j+1}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}+1) \cdots (a_{ij}+i-j)}{(i-j+1)!}, \quad (3.1)$$

$$\{a_{ij}\}_\circ = \frac{\underline{a_{ij}^{i-j+1}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}-1) \cdots (a_{ij}-i+j)}{(i-j+1)!} \quad (3.2)$$

назовем соответственно *верхним и нижним факториальными произведениями* ключевого элемента a_{ij} . В равенствах (3.1) и (3.2) мы пользуемся следующими обозначениями возрастающих и убывающих факториальных степеней:

$$x^{\overline{m}} = x(x+1) \cdots (x+m-1), \quad x^{\underline{m}} = x(x-1) \cdots (x-m+1)$$

(см. [2, с. 67]).

Таким образом, производные элементы ключевого элемента заменяются соответственными виртуальными элементами, а набор ключевых элементов считается нормальным, если он порождает множество виртуальных элементов мощности n , каждые два из которых не принадлежат одновременно одному столбцу этой матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Верхним (нижним) F -параопределителем* матрицы (1.1) назовем соответственно числа

$$\begin{aligned} \text{ddet}^\circ(A) &= \Diamond_n^\circ = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^r \{a_{i_s, j_s}\}^\circ, \\ \text{ddet}_\circ(A) &= \Diamond_{n^\circ} = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^r \{a_{i_s, j_s}\}_\circ, \end{aligned}$$

где a_{i_s, j_s} – ключевой элемент, соответствующий s -й компоненте разбиения α ; $\{a_{i_s, j_s}\}^\circ$, $\{a_{i_s, j_s}\}_\circ$ – соответственно верхнее и нижнее факториальные произведения ключевого элемента a_{i_s, j_s} , которые задаются соответственно равенствами (3.1), (3.2), а $(-1)^{\varepsilon(a)}$ – множитель, определяющий знак нормального набора a ключевых элементов.

Аналогично определению F -параопределителя введем понятие верхнего и нижнего F -параперманента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Верхним (нижним) F -параперманентом* матрицы (1.1) назовем соответственно числа

$$\begin{aligned} \text{pper}^\circ(A) &= \square_n^\circ = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{i_s, j_s}\}^\circ, \\ \text{pper}_\circ(A) &= \square_{n^\circ} = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in A(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{i_s, j_s}\}_\circ, \end{aligned}$$

где a_{i_s, j_s} – ключевой элемент, соответствующий s -й компоненте разбиения α , а $\{a_{i_s, j_s}\}^\circ$, $\{a_{i_s, j_s}\}_\circ$ – соответственно верхнее и нижнее факториальные произведения этого ключевого элемента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Алгебраическими дополнениями D_{ij}° , $D_{ij\circ}$, P_{ij}° , $P_{ij\circ}$ к верхнему и нижнему факториальным произведениям ключевого элемента a_{ij} назовем соответственно числа

$$\begin{aligned} D_{ij}^\circ &= (-1)^{i+j} \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}^\circ(R_{n,i+1}), \\ D_{ij\circ} &= (-1)^{i+j} \text{ddet}_\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}_\circ(R_{n,i+1}), \\ P_{ij}^\circ &= \text{pper}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{pper}^\circ(R_{n,i+1}), \quad P_{ij\circ} = \text{pper}_\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{pper}_\circ(R_{n,i+1}). \end{aligned}$$

4. Свойства F -параопределителей треугольных матриц. Для F -параопределителей справедливы утверждения и следствия, аналогичные соответственным утверждениям и следствиям для параопределителей (см. [1]). Приведем их без доказательства.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1 (разложение по элементам вписанной таблицы). Пусть A – матрица (1.1), а $T(i)$ – некоторая вписанная в нее прямоугольная таблица элементов. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\text{ddet}^\circ(A) = \sum_{s=1}^i \sum_{r=i}^n \{a_{rs}\}^\circ D_{rs}^\circ, \quad (4.1)$$

$$\text{ddet}_\circ(A) = \sum_{s=1}^i \sum_{r=i}^n \{a_{rs}\}_\circ D_{rs\circ}, \quad (4.2)$$

СЛЕДСТВИЕ (разложение F -параопределителя по элементам первого столбца). Если $i = 1$, то равенства (4.1), (4.2) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} \text{ddet}^\circ(A) &= \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\}^\circ D_{r1}^\circ = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \{a_{r1}\}^\circ \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}), \\ \text{ddet}_\circ(A) &= \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\}_\circ D_{r1\circ} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \{a_{r1}\}_\circ t \text{ddet}_\circ(R_{n,r+1}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Справедливо также аналогичное разложение по элементам последней строчки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2 (разложение по элементам j -го столбца). Для матрицы (1.1) выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sum_{r=j}^n \{a_{rj}\}^\circ D_{rj}^\circ &= \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}^\circ(R_{nj}), \\ \sum_{r=j}^n \{a_{rj}\}_\circ D_{rj\circ} &= \text{ddet}_\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}_\circ(R_{nj}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. F -параопределитель блочно-диагональной матрицы (см. [1]), равен произведению F -параопределителей ее блоков.

