Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Ефимов, Структурные свойства в классах голоморфных функций в полуплоскости, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 661–666

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:22:47

Структурные свойства в классах голоморфных функций в полуплоскости

Д. А. Ефимов

Доказываются различные структурные свойства для классов голоморфных функций, определяемых посредством максимальных функций, в полуплоскости, такие, как теорема Рисса о предельном переходе и факторизационная теорема.

Библиография: 6 названий.

В верхней полуплоскости $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ изучались пространства $H^p(D)$, $p > 0$, всех голоморфных в D функций f , для которых

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dx < +\infty$$

(см. [1]); пространства $N^q(D)$, $q > 0$, всех голоморфных в D функций f , для которых

$$\|f\|_{N^q} = \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + |f(x + iy)|) dx < +\infty \quad (1)$$

(см. [2] для случая $q = 1$).

Рассмотрим классы $M^q(D)$, $q > 0$, как множества всех голоморфных в D функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_q = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf(x)) dx < +\infty, \quad (2)$$

где $Mf(x) = \sup_{y>0} |f(x + iy)|$ — вертикальная максимальная функция (см. [3] для $q = 1$). Из определений классов следуют вложения

$$\bigcup_{0 < p \leq 1} H^p(D) \subset N(D) \subset N_+(D),$$

в которых $N_+(D)$ обозначает класс Крылова голоморфных в D функций f , определяемый условием (1) с $q = 1$ и заменой $\ln(1 + |f(x + iy)|)$ на $\ln^+ |f(x + iy)|$, где $\ln^+ a = \max(\ln a, 0)$, $a > 0$, и $\ln^+ 0 = 0$. Кроме того, на основании известной теоремы о том, что голоморфная в D функция f принадлежит $H^p(D)$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда $Mf \in L^p(\mathbb{R})$ (см. [1; теорема гл. VIII § С п. 2]), с учетом элементарного неравенства $\ln^q(1 + t) \leq (q/p)t^p$, $t \geq 0$, $p \leq q$, справедливо также вложение

$$\bigcup_{0 < p \leq q} H^p(D) \subset M^q(D).$$

При различных значениях $q > 0$ пространства $M^q(D)$ не связаны никакими включениями. Действительно, для функции $f_1(z) = \exp(z^{-\alpha})/z^{2/q_1}$, $0 < q_1 < 1/\alpha < q_2$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf_1(x)) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q\left(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \ln^q\left(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}}\right) dx + \int_{-1}^1 \ln^q\left(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}}\right) dx \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \ln^q\left(1 + \frac{\exp(|x|^{-\alpha})}{|x|^{2/q_1}}\right) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Интегралы I_1 и I_3 сходятся для любых $q \geq q_1$, поскольку их подынтегральные функции эквивалентны $1/|x|^{(2q/q_1)}$ при $|x| \rightarrow +\infty$. В силу неравенства $\ln(1+t) \leq \ln 2 + \ln^+ t$ для интеграла I_2 справедлива оценка

$$\int_{-1}^1 \left(|x|^{-\alpha} - \frac{2}{q_1} \ln|x|\right)^q dx \leq I_2 \leq \int_{-1}^1 \left(\ln 2 + |x|^{-\alpha} - \frac{2}{q_1} \ln|x|\right)^q dx,$$

в которой сходимости интегралов в правой и левой частях полностью зависят от сходимости интеграла для $|x|^{-\alpha q}$. Последний сходится при $q = q_1$ и расходится при $q = q_2$; следовательно, f_1 принадлежит классу $M^{q_1}(D)$ и не принадлежит классу $M^{q_2}(D)$.

С другой стороны, для функции $f_2(z) = z^{-\alpha}$, $0 < q_1 < 1/\alpha < q_2$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + Mf_2(x)) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha}) dx + \int_{-1}^1 \ln^q(1 + |x|^{-\alpha}) dx \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \ln^q(1 + |x|^{-\alpha}) dx \\ &= I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

Интеграл I_5 сходится для всех $q > 0$, а подынтегральные функции интегралов I_4 и I_6 эквивалентны $|x|^{-\alpha q}$ при $|x| \rightarrow \infty$, поэтому f_2 принадлежит классу $M^{q_2}(D)$ и не принадлежит классу $M^{q_1}(D)$.

