Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Есин, О предполных классах функций в P_3 относительно усиленного оператора замыкания, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 650–660

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:42:46

О предполных классах функций в P_3 относительно усиленного оператора замыкания

А. А. Есин

Классическая теорема Поста [1] описывает пять предполных классов в множестве булевых функций. В работе [2] было показано, что для функций 3-значной логики существует 18 предполных классов. В этих работах рассматривалось замыкание множества функций относительно оператора подстановки. В настоящей работе на том же множестве функций 3-значной логики рассматриваются два оператора замыкания, которые получаются добавлением к оператору подстановки замыкания относительно двух вариантов отождествления значений функций. В работе показано, что для первого оператора существуют 3, а для второго существует 5 предполных классов.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть P_k – множество функций k -значной логики и $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Будем рассматривать два оператора замыкания на множестве P_k , определяемые через отношения эквивалентности.

Через “ $\simeq$ ” обозначим отношение эквивалентности, полученное транзитивным замыканием следующих отношений:

- а) функция f получена из функции g перестановкой переменных;
- б) функция f получена из функции g добавлением несущественных переменных;
- в) для любого набора $\vec{x}$ справедливо либо $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, либо $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \{0, 1\}$.

Через “ $\sim$ ” обозначим отношение эквивалентности, полученное транзитивным замыканием отношений а), б) и в’), где

- в’) функции f и g имеют одинаковое число существенных переменных и выполнено условие в).

Для множества M функций из P_3 через $\mathcal{R}_1(M)$ (или $\mathcal{R}_2(M)$) будем обозначать результат замыкания множества M относительно операции подстановки и перехода от функции g к эквивалентной функции $f \simeq g$ (или $f \sim g$ соответственно).

Заметим, что оба отношения эквивалентности $\sim$ и $\simeq$ можно одинаково продолжить константы следующим образом: $0 \sim 1$ и $0 \simeq 2$. Функция $f = f(x_1, \dots, x_n) \in P_3$ сохраняет отношение $\sim$ (отношение $\simeq$), если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_3^n$, $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ из того, что $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, следует $f(\alpha) \sim f(\beta)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5351.2006.1).

Пусть $\mathcal{A}$ – оператор замыкания на подмножествах $M \subseteq P_k$. Множество $M \subseteq P_k$ называется $\mathcal{A}$ -полным, если $\mathcal{A}(M) = P_k$, и $\mathcal{A}$ -предполным, если $\mathcal{A}(M) = M$ (т.е. является $\mathcal{A}$ -замкнутым) и для любой функции $f \notin M$ выполняется $\mathcal{A}(f \cup M) = P_k$.

Очевидно, множество $M \subseteq P_k$ является $\mathcal{A}$ -полным тогда и только тогда, когда оно не лежит ни в одном из предполных классов оператора $\mathcal{A}$.

2. Предполные классы оператора замыкания $\mathcal{R}_1$.

ТЕОРЕМА 1. В P_3 существует ровно три $\mathcal{R}_1$ -предполных класса:

T_{01} – класс функций, сохраняющих множество $\{0, 1\}$;

T_2 – класс функций, сохраняющих двойку;

$T_{\simeq}$ – класс функций, сохраняющих отношение $\simeq$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [2] было доказано, что каждый из этих классов является предполным относительно оператора подстановки. При этом, непосредственной проверкой можно убедиться, что если функция f принадлежит одному из этих классов и $f \simeq g$, то и функция g принадлежит этому же классу. Следовательно, указанные классы являются предполными и относительно оператора $\mathcal{R}_1$.

Покажем теперь, что других $\mathcal{R}_1$ -предполных классов нет. Допустим, что существует некоторый предполный класс M , не совпадающий с указанными классами. Тогда найдутся такие функции $g_1, g_2, g_3 \in M$, что $g_1 \notin T_{01}$, $g_2 \notin T_2$ и $g_3 \notin T_{\simeq}$. Договоримся, для простоты, одноместную функцию, тождественно равную данному числу i , обозначать через ω_i , т.е. $\omega_i(x) = i$ при любых x .