Приведем несколько соотношений с возрастающими и убывающими факториальными степенями:

$$\frac{i^{\bar{r}}}{r!} = \frac{(i+r-1)^{\underline{r}}}{r!}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{N}_0; \quad (4.5)$$

$$\binom{i}{r} = \frac{i^{\underline{r}}}{r!} = \frac{(i-r+1)^{\bar{r}}}{r!}, \quad r \leq i, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad (4.6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. *Справедливы следующие тождества:*

$$\frac{(r+1)^{\bar{i}}}{i!} = \frac{(i+1)^{\bar{r}}}{r!}, \quad i, r \in \mathbb{N}_0; \quad (4.7)$$

$$\frac{r^{\underline{i}}}{i!} = \frac{r^{r-i}}{(r-i)!}, \quad i \leq r, \quad i \in \mathbb{N}_0; \quad (4.8)$$

$$\frac{i^{\bar{r}}}{r!} = \sum_{j=1}^i \frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}, \quad r, i \in \mathbb{N}; \quad (4.9)$$

$$\frac{i^r}{r!} = \sum_{j=r-1}^{i-1} \frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad r \leq i. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем тождество (4.7). При $r = 1$ имеем

$$\frac{2 \cdot 3 \cdots i \cdot (i+1)}{1 \cdot 2 \cdots (i-1) \cdot i} = \frac{(i+1)^{\bar{1}}}{1!}.$$

Пусть тождество (4.7) выполнено при $r = s$. Докажем его истинность при $r = s + 1$. Имеем

$$\frac{(r+1)^{\overline{s+1}}}{(s+1)!} = \frac{(r+1)^s(r+s+1)}{s!(s+1)} = \frac{(s+1)^{\bar{r}}}{r!} \cdot \frac{r+s+1}{s+1} = \frac{(s+2)^{\bar{r}}}{r!}.$$

Докажем справедливость тождества (4.8). Имеем

$$\frac{r^{\underline{i}}}{i!} \stackrel{(4.6)}{=} \frac{(r-i+1)^{\bar{i}}}{i!} \stackrel{(4.7)}{=} \frac{(i+1)^{\overline{r-i}}}{(r-i)!} \stackrel{(4.5)}{=} \frac{r^{\overline{r-i}}}{(r-i)!}.$$

Докажем тождество (4.9). Прежде всего докажем, что производящей функцией последовательности $(i+1)^{\bar{r}}/r!$ является функция $f(x) = (1-x)^{-(r+1)}$. Для этого найдем коэффициент при x^i в ее разложении в ряд Маклорена. Имеем

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} = \frac{(r+1)^{\bar{i}}}{i!} \stackrel{(4.7)}{=} \frac{(i+1)^{\bar{r}}}{r!}.$$

Таким образом,

$$(1-x)^{-(r+1)} = \frac{1^{\bar{r}}}{r!} + \frac{2^{\bar{r}}}{r!}x + \cdots + \frac{(i+1)^{\bar{r}}}{r!}x^i + \cdots,$$

поэтому коэффициент при x^{i-1} в произведении $(1-x)^{-1}(1-x)^{-r}$, очевидно, равен

$$\frac{1^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} + \frac{2^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} + \cdots + \frac{i^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} = \sum_{j=1}^i \frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}.$$

Докажем тождество (4.10). Имеем

$$\frac{i^{\bar{r}}}{r!} \stackrel{(4.6)}{=} \frac{(i-r+1)^{\bar{r}}}{r!} \stackrel{(4.9)}{=} \sum_{j=1}^{i-r+1} \frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} \stackrel{(4.5)}{=} \sum_{j=1}^{i-r+1} \frac{(j+r-2)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Положив в последней сумме $k = j + r - 2$, получим правую часть тождества (4.10).

Докажем несколько утверждений, свойственных только F -параопределителям.