Значение предела $\lim_{y \rightarrow 0+} f(x + iy) = f^+(x)$ назовем *вертикальным граничным пределом* функции f в точке $x \in \mathbb{R}$. Наряду с функцией $Mf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующие виды максимальных функций:

- угловую максимальную функцию

$$M_\alpha f(x) = \sup_{z \in D_\alpha(x)} |f(z)|, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $D_\alpha(x)$ обозначает угол $\{z = \xi + i\eta \in D \mid |\xi - x| < \alpha\eta\}$;

- горизонтальную максимальную функцию Харди–Литтлвуда

$$g^M(x) = \sup_{I \ni \{x\}} \frac{1}{|I|} \int_I |g(t)| dt,$$

где I – интервал на $\mathbb{R}$, $|I|$ – длина интервала I и $g(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Прямой аналог результата, доказанного в [4; гл. III, теорема 3.6] для гармонических функций, служит следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если $q > 0$ и $u(z) \geq 0$ субгармонична в D , то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (M_\alpha u(x))^q dx \leq E_q \int_{-\infty}^{+\infty} (Mu(x))^q dx,$$

с константой E_q , зависящей только от q и α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, выберем p , $0 < p < q$, и рассмотрим случай $\alpha = 1$. Пусть $z = x + iy \in D_1(t) = \{|x - t| < y\}$. Функция u субгармонична в $\Delta(z, y/2)$ – круге с центром в z и радиусом $y/2$. Применяя неравенство Харди–Литтлвуда, доказанное в [4; лемма 3.7] для гармонических функций и верное с тем же доказательством для субгармонических функций, получим с учетом неравенства $|x - t| < y$ оценку

$$\begin{aligned} |u(z)|^p &\leq \frac{4B_p}{\pi y^2} \iint_{\Delta(z, y/2)} |u(\xi + i\eta)|^p d\xi d\eta \\ &\leq \frac{C_p}{y} \int_{|\xi - x| < y/2} (Mu(\xi))^p d\xi \leq \frac{C_p}{y} \int_{|\xi - t| < 3y/2} (Mu(\xi))^p d\xi, \end{aligned}$$

в которой правая часть не превосходит $(3C_p)g^M(t)$, где $g(\xi) = (Mu(\xi))^p$. Таким образом, доказано, что

$$(M_1(t))^q \leq D_p (g^M(t))^{q/p}.$$

Согласно максимальной теореме Харди–Литтлвуда [4; гл. I, теорема 4.3] и с учетом того, что $q/p > 1$ и $g \in L^{q/p}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (M_1 u(t))^q dt \leq D_q \int_{-\infty}^{+\infty} |g^M(t)|^{q/p} dt \leq E_q \int_{-\infty}^{+\infty} (Mu(t))^q dt.$$

В случае $\alpha \neq 1$ получим аналогичные оценки с константами, зависящими также от α . Теорема доказана.

На основании теоремы 1 заключаем, в частности, что в определении классов $M^q(D)$ условие (1) равносильно условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + M_\alpha f(x)) dx < +\infty. \quad (3)$$

Из приведенного доказательства следует также, что каждая функция $f(z)$ классов $M^q(D)$, $q > 0$, ограничена почти во всех углах с вершинами на действительной оси, биссектрисами, перпендикулярными ей и раствора $2 \arctg \alpha$ для каждого $\alpha > 0$. Поэтому согласно теореме Привалова [5] каждая функция $f \in M^q(D)$, $q > 0$, имеет некасательные граничные пределы почти во всех точках прямой $\mathbb{R}$; в частности, она имеет $f^+(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

Таким образом, для любой функции $f \in M^q(D)$, $q > 0$, конечные $f^+(x)$ существуют для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Следующий результат служит аналогом для классов $M^q(D)$, $q > 0$, известной теоремы Рисса о предельном переходе под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой функции $f \in M^q(D)$, $q > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + M(f_h - f)(x)) dx = 0, \quad (4)$$

где $f_h(z) = f(z + ih)$, $h > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценивая подынтегральную функцию в (4) в виде

$$\ln^q(1 + M(f_h - f)(x)) \leq \ln^q(1 + 2Mf(x)) \leq 2^q \ln^q(1 + Mf(x)),$$

по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^q(1 + \sup_{y>0} |f_h(z) - f(z)|) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0+} \ln^q(1 + \sup_{y>0} |f_h(z) - f(z)|) dx.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле равна нулю почти всюду на $\mathbb{R}$, поскольку любая $f \in M^q(D)$, $q > 0$, обладает конечными вертикальными пределами.