Сначала покажем, что имеет место $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Обозначим через $h(x)$ результат подстановки x вместо всех аргументов функции $g_1 = g_1(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим 2 случая:

I. $h(x) \notin T_{\simeq}$;

II. $h(x) \in T_{\simeq}$.

Случай I разобьем на два следующих подслучая:

I.1. $h(x) \in T_2$, $h(x) \notin T_{\simeq}$,

I.2. $h(x) \notin T_2$, $h(x) \notin T_{\simeq}$.

Случай II также разобьем на два подслучая:

II.1. $h(x) \in T_{01}$, $h(x) \in T_{\simeq}$;

II.2. $h(x) \notin T_{01}$, $h(x) \in T_{\simeq}$.

Случай I.1. $h(x) \in T_2$, $h(x) \notin T_{\simeq}$. В силу того, что одно из чисел $h(0)$ и $h(1)$ равно 2, а другое не равно 2 выполнено $h(x) \notin T_{01}$. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай I.1a.
$$\begin{cases} h(0) \neq 2, \\ h(1) = h(2) = 2. \end{cases}$$

Если $h(0) = 1$, то имеем $h(h(x)) = \omega_2$; следовательно, $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$. Если $h(0) = 0$, то рассмотрим функцию $h'(x)$, которая отличается от функции h заменой значения в точке $x = 0$ на 1. Тогда имеем $h'(x) \simeq h(x)$ и $h'(h'(x)) = \omega_2$, т.е. опять имеем $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Случай I.1b.
$$\begin{cases} h(1) \neq 2, \\ h(0) = h(2) = 2. \end{cases}$$

Если $h(1) = 0$, то $h(h(x)) = \omega_2$. При $h(1) = 1$, как и в случае I.1, можем перейти к функции $h''(x)$, которая отличается от $h(x)$ заменой значений в точке $x = 1$ на 0. Тогда утверждение $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$ будет следовать из $h''(h''(x)) = \omega_2$. Таким образом, мы доказали, что $h(x) \notin T_{\simeq}$ и $h(x) \in T_2$ при условии $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Случай I.2. $h(x) \notin T_2$, $h(x) \notin T_{\sim}$. Сведем рассмотрение данного случая к уже рассмотренному случаю I.1. При $h(0) = 2$ переходим от функции $h(x)$ к функции $h'(x)$, которая отличается от функции $h(x)$ заменой значений в точках x_i таких, что $h(x_i) = 1$, на 0. При $h(1) = 2$ переходим к функции h' , полученной из функции h заменой значений в точках y_i , для которых справедливо $h(y_i) = 0$, на 1. В обоих случаях функция $h'(h'(x))$ удовлетворяет условиям случая I.1, справедливо $h' \in \mathcal{R}_1(h)$ и по вышедоказанному будем иметь $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Итак, мы доказали, что при $h(x) \notin T_{\sim}$ имеем $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Случай II.1. $h(x) \in T_{01}$, $h(x) \in T_{\sim}$. По определению функции g_1 существуют $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ такие, что $g_1(a_1, \dots, a_n) = 2$. Рассмотрим функции $h_1, h_2, \dots, h_n$ такие, что $h_1(x) \simeq h_2(x) \simeq \dots \simeq h_n(x) \simeq h(x)$ и справедливо $h_i(1) = 1$, $h_i(0) = a_i$ при $i = 1, \dots, n$. Тогда для функции

$$h'(x) = g_1(h_1(x), \dots, h_n(x))$$

выполнено $h' \in \mathcal{R}_1(M)$, $h'(0) = 2$ и $h'(1) \neq 2$.

Если $h'(2) = 2$, то функция h' удовлетворяет условиям случая I.1, а если $h'(2) \neq 2$, то условиям случая I.2. По вышедоказанному будем иметь $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(h')$. Мы доказали, что если $h(x) \in T_{\sim}$ и $h(x) \in T_{01}$, то $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Случай II.2. $h(x) \notin T_{01}$, $h(x) \in T_{\sim}$. Если $h(x) \in T_2$ то, очевидно, $h(x) = \omega_2$. Случай, когда $h(x) \notin T_2$ легко сводится к уже рассмотренному случаю. Действительно, в этом случае функция $h(h(x))$ будет удовлетворять условиям случая II.1, а значит, и в случае $h(x) \in T_{\sim}$ выполнено $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Итак, мы доказали, что $\omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Рассмотрим теперь функцию $g_2 = g_2(x_1, \dots, x_m) \in M \setminus T_2$. В силу того, что $g_2 \notin T_2$, выполнено одно из следующих равенств: либо $g_2(\omega_2(x), \dots, \omega_2(x)) = \omega_1$, либо $g_2(\omega_2(x), \dots, \omega_2(x)) = \omega_0$.