Обозначим через

$$A \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}$$

матрицу (1.1), в которой к каждому элементу j -го столбца прибавлено некоторое целое число k , а остальные элементы этой матрицы неизменны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. *Для F -параопределителей выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} \text{ddet}^\circ(A) &= \text{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) (\text{ddet}^\circ(R_{n,j+1}) - \text{ddet}^\circ(R_{n;j+1 \mapsto j})), \\ &\quad (4.11) \\ \text{ddet}_\circ(A) &= \text{ddet}_\circ \left(A \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \text{ddet}_\circ(R_{j-1,1}) \cdot \left(\text{ddet}_\circ(R_{n,j+1}) - \text{ddet}_\circ \left(R_{n;j+1 \mapsto j} \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (4.11) при $j = 1$, т.е. докажем равенство

$$\text{ddet}^\circ(A) = \text{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \text{ddet}^\circ(R_{n2}) - \text{ddet}^\circ(R_{n;2 \mapsto 1}). \quad (4.12)$$

С этой целью разложим верхний F -параопределитель $\text{ddet}^\circ(A)$ по элементам первого столбца, используя соотношения (4.3):

$$\begin{aligned} \text{ddet}^\circ(A) &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{a_{r1}^{\bar{r}}}{r!} \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \left(\frac{(a_{r1} - 1)^{\bar{r}}}{r!} + \frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} \right) \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{(a_{r1} - 1)^{\bar{r}}}{r!} \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) + \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) \\ &= \text{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \frac{a_{11}^{\bar{0}}}{0!} \text{ddet}^\circ(R_{n2}) + \sum_{r=2}^n (-1)^{r+1} \frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}). \end{aligned}$$

Пусть в последней сумме $s = r - 1$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^n (-1)^{r+1} \frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} \text{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) &= - \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+1} \frac{a_{s+1,1}^{\bar{s}}}{s!} \text{ddet}^\circ(R_{n,s+2}) \\ &= \text{ddet}^\circ(R_{n;2 \mapsto 1}). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (4.12) истинно.

Разложим верхний F -параопределитель

$$\text{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

по элементам вписанной таблицы $T(j)$:

$$\text{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{r=j}^n \sum_{s=1}^{j-1} \frac{a_{rs}^{\overline{r-s+1}}}{(r-s+1)!} D_{rs}^\circ + \sum_{s=j}^n \frac{(a_{sj}-1)^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!} D_{sj}^\circ. \quad (4.13)$$

Вторая сумма равенства (4.13) соответствует разложению этого F -параопределителя по элементам j -го столбца. Обозначим первую сумму через φ . Теперь разложим верхний F -параопределитель $\text{ddet}^\circ(A)$ по элементам таблицы $T(j)$:

$$\text{ddet}^\circ(A) = \varphi + \sum_{s=j}^n \frac{a_{sj}^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!} D_{sj}^\circ \stackrel{(4.4)}{=} \varphi + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}^\circ(R_{nj}).$$

Представим элементы первого столбца угла R_{nj} в виде $a_{sj} = (a_{sj}-1)+1$, $s = j, \dots, n$, и используем равенство (4.12). Тогда получим

$$\begin{aligned} \text{ddet}^\circ(A) &= \varphi + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \left(\text{ddet}^\circ \left(R_{nj} \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{ddet}^\circ(R_{n,j+1}) - \text{ddet}^\circ(R_{n;j+1 \mapsto j}) \right) \\ &= \varphi + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}^\circ \left(R_{nj} \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot (\text{ddet}^\circ(R_{n,j+1}) - \text{ddet}^\circ(R_{n;j+1 \mapsto j})). \end{aligned}$$

Поскольку по утверждению 4.2

$$\text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \cdot \text{ddet}^\circ \left(R_{nj} \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{s=j}^n \frac{(a_{sj}-1)^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!} D_{sj},$$

то, учитывая (4.13), получим равенство (4.11).

5. F -параопределители матриц специального вида. Пусть матрица (1.1) задана равенством

$$a_{ij} = a_i - (i-j) + k, \quad 1 \leq j \leq i \leq n. \quad (5.1)$$

Обозначим верхний и нижний F -параопределители матрицы (5.1), соответственно через $\diamond 1_n^\circ, \diamond 1_{n\circ}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Для верхнего F -параопределителя $\Diamond 1_n^\circ$ выполняется равенство

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^n \frac{(j+1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!} \operatorname{ddet}^\circ \left(R_{j1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j \\ -k & \cdots & -k \end{pmatrix} \right), \quad (5.2)$$

где $\operatorname{ddet}^\circ(R_{01}) = 1$, а $\operatorname{ddet}^\circ(R_{n1}) = \Diamond 1_n^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (5.2) при $k = 1$. Запишем равенство (4.12) в виде

$$\operatorname{ddet}^\circ(A) - \operatorname{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{ddet}^\circ(R_{n2}) - \operatorname{ddet}^\circ(R_{n;2 \mapsto 1}). \quad (5.3)$$