ТЕОРЕМА 3. Для $q > 1$ множество $M^q(D)$ совпадает с множеством $N^q(D)$.

В доказательстве теоремы 3 существенно используется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Всякая субгармоническая функция $v(z) \geq 0$, определенная в D и удовлетворяющая условию

$$\|v\|_{H^q} = \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} v^q(z) dx < +\infty, \quad z = x + iy,$$

для $q > 1$, имеет в D гармоническую мажоранту $u(z)$ в виде

$$u(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x - t)v(t)dt, \quad (5)$$

где $P_y(x - t) = y/(y^2 + (x - t)^2)$ – ядро Пуассона в D и $v(t) \in L^q(\mathbb{R})$, при этом $\|v(t)\|_{L^q} \leq \|v(z)\|_{H^q}^{1/q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По известной теореме для субгармонических функций (см. [4; гл. 1, теорема 6.8]) функция $v(z)$ имеет гармоническую мажоранту вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x - t) d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ – некоторая конечная мера на $\mathbb{R}$. Более того, из доказательства этой теоремы следует, что любая ограниченная субгармоническая функция в полуплоскости $y > y_0$ для некоторого $y_0 > 0$ обладает гармонической мажорантой, представимой в виде

$$u_{y_0}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{y-y_0}(x - t)v(t, y_0) dt.$$

По теореме Банаха–Алаоглу замкнутый единичный шар пространства, сопряженного к банахову пространству, компактен в слабой топологии. В нашем случае

семейство функций $v(t, y_0)$ ограничено в $L^q(\mathbb{R})$ величиной $\|v\|_{H^q}^{1/q}$; пространством, сопряженным к $L^q(\mathbb{R})$, является пространство $L^{q'}(\mathbb{R})$, где $q' = q/(q-1)$, $q > 1$ (см. [6; п. 102, гл. 4]), и ядра Пуассона $P_{y-y_0}(x-t) \rightarrow P_y(x-t)$, $y_0 \rightarrow 0+$, в пространстве $L^{q'}(\mathbb{R})$. Поэтому по теореме Банаха–Алаоглу семейство $v(t, y_0)$ имеет слабый частичный предел $v(t) \in L^q(\mathbb{R})$ при $y_0 \rightarrow 0+$, $\|v(t)\|_{L^q} \leq \|v(z)\|_{H^q}^{1/q}$, так что

$$u_{y_0}(z) \rightarrow u(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x-t)v(t) dt, \quad y \rightarrow 0+.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Отметим, что вложение $M^q(D) \subset N^q(D)$ следует из неравенства $\ln^q(1 + |f(x + iy)|) < \ln^q(1 + Mf(x))$ и определений (1) и (2). Пусть теперь справедливо (1). Применяя лемму 1 к субгармонической функции $v(z) = \ln(1 + |f(x + iy)|)$, заключаем, что $v(z)$ имеет гармоническую мажоранту $u(z)$ вида (5) с функцией $v(t) \in L^q(\mathbb{R})$ и $\|v\|_{L^q} \leq \|f\|_{N^q}^{1/q}$. По лемме из [4; гл. VIII, п. С] для гармонической мажоранты $u(z)$ функции $v(z)$ справедливо неравенство

$$|u(z)| \leq \left(\frac{|x|}{y} + 2 \right) v^M(0).$$

Используя далее теорему Харди–Литтлвуда [4; гл. I, теорема 4.3] о сравнении норм интегрируемых функций с нормами их горизонтальных максимальных функций, получим цепочку неравенств:

$$\|M_\alpha v\|_{L^q} \leq \|M_\alpha u\|_{L^q} \leq (2 + \alpha) \|v^M\|_{L^q} \leq (2 + \alpha) A_q \|v\|_{L^q} \leq (2 + \alpha) A_q \|f\|_{N^q}^{1/q} < +\infty$$