В силу того, что $\omega_0 \simeq \omega_1$, справедливо $\{\omega_0, \omega_1\} \subseteq \mathcal{R}_1(g_1, g_2)$.

Итак, из вышедоказанного имеем $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}_1(M)$.

Осталось рассмотреть функцию $g_3 = g_3(x_1, \dots, x_k) \in M \setminus T_{\sim}$. Заметим, что отношение $\sim$ можно тривиально обобщить на E_3 . Из $g_3 \notin T_{\sim}$ получаем, что существуют $a_1 \sim b_1, \dots, a_k \sim b_k$ такие, что $g_3(a_1, \dots, a_k) \not\sim g_3(b_1, \dots, b_k)$. Разобьем переменные функции g_3 на группы по следующему правилу: переменная $x_{k'}$ и $x_{k''}$ принадлежат одной группе, если $a_{k'} = a_{k''}$ и $b_{k'} = b_{k''}$. Отождествим переменные функции g_3 , попавшие в одну группу. Получим функцию g'_3 , для которой, с точностью до перестановки переменных, справедливо

$$g'_3(1, 0, 0, 1, 2) \approx g'_3(0, 1, 0, 1, 2).$$

Для любой функции h , выпускающей значение 2, справедливо $h \simeq \omega_0$. В частности, функция h_0 такая, что $h_0(1) = 0$, $h_0(0) = 1$, $h_0(2) = 0$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_1(\omega_0)$. Тогда функция

$$\tilde{h}(x) = g'_3(x, h_0(x), \omega_0(x), \omega_1(x), \omega_2(x))$$

принадлежит множеству $\mathcal{R}_1(M) \setminus T_{\sim}$.

Итак, с учетом вышедоказанного получаем $\{\omega_0, \tilde{h}\} \subseteq \mathcal{R}_1(M)$.

Покажем, что для произвольной функции $f = f(x_1, \dots, x_l) \in P_3$ выполнено $f \in \mathcal{R}_1(\{\omega_0, \tilde{h}\})$. В силу того, что $\tilde{h} \notin T_{\sim}$, получаем, что одно из чисел $\tilde{h}(0)$ и $\tilde{h}(1)$ равно 2, а другое не равно 2. Рассмотрим отдельно оба случая.

Пусть $\tilde{h}(1) = 2$. Рассмотрим функцию $f'(x_1, \dots, x_l)$ такую, что f' выпускает значение 2 и справедливо

$$f'_1(\alpha) = \begin{cases} 1, & f(\alpha) = 2, \\ 0, & f(\alpha) \neq 2. \end{cases}$$

Тогда для функции $f''(x_1, \dots, x_l) = \tilde{h}(f'_1(x_1, \dots, x_l))$ справедливо $f'' \simeq f$, а значит, с учетом того, что $f'' \in \mathcal{R}_1(M)$, имеем $f \in \mathcal{R}_1(M)$.

Аналогично, в случае $\tilde{h}(0) = 2$ рассмотрим функцию

$$f'_0(\alpha) = \begin{cases} 0, & f(\alpha) = 2, \\ 1, & f(\alpha) \neq 2. \end{cases}$$

В этом случае для $f''(x_1, \dots, x_l) = \tilde{h}(f'_0(x_1, \dots, x_l))$ будет также справедливо $f'' \simeq f$, а значит, с учетом того, что выполнено $f'' \in \mathcal{R}_1(M)$, и по определению класса эквивалентности $\mathcal{R}_1(M)$ имеем $f \in \mathcal{R}_1(M)$.

Итак, мы доказали, что для любой функции f справедливо $f \in \mathcal{R}_1(M)$, а значит, класс M – $\mathcal{R}_1$ -полный класс. Таким образом, предположение о существовании $\mathcal{R}_1$ -предполного класса, не совпадающего с классами $T_{01}, T_2, T_{\sim}$, неверно.

Теорема доказана.