К правой части равенства (5.3) применимо равенство, аналогичное равенству (5.3), поэтому, продолжая процесс вычислений, получим равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{ddet}^\circ(A) - \operatorname{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) &= \operatorname{ddet}^\circ(R_{n2}) - \operatorname{ddet}^\circ(R_{n;2 \mapsto 1}) \\ &= \operatorname{ddet}^\circ(R_{n3}) - \operatorname{ddet}^\circ(R_{n;3 \mapsto 2}) = \cdots = \operatorname{ddet}^\circ(a_n + k) - \operatorname{ddet}^\circ(a_n + k - 1) = 1. \end{aligned}$$

Эти равенства вместе с равенством (4.11) дадут равенство

$$\Diamond 1_n^\circ = \operatorname{ddet}^\circ(A) - \operatorname{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \operatorname{ddet}^\circ(R_{j-1,1}). \quad (5.4)$$

При $j = n$ равенство (5.4) имеет вид

$$\Diamond 1_n^\circ = \operatorname{ddet}^\circ(A) = \operatorname{ddet}^\circ \left(A \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \operatorname{ddet}^\circ(R_{n-1,1}).$$

Применяя к верхнему F -параопределителю $\operatorname{ddet}^\circ(R_{n-1,1})$ равенство (5.4) при $j = n - 1$, получим равенство

$$\operatorname{ddet}^\circ(R_{n-1,1}) = \operatorname{ddet}^\circ \left(R_{n-1,1} \begin{pmatrix} n-1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \operatorname{ddet}^\circ(R_{n-2,1}),$$

которое вместе с (5.4) даст равенство

$$\Diamond 1_n^\circ = \operatorname{ddet}^\circ \left(R_{n1} \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \operatorname{ddet}^\circ \left(R_{n-1,1} \begin{pmatrix} n-1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \operatorname{ddet}^\circ(R_{n-2,1}).$$

Продолжая процесс аналогичных вычислений, получим равенство

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{i=0}^n \operatorname{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad (5.5)$$

в котором $\operatorname{ddet}^\circ \left(R_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 1$.

Так как в верхнем F -параопределителе $\text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ соответственные элементы i -го и $(i - 1)$ -го столбцов одинаковые, то, применяя к нему равенство (4.11) при $j = i - 1$, получим равенство

$$\text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} i-1 & i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, мы приходим к аналогичной ситуации, так как в F -параопределителе, лежащем в правой части последнего равенства, соответственные элементы $(i - 1)$ -го и $(i - 2)$ -го столбцов равны. Продолжая процесс аналогичных вычислений, мы придем к равенству

$$\text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} \right),$$

которое вместе с (5.5) даст равенство

$$\diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^n \text{ddet}^\circ \left(R_{j1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \right), \quad (5.6)$$

т.е. равенство (5.2) при $k = 1$. Обозначим $(n - j + 1)^{\overline{r-1}} / (r - 1)!$ через $k_j(r)$, а

$$\text{ddet}^\circ \left(R_{j1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j \\ -r & \cdots & -r \end{pmatrix} \right)$$

– через $R_j(r)$, тогда равенство (5.2) переписется в виде

$$\diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^n k_j(r) R_j(r). \quad (5.7)$$

Пусть равенство (5.7) выполняется при $k = r$. Докажем его справедливость при $k = r + 1$.

Так как F -параопределители

$$\text{ddet}^\circ \left(R_{j1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j \\ -r & \cdots & -r \end{pmatrix} \right), \quad j = 0, \dots, n,$$

являются F -параопределителями типа $\diamond 1_n^\circ$, то к каждому из них применимо равенство (5.6). При этом получим

$$\text{ddet}^\circ \left(R_{j1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j \\ -r & \cdots & -r \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=0}^j \text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i \\ -(r+1) & \cdots & -(r+1) \end{pmatrix} \right),$$

или

$$\text{ddet}^\circ (R_j(r)) = \sum_{i=0}^j \text{ddet}^\circ (R_i(r+1)). \quad (5.8)$$

Подставив (5.8) в (5.7), получим

$$\diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^n k_j(r) \sum_{i=0}^j \text{ddet}^\circ(R_i(r+1)) = \sum_{i=0}^n \text{ddet}^\circ(R_i(r+1)) \cdot \sum_{j=0}^i k_j(r),$$

т.е.

$$k_i(r+1) = \sum_{j=1}^i k_j(r). \quad (5.9)$$

Следовательно, для того чтобы доказать справедливость равенства (5.2) при $k = r + 1$, необходимо доказать, что коэффициенты

$$k_j(r) = \frac{(n-j+1)^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}$$

удовлетворяют равенству (5.9), которое, очевидно, совпадает с равенством (4.9) из утверждения 4.4. Утверждение 5.1 доказано.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры треугольных матриц и их F -параопределителей, при помощи которых можно получить двойственные тождества.