с некоторой конечной постоянной $A_q > 0$, что заканчивает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $q > 1$. Тогда любая функция $f \in M^q(D)$ представляется в виде произведения двух функций

$$f(z) = b_f(z)F(z),$$

где $b_f(z)$ – произведение Бляшке для функции $f(z)$:

$$b_f(z) = \prod_{(\nu)} \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu - i|}{z_\nu - i} \cdot \frac{|z_\nu + i|}{z_\nu + i},$$

по последовательности (z_ν) нулей функции $f(z)$ в D , удовлетворяющей условию

$$\sum_{(\nu)} \frac{y_\nu}{1 + x_\nu^2 + y_\nu^2} < +\infty, \quad z_\nu = x_\nu + iy_\nu, \quad y_\nu > 0,$$

сходимости $b_f(z)$, а функция $F(z) \in M^q(D)$ и $F(z) \neq 0$, $z \in D$. И обратно, если функция f представляется в указанном виде, то она принадлежит классу $M^q(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $f(z) \in M^q(D)$ в виде $f(z) = b_f(z)F(z)$, где $F(z)$ голоморфна и не имеет нулей в D , и докажем, что функция $F(z) \in M^q(D)$. Рассмотрим конечные произведения Бляшке

$$b_n(z) = \prod_1^n \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{|z_\nu - i|}{z_\nu - i} \cdot \frac{|z_\nu + i|}{z_\nu + i},$$

в которых нули $z_1, z_2, \dots, z_m, \dots$ функции $f(z)$ перенумерованы с учетом кратности в порядке возрастания модуля. Обозначим $F_n(z) = f(z)/b_n(z)$, так что последовательность $\{F_n(z)\}$ равномерно сходится к $F(z)$ на компактах из D . Так как $|b_f(z)| \leq 1$ для $z = x + iy$, $y > 0$, и $|b_f(x)| = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и для каждого n найдем такое $h_{n,\varepsilon} < 1$, что $|b_n(x + ih)| > 1 - \varepsilon$ при $h < h_{n,\varepsilon}$ или, что то же самое, $|F_n(x + ih)| < |f(x + ih)|/(1 - \varepsilon)$. Таким образом,

$$\ln^q(1 + |F_n(x + ih)|) \leq \ln^q\left(1 + \frac{1}{1 - \varepsilon}|f(x + ih)|\right) \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)^q \ln^q(1 + |f(x + ih)|).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном n , получим неравенство

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F_n(x + ih)|) dx \leq \lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |f(x + ih)|) dx,$$

верное при всех натуральных n . Замечая, что интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F_n(x + ih)|) dx$ возрастают при уменьшении h , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F_n(x + ih)|) dx \leq \lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |f(x + ih)|) dx,$$

в котором левая часть определена для всех $h > 0$. В последнем неравенстве на основании леммы Фату переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |F(x + ih)|) dx \leq \lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^q(1 + |f(x + ih)|) dx. \quad (6)$$

Поскольку предел в правой части неравенства (6) существует, то $F \in M^q(D)$ по определению (1) и теореме 3.

Обратное утверждение следует непосредственно из ограниченности произведения Бляшке в D и определения классов $M^q(D)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p . С приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984.
- [2] N. Mochizuki, “Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane”, *Hokkaido Math. J.*, **20**:3 (1991), 609–620.
- [3] Л. М. Ганжула, “Об одной F -алгебре голоморфных функций в верхней полуплоскости”, *Math. Montisnigri*, **12** (2000), 33–45.
- [4] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [5] И. И. Привалов, “Обобщение теоремы Fatou”, *Матем. сб.*, **31** (1924), 232–235.
- [6] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 5, Физматлит, М., 1959.

Д. А. Ефимов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: DiEfimov@gmail.com

Поступило

01.11.2006