3. Предполные классы оператора $\mathcal{R}_2$. Пусть $\alpha^n = (a_1, \dots, a_n)$. Обозначим через $O_2(\alpha^n)$ число компонент вектора α^n , равных 2. Для $f(\vec{x}) \in P_3$ через $O_2(f(\vec{x}))$ будем обозначать количество наборов, подаваемое на существенные переменные функции, на которых функция принимает значение 2.

Далее T_2, T_{01} те же, что и в п. 2, класс $T_{\sim}$ определяется аналогично классу $T_{\sim}$, т.е. как класс функций, сохраняющих отношение $\sim$; P_3^1 – множество унарных функций 3-значной логики.

Функция f , существенно зависящая от n переменных, принадлежит множеству ∇_2 тогда и только тогда, когда либо $f \in \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, либо для каждого α^n такого, что $\alpha^n \in E_3^n$ и $O_2(\alpha^n) > 0$, выполняется $f(\alpha^n) = 2$.

Обозначим через P_2^3 – множество функций трехзначной логики, не принимающих значение 2.

В работе [2] Яблонским показано, что в P_3 существует 18 предполных классов относительно оператора подстановки. Далее мы будем использовать следующие обозначения для этих классов.

- 1–3 $T_i = \{f \mid f(i, \dots, i) = i\}, i \in \{0, 1, 2\}$.
- 4–6 $M_i^3 = \{f \mid \vec{\alpha} \leq_i \vec{\beta} \Rightarrow f(\vec{\alpha}) \leq_i f(\vec{\beta})\}, i \in \{1, 2, 3\}$,
 - а) $\leq_0: 0 \leq_0 1 \leq_0 2$,
 - б) $\leq_1: 1 \leq_1 2 \leq_1 0$,
 - в) $\leq_2: 2 \leq_2 0 \leq_2 1$.
- 7–9 $T_A = \{f \mid \vec{\alpha} \in A^n \Rightarrow f(\alpha) \in A\}$,
 - а) $A = \{0, 1\}$,
 - б) $A = \{1, 2\}$,
 - в) $A = \{0, 2\}$.
- 10–12 Пусть множества A и B не пересекаются и $A \cup B = E_3$. Пусть $a, b \in E_3$; тогда на множестве E_3 можно ввести отношение R_A следующим образом: $aR_A b$, если либо $a, b \in A$, либо $a, b \in B$. Пусть $\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n), \vec{\beta} = (b_1, \dots, b_n)$;

тогда векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ находятся в отношении R_A , т.е. $\vec{\alpha}R_A\vec{\beta}$, если выполнено $a_iR_Ab_i$ для всех i таких, что $1 \leq i \leq n$;

$$T_{A,B} = \{f \mid \vec{\alpha}R_A\vec{\beta} \Rightarrow f(\vec{\alpha})R_Af(\vec{\beta})\},$$

а) $A = \{0, 1\}$, $B = 2$,

б) $A = \{1, 2\}$, $B = 0$,

в) $A = \{0, 2\}$, $B = 1$.

Заметим, что $T_{\sim} = T_{\{0,1\},2}$.

13–15 Пусть множества A и B не пересекаются и $A \cup B = E_3$. Пусть $c: E_3^n \rightarrow A$;

$$T_{B[1]} = \{f \mid \forall \vec{\alpha} \in A^n \forall \vec{\beta} \in E_3^n [\forall i b_i \neq a_i \Rightarrow \forall c f(\vec{\beta}) \neq c(\vec{\alpha})]\},$$

а) $A = \{0, 1\}$, $B = 2$,

б) $A = \{1, 2\}$, $B = 0$,

в) $A = \{0, 2\}$, $B = 1$.

16 Sl – множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной и функций, выпускающих хотя бы одно значение, т.е. мощность множества значений которых меньше трех.

17 $S_{x+1} = \{f \mid \sigma(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)), \sigma(x) = x + 1 \pmod{3}\}$.

18 $L = \{f \mid f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1} \pmod{3}, a_i \in E_3\}$.

Через $|X_f|$ обозначим количество существенных переменных данной функции f .