Если, например, элементы матрицы (1.1) имеют вид $a_{ij} = a$, то легко доказать равенства

$$\diamond^\circ = \left\langle \begin{array}{ccccccc} a & & & & & & \\ a & a & & & & & \\ & \dots & \dots & & & & \\ a & a & \dots & a & & & \end{array} \right\rangle_n^\circ = \frac{a^{\overline{n}}}{n!}, \quad (5.10)$$

$$\diamond_\circ = \left\langle \begin{array}{ccccccc} a & & & & & & \\ a & a & & & & & \\ & \dots & \dots & & & & \\ a & a & \dots & a & & & \end{array} \right\rangle_{\circ n} = \frac{a^{\bar{n}}}{n!}, \quad (5.11)$$

которые являются двойственными равенствами.

После разложения F -параопределителей (5.10), (5.11) по элементам n -й строки получим соответственно равенства

$$\begin{aligned} \diamond_n^\circ &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s+n} \frac{a^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!} \diamond_{s-1}^\circ, \\ \diamond_{n\circ} &= \sum_{s=1}^n (-1)^{s+n} \frac{a^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!} \diamond_{s-1\circ}, \end{aligned}$$

которые с учетом (5.10), (5.11) дадут соответственно тождества

$$\frac{a^{\overline{n}}}{n!} = \sum_{s=1}^n (-1)^{s+n} \frac{a^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!} \cdot \frac{a^{\overline{s-1}}}{(s-1)!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{a^{\overline{n-i}}}{(n-i)!} \cdot \frac{a^{\overline{i}}}{i!}, \quad (5.12)$$

$$\frac{a^{\bar{n}}}{n!} = \sum_{s=1}^n (-1)^{s+n} \frac{a^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!} \cdot \frac{a^{\overline{s-1}}}{(s-1)!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{a^{\overline{n-i}}}{(n-i)!} \cdot \frac{a^{\bar{i}}}{i!}. \quad (5.13)$$

Если же в тождествах (5.12), (5.13) положить соответственно $a = 0, 1, \dots, n-1$ и $a = 0, -1, \dots, -(n-1)$, то они переписутся в виде

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i+1} \frac{a^{\overline{n-i}} \cdot a^{\underline{i}}}{(n-i)! i!} = 0, \quad \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i+1} \frac{a^{\overline{n-i}} \cdot a^{\bar{i}}}{(n-i)! i!} = 0.$$

Следует отметить, что каждому F -параопределителю, значение которого известно, соответствуют некоторые комбинаторные тождества, которые можно получить, разлагая их по элементам первого столбца или по элементам последней строчки. При этом верхние и нижние F -параопределители генерируют двойственные тождества.

Приведем еще одну пару двойственных комбинаторных тождеств с возрастающими и убывающими факториальными степенями:

$$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 2 \\ \dots \dots \dots \\ n \quad n \quad \dots \quad n \end{array} \right\rangle_n^{\circ} = (-1)^{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{n^{\bar{i}}}{i!},$$

$$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 2 \\ \dots \dots \dots \\ n \quad n \quad \dots \quad n \end{array} \right\rangle_{n^{\circ}} = 1 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{n^{\underline{i}}}{i!}.$$

Пусть задан верхний F -параопределитель

$$\diamond_n^{\circ} = \left\langle \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 2 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right\rangle_n^{\circ}. \quad (5.14)$$

Разложим его по элементам последней строчки, получим рекуррентную формулу

$$\diamond_n^{\circ} = 2 \cdot \diamond_{n-1}^{\circ} - \diamond_{n-2}^{\circ} \quad (5.15)$$

с начальными условиями $\diamond_1^{\circ} = 2, \diamond_2^{\circ} = 3$.

При помощи формулы (5.15) легко найти значение верхнего F -параопределителя (5.14) и, следовательно, получить тождество

$$\diamond_n^{\circ} = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \frac{(i+1)^{\overline{n-2i}}}{(n-2i)!} \cdot 2^{n-2i} = n+1. \quad (5.16)$$

6. Траектории на диаграммах Ферре и косых диаграммах. В этом пункте мы проиллюстрируем применение верхних F -параопределителей к нахождению числа кратчайших путей на диаграммах Ферре и косых диаграммах.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ – некоторое неупорядоченное разбиение натурального числа n . Разбиение $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ называется *подразбиением* разбиения λ (обозначается $\mu \leq \lambda$), если выполняются неравенства $\mu_i \leq \lambda_i, i = 1, \dots, r$. Любой паре таких разбиений соответствует некоторая косая диаграмма (см. [3, с. 12–15])

$$\text{diagr}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}.$$

Если, например, $\lambda = (5, 3, 2, 2)$, $\mu = (2, 1, 1)$, то соответствующая диаграмма

$$\text{diagr}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 5, 3, 2, 2 \\ 2, 1, 1, 0 \end{pmatrix}$$

имеет вид, указанный на рис. 1.

Рис. 1

Линию, которая ограничивает косую диаграмму снизу (сверху), называют ее *нижними* (*верхними*) *ступеньками*. На рис. 1 нижние ступеньки диаграммы выделены жирной линией. Под *расстоянием* между двумя точками диаграммы будем понимать кратчайшее расстояние между этими точками. *Путем* на косой диаграмме между крайней юго-восточной точкой A и крайней северо-западной точкой B назовем кратчайший путь между этими точками. При этом будем двигаться только в двух направлениях $\uparrow$ и $\leftarrow$, т.е. будем рассматривать движения $\text{mot}(\uparrow, \leftarrow)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Число кратчайших траекторий между точками A и B на косой диаграмме

$$\text{diagr}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \\ \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0 \end{pmatrix}$$

равно

$$L(\lambda/\mu) = L \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \\ \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0 \end{pmatrix} = \text{ddet}^\circ(a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}, \quad (6.1)$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i - \mu_j + j - i + 1, & \text{если } \lambda_i - \mu_j + j - i + 1 \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_i - \mu_j + j - i + 1 < 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что число кратчайших путей на диаграмме на рис. 2 равно $k + 1$, где k – число клеток этой диаграммы.

Верхний F -параопределитель из теоремы 6.1, соответствующий этой диаграмме, имеет вид

$$\left\langle \begin{array}{ccccccc} & 2 & & & & & \\ & 1 & 2 & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 2 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & & \end{array} \right\rangle_k,$$

так как $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 1$; $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$. Поэтому его значение согласно (5.16) равно $k + 1$.

Рассмотрим общую косую диаграмму

$$\text{diagr}(\lambda, \mu) = \left(\begin{array}{c} \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \\ \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, 0 \end{array} \right).$$

Рис. 3

На рис. 3 изображено $n - j + 1$ клеток нижнего ряда этой диаграммы и k клеток верхнего ее ряда. Очевидно, что число всех кратчайших путей от точки A к точке B на этой диаграмме равно сумме $n - j + 2$ чисел $L(j - 1), \dots, L(n)$, которые соответственно равны числам кратчайших путей, проходящих через левую вертикальную сторону j -й клетки и каждую правую вертикальную сторону i -й, $i = j, \dots, n$, клетки нижнего ряда диаграммы. На рис. 3 эти стороны выделены жирными линиями. Но число $L(i)$, $i = j - 1, \dots, n$, равно аналогичному числу кратчайших путей диаграммы, которая получается из диаграммы $\text{diagr}(\lambda, \mu)$ в результате отбрасывания всех клеток нижнего

ряда и всех клеток этой диаграммы, лежащих правее i -го столбца. Следовательно, выполняется рекурсия

$$L \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \\ \mu_1, \dots, \mu_{j-1}, 0, \quad 0, \quad \dots, 0 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_{j-1} - 1 \\ \mu_1 - 1, \dots, \mu_{j-1} - 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=j}^n L \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_{j-1} - 1, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_i - 1 \\ \mu_1 - 1, \dots, \mu_{j-1} - 1, \quad 0, \quad \dots, 0 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где

$$L(i) = L \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_{j-1} - 1, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_i - 1 \\ \mu_1 - 1, \dots, \mu_{j-1} - 1, \quad 0, \quad \dots, 0 \end{pmatrix},$$

$$L(j-1) = L \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_{j-1} - 1 \\ \mu_1 - 1, \dots, \mu_{j-1} - 1 \end{pmatrix}, \quad i = j, \dots, n.$$

Таким образом, при помощи рекурсии (6.3) нахождение числа кратчайших путей после конечного числа шагов приводит к вычислению кратчайших путей на диаграммах вида рис. 2.