ТЕОРЕМА 2. В P_3 существует ровно пять $\mathcal{R}_2$ -предполных классов: T_{01} , T_2 , $T_{\sim}$, ∇_2 и P_3^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО $\mathcal{R}_2$ -полноты классов T_{01} , T_2 , $T_{\sim}$ аналогично случаю $\mathcal{R}_1$. Покажем, что классы ∇_2 и P_3^1 являются $\mathcal{R}_2$ -предполными.

ЛЕММА 3.1. Класс P_3^1 является $\mathcal{R}_2$ -предполным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathcal{R}_2$ -замкнутость класса P_3^1 следует из того, что класс P_3^1 замкнут относительно операции суперпозиции и по определению отношения из $f \sim g$ вытекает равенство количества существенных переменных функций f и g , т.е. при переходе от функции f к функции g , если $f \in P_3^1$, то и $g \in P_3^1$. Итак, класс P_3^1 $\mathcal{R}_2$ -замкнут.

Докажем, что класс P_3^1 $\mathcal{R}_2$ -предполон. Пусть функция $f \notin P_3^1$. Покажем, что $\mathcal{R}_2(f \cup P_3^1) = P_3$. Пусть $g_1(x) = x + 2 \pmod{3}$, $g_2(x) = x^2 \pmod{3}$. Прямая проверка определений классов, предполных относительно оператора подстановки, показывает, что $g_1 \notin M_1^3 \cup M_2^3 \cup M_3^3 \cup T_{01} \cup T_{02} \cup T_{12} \cup T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_{0[1]} \cup T_{1[1]} \cup T_{2[1]} \cup T_{\sim} g_2 \notin L \cup S_{x+1}$. Таким образом, класс P_3^1 не содержится ни в одном из предполных классов относительно оператора суперпозиции за исключением класса Sl , причем из определения класса Sl следует справедливость включения $P_3^1 \subset Sl$.

Если $f \notin Sl$, то в силу теоремы Слупецкого о предполноте класса Sl относительно классического оператора замыкания [4] все доказано. Пусть $f \in Sl$, где $|X_f| = n$. Множество значений E_f функции f совпадает либо с множеством $\{0, 2\}$, либо с $\{0, 1\}$, либо с $\{1, 2\}$. Сначала рассмотрим случай, когда множество значений функции f совпадает с множеством $\{0, 2\}$.

Рассмотрим вектор значений функции f : $f = (f_1, \dots, f_{3^n})^T$. Заметим, что по определению функции f количество переменных $n \geq 2$ и, как следствие, $O_2(f) < 3^n$. Возможно три случая.

1) Пусть $0 < O_2(f) < 3^n - 1$, т.е. имеются два вектора α_1^n, α_2^n такие, что $f(\alpha_1^n) = f(\alpha_2^n) = 0$. Перейдем к функции g такой, что $f \sim g$ и функция g совпадает с f на всех наборах кроме α_1^n , на котором $g(\alpha_1^n) = 1$. В силу того, что $1 \notin \{f_1, \dots, f_{3^n}\}$, расширение корректно (т.е. $|X_f| = |X_g|$). Заметим, что $g \notin Sl$ и $g \in \mathcal{R}_2(f \cup P_3^1)$. Таким образом, по теореме Слупецкого имеем $\mathcal{R}_2(f \cup P_3^1) = P_3$.

2) Пусть $O_2(f) = 3^n - 1$, т.е. имеется единственный набор α_1^n такой, что $f(\alpha_1^n) = 0$. Пусть $g' \in P_3^1$, $g' = (2, 2, 0)^T$. Рассмотрим функцию $h = g'(f)$. Очевидно, что $|X_f| = |X_h|$. Также заметим, что если $h = (h_1, \dots, h_{3^n})^T$, то $h_i \in \{0, 2\}$, $1 \leq i \leq 3^n$, и $O_2(h) = 1 < 3^n - 1$; таким образом, случай 2) сводится к случаю 1).

3) Если $O_2(f) = 0$, то с помощью функции $x+1 \pmod{3}$ можно построить функцию $f'(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + 1 \pmod{3}$. При этом $f' \in \mathcal{R}_2(P_3^1 \cup f)$ и для функции f' выполнено либо условие пункта 1), либо условие пункта 2), а значит, найдется функция $f'' \notin Sl$, $f'' \in \mathcal{R}_2(f \cup P_3^1)$; следовательно, воспользовавшись теоремой Слупецкого, получаем $\mathcal{R}_2(f \cup P_3^1) = P_3$.