Докажем, что верхний F -параопределитель (6.1) при условии (6.2) удовлетворяет рекурсии (6.3). С этой целью для косых диаграмм

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_{j-1} - 1 \\ \mu_1 - 1, \dots, \mu_{j-1} - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_{j-1} - 1, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_i - 1 \\ \mu_1 - 1, \dots, \mu_{j-1} - 1, \quad 0, \quad \dots, 0 \end{pmatrix}$$

из равенства (6.3) построим при помощи (6.2) соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \mu_1 + 1 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_{j-1} - \mu_1 - j + 3 \quad \dots \quad \lambda_{j-1} - \mu_{j-1} + 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \mu_1 + 1 \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_{j-1} - \mu_1 - j + 3 \quad \dots \quad \lambda_{j-1} - \mu_{j-1} + 1 \\ \lambda_j - \mu_1 - j + 2 \quad \dots \quad \lambda_j - \mu_{j-1} \quad \lambda_j \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_i - \mu_1 - i + 2 \quad \dots \quad \lambda_i - \mu_{j-1} - i + j \quad \lambda_i - i + j \quad \dots \quad \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Этим матрицам соответствуют верхние F -параопределители вида

$$\text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) \quad \text{и} \quad \text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} j & \dots & i \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \right), \quad j \leq i \leq n.$$

Следовательно, нам необходимо доказать, что верхний F -параопределитель из теоремы 6.1 удовлетворяет равенству

$$\text{ddet}^\circ(a_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} = \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}) + \sum_{i=j}^n \text{ddet}^\circ \left(R_{i1} \begin{pmatrix} j & \dots & i \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \right). \quad (6.4)$$

Прежде всего отметим, что F -параопределитель, в левой части равенства (6.4), матрицу которого обозначим через A , является F -параопределителем смешанного типа, т.е. его часть с j -го по n -й столбец имеет вид верхнего F -параопределителя $\diamond 1_{n-j+1}^\circ$. Для лучшей наглядности отделим его вертикальной чертой. Следовательно, по утверждению 4.5 имеем равенство (4.11), из которого в силу того, что

$$\text{ddet}^\circ(R_{n,s+1}) - \text{ddet}^\circ(R_{n;s+1 \mapsto s}) = 1, \quad s = j, \dots, n-1,$$

следует равенство

$$\text{ddet}^\circ(A) = \text{ddet}^\circ\left(A \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \text{ddet}^\circ(R_{s-1,1}), \quad (6.5)$$

аналогичное равенству (5.4). Равенства (6.5) для $\text{ddet}^\circ(R_{s-1,1})$ при $s = j+1, \dots, n$ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \text{ddet}^\circ(R_{j1}) &= \text{ddet}^\circ\left(R_{j1} \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}), \\ \text{ddet}^\circ(R_{j+1,1}) &= \text{ddet}^\circ\left(R_{j+1,1} \begin{pmatrix} j+1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \text{ddet}^\circ(R_{j,1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \text{ddet}^\circ(R_{n1}) &= \text{ddet}^\circ\left(R_{n1} \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \text{ddet}^\circ(R_{n-1,1}). \end{aligned}$$

Складывая их, получим равенство

$$\text{ddet}^\circ(A) = \sum_{i=j}^n \text{ddet}^\circ\left(R_{i1} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right) + \text{ddet}^\circ(R_{j-1,1}). \quad (6.6)$$

Но, так как

$$\text{ddet}^\circ\left(R_{n,s+1} \begin{pmatrix} s+1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) - \text{ddet}^\circ(R_{n;s+1 \mapsto s}) = 0 \quad \text{при } s = j, \dots, n,$$

то в силу равенства (4.11) получим равенство

$$\text{ddet}^\circ\left(R_{i1} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \text{ddet}^\circ\left(R_{i1} \begin{pmatrix} j & \dots & i \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Таким образом, равенство (6.6) примет вид равенства (6.4), что доказывает теорему.

Так как вычеркивание клеток нижнего ряда косой диаграммы изменяет только элементы матрицы, лежащие по правую сторону от вертикальной черточки, которая разделяет матрицу смешанного вида, причем элементы угла R_{nj} вследствие неравенств $\lambda_i > 0$, $1 \leq j \leq i \leq n$, и равенства (6.2) положительны, то отрицательные элементы в матрице (6.1) можно заменить нулями.

Рис. 4

ПРИМЕЧАНИЕ 6.1. Следует отметить тот очевидный факт, что при симметрии диаграммы относительно биссектрисы первого квадранта, т.е. при переходе к сопряженной диаграмме (см. [3, с. 15]), число кратчайших путей не меняется. Поэтому вместо диаграммы, изображенной на рис. 2, можно рассматривать диаграмму, состоящую из k клеток в одном столбце.