Итак, мы показали, что для любой функции f такой, что $f \notin P_3^1$ и $E_f = \{0, 2\}$ выполнено $\mathcal{R}_2(f \cup P_3^1) = P_3$.

Случай $E_f = \{1, 2\}$ и $E_f = \{0, 1\}$ сводятся к уже рассмотренному случаю $E_f = \{0, 2\}$. Действительно, пусть $E_f = \{1, 2\}$. Пусть $\tilde{g} \in P_3^1$ такая, что $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(1) = \tilde{g}(2) = 2$. Для функции $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{g}(f(\tilde{x}))$ выполнено $E_{\tilde{f}} = \{0, 2\}$ и, по уже доказанному, получаем $\mathcal{R}_2(f \cup P_3^1) = \mathcal{R}_2(\tilde{f} \cup P_3^1) = P_3$. Случай, когда $E_f = \{0, 1\}$ рассматривается аналогично.

Итак мы показали, что $\mathcal{R}_2(P_3^1) = P_3^1$ и для любой функции $f \notin P_3^1$ справедливо $\mathcal{R}_2(f \cup P_3^1) = P_3$; следовательно, класс P_3^1 – $\mathcal{R}_2$ -предполный.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть $M = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, f, g\}$, где $f \notin T_\sim$, $g \notin P_3^1$.

1. Класс M – $\mathcal{R}_2$ -полон тогда и только тогда, когда существует унарная функция $h \in \mathcal{R}_2(M)$ такая, что $h \in P_3^3$.
2. Если выполнено $\mathcal{R}_2(M) \subset P_3$, то для любой функции $F \in \mathcal{R}_2(M)$ из того, что $F \simeq g$, где $|X_F| \geq |X_g|$, следует, что справедливо $F \sim g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Заметим, что в одну сторону утверждение очевидно. Действительно, если M – $\mathcal{R}_2$ -полон, то класс $\mathcal{R}_2(M)$ содержит все функции трехзначной логики, в том числе и функцию h .

Докажем теперь утверждение в обратную сторону, а именно, покажем, что множество $M' = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, f, g, h\}$ является $\mathcal{R}_2$ -полным.

Покажем сначала, что существует унарная функция $f' \in \mathcal{R}_2(M')$, не принадлежащая множеству $T_\sim$. Как было показано в доказательстве теоремы 1, с помощью отождествления переменных и подстановки функций $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ в функцию f , не принадлежащую множеству $T_\sim$, можно получить функцию f' , для которой справедливо

$$f'(0, 1) \approx f'(1, 0).$$

Рассмотрим функцию $h' \sim h$ такую, что $h'(0) = 1$, $h'(1) = 0$. Для функции $f'(x) = f(x, h'(x))$ будет справедливо $f'(0) \approx f'(1)$.

Легко проверить, что верно равенство $\mathcal{R}_2(\{f', h\}) = P_3^1$, а значит $\mathcal{R}_2(g \cup P_3^1) \subseteq \mathcal{R}_2(M')$, но в силу леммы 3.1 получаем, что справедливо $\mathcal{R}_2(g \cup P_3^1) = P_3$ и, следовательно, $\mathcal{R}_2(M') = P_3$, что и требовалось доказать.

2. Пусть класс M $\mathcal{R}_2$ -замкнут, но не $\mathcal{R}_2$ -полон. Для доказательства утверждения нам достаточно показать, что количество существенных переменных у функций F и g одинаковое.

От противного. Заметим, что по условию количество существенных переменных полученной при данном переходе функции не может превышать количества существенных переменных функции F . Пусть при замене в векторе значений функции $F = F(x_1, \dots, x_n)$ компоненты, равной 0, на 1, переменная x_i функции g стала несущественной. Пусть $\alpha_0^n = (a_1, \dots, a_n)$ – соответствующий вектор, для которого выполнено $F(\alpha_0^n) = 0$, $g(\alpha_0^n) = 1$. Рассмотрим два, не равных между собой вектора α_1^n, α_2^n , отличающихся от вектора α_0^n только i -й компонентой. Тогда в силу того, что после перехода от функции F к функции g переменная x_i стала несущественной, справедливо $F(\alpha_1^n) = F(\alpha_2^n) = 0$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = F(\omega_{a_1}(x), \omega_{a_2}(x), \dots, \omega_{a_{i-1}}(x), x, \omega_{a_{i+1}}(x), \dots, \omega_{a_n}(x)).$$

Справедливо $h(x) \in P_2^3$. Более того, 0 и 1 принадлежат ее области значений. Таким образом, функция $h(x)$ существенно зависит от одной переменной. Аналогично разбирается случай, когда переменная становится несущественной при замене в векторе значений функции F компоненты, равной 1, на 0.