При этом имеем $\lambda_1 = k$, $\mu_1 = 0$ и соответствующий ей F -параопределитель будет иметь вид $\langle k+1 \rangle_1^\circ$. Следовательно, порядок F -параопределителя типа $\diamond 1$ иногда можно уменьшить, переходя к сопряженной диаграмме.

ПРИМЕЧАНИЕ 6.2. При $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$ матрица смешанного типа переходит в матрицу типа $\diamond 1_n^\circ$, а косая диаграмма перейдет в диаграмму Ферре (см. [4, с. 21], рис. 4).

ПРИМЕЧАНИЕ 6.3. При помощи диаграмм Ферре (рис. 4) можно получить новые интересные рекурсии для верхних F -параопределителей типа $\diamond 1_n^\circ$, а при помощи последних – новые комбинаторные тождества. Например, очевидно, что число всех кратчайших путей на диаграмме Ферре между точками A и B равно сумме всех кратчайших путей, проходящих через выделенные на рис. 4 отрезки $A_i C_i$, $i = 0, \dots, \lambda_n$. Следовательно, выполняется рекурсия

$$L \begin{pmatrix} \lambda_1, & \dots, & \lambda_n \\ 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\lambda_n} L \begin{pmatrix} \lambda_1 - i, & \dots, & \lambda_{n-1} - i \\ 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix},$$

которая в терминах верхнего F -параопределителя имеет вид

$$\diamond 1_n^\circ = \sum_{i=0}^{\lambda_n} \text{ddet}^\circ \left(R_{n-1,1} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 \\ -i & \dots & -i \end{pmatrix} \right).$$

Пусть, например, диаграмма Ферре имеет вид прямоугольника, т.е. $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = k$; тогда верхний F -параопределитель, который равен числу кратчайших путей на этой диаграмме является F -параопределителем типа $\diamond 1$ и имеет вид

$$\diamond 1_n^\circ = \left\langle \begin{array}{cccc} k+1 & & & \\ k & & k+1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k-n+2 & k-n+3 & \dots & k+1 \end{array} \right\rangle. \quad (6.7)$$

Применяя к F -параопределителю (6.7) утверждение 5.1 и учитывая, что

$$\text{ddet}^\circ \left(R_{j1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j \\ -k & \cdots & -k \end{pmatrix} \right) = 1 \quad \text{при } j = 0, \dots, n,$$

получим равенство

$$\diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^n \frac{(j+1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!} \stackrel{(4.9)}{=} \frac{[n+1]^k}{k!} = \frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

7. Об одном частично упорядоченном множестве. В этом пункте устанавливается взаимно однозначное соответствие между подразбиениями μ разбиения λ и кратчайшими путями на диаграмме $\text{diagr}(\lambda, \mu)$. Таким образом, поскольку задача о кратчайших путях на косых диаграммах решена, решается задача установления мощности частично упорядоченного множества всех подразбиений некоторого разбиения.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ – некоторое неупорядоченное разбиение натурального числа n , $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$. Множество $(R(\lambda), \leq)$ всех подразбиений разбиения λ с введенным на нем отношением порядка “ $\leq$ ” назовем *частично упорядоченным множеством (ч.у.м.) подразбиений* разбиения λ .

Элементы $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ одного уровня в диаграмме Хассе ч.у.м. $(R(\lambda), \leq)$ являются всеми возможными неупорядоченными разбиениями натурального числа m , $0 \leq m \leq n$, которые удовлетворяют условиям $\mu_i \leq \lambda_i$, $i = 1, \dots, r$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Мощность ч.у.м. $(R(\lambda), \leq)$ равна числу всех кратчайших путей на графе Ферре разбиения λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому подразбиению μ разбиения λ соответствует единственный кратчайший путь на графе Ферре разбиения λ , который совпадает с верхними ступеньками графа Ферре разбиения μ , и наоборот. Теорема доказана.

Пусть $R(\mu, \lambda)$ – множество всех разбиений $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$, компоненты которых удовлетворяют неравенствам

$$\nu_1 \geq \dots \geq \nu_r, \quad \mu_i \leq \nu_i \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Тогда, аналогично теореме 7.1, можно утверждать, что мощность множества $R(\mu, \lambda)$ равна числу кратчайших путей на диаграмме $\text{diagr}(\lambda, \mu)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Заторский Р. А. Паравизначники та парAPERманенти трикутних матриць // Матем. студії. 2002. Т. 17. № 1. С. 45–54.
- [2] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
- [3] Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1984.
- [4] Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982.