Итак, мы показали, что если количество переменных у функции g меньше, чем у функции F , то существует унарная функция h такая, что $h \in P_2^3$ и $h \in \mathcal{R}_2(M)$. Но воспользовавшись уже доказанным пунктом 1, получаем, что в этом случае класс M $\mathcal{R}_2$ -полон, что противоречит строгому включению множеств $\mathcal{R}_2(M) \subset P_3$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Класс ∇_2 является $\mathcal{R}_2$ -предполным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathcal{R}_2$ -замкнутость класса ∇_2 очевидна. Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что если функция f принадлежит классу ∇_2 и справедливо $f \sim g$, то и функция g принадлежит классу ∇_2 . Замкнутость класс ∇_2 относительно оператора подстановки очевидна.

Покажем теперь, что класс ∇_2 является $\mathcal{R}_2$ -предполным. Покажем, что класс ∇_2 не содержится ни в одном из классов, предполных относительно оператора подстановки, за исключением $T_{2[1]}$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y), \quad \varphi_1 &= (0, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 2, 2)^T, \\ \varphi_2(x, y), \quad \varphi_2 &= (1, 0, 2, 0, 0, 2, 2, 2, 2)^T, \\ \varphi_3(x), \quad \varphi_3 &= (2, 0, 2)^T.\end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \nabla_2$ и справедливо

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\notin M_1^3 \cup M_2^3 \cup M_3^3, \\ \varphi_2 &\notin T_{\{1,2\},0} \cup T_{\{0,2\},1} \cup Sl, \\ \varphi_3 &\notin T_{01} \cup T_{12} \cup T_0 \cup T_1 \cup T_{1[1]} \cup T_{\sim} \cup T_{0[1]} \cup L \cup S_{x+1}.\end{aligned}$$

Также заметим, что $\omega_1 \notin T_{02} \cup T_2$.

Таким образом, ∇_2 не содержится ни в одном из предполных классов относительно оператора подстановки, за исключением класса $T_{2[1]}$.

Из определения ∇_2 очевидно, что $\nabla_2 \subseteq T_{2[1]}$. Рассмотрим функцию

$$\delta = (0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)^T.$$

Для функции δ справедливо $\delta \in T_{2[1]}$, $\delta \notin \nabla_2$; следовательно, класс $T_{2[1]}$ не совпадает с классом ∇_2 и справедливо строгое включение $\nabla_2 \subset T_{2[1]}$.

Пусть $f \notin \nabla_2$. Покажем, что $\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2) = P_3$. Если $f \notin T_{2[1]}$, то в силу того, что ∇_2 не лежит ни в одном из предполных классов, за исключением $T_{2[1]}$, и с учетом теоремы о предполных классах относительно оператора подстановки, все доказано.

Пусть теперь $f \in T_{2[1]} \setminus \nabla_2$. По определению функции f существует вектор $\alpha^n = (a_1, \dots, a_n)$ такой, что $f(\alpha^n) \neq 2$ и существует компонента вектора $a_i = 2$. Без ограничения общности считаем, что вектор α^n удовлетворяет условию

$$O_2(\alpha^n) = \min_{\beta^n = (b_1, \dots, b_n): f(\beta^n) \neq 2, \exists b_i = 2} O_2(\beta^n).$$

То есть вектор α^n является вектором, содержащим минимальное количество компонент, равных двойке, $a_i = 2$ и значение функции $f(\alpha^n) \neq 2$. Рассмотрение структуры вектора α^n дает два возможных случая.

1. Пусть $O_2(\alpha^n) \geq 2$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Для нее справедливо $h(2) \neq 2$ и в силу минимальности порядка двойки набора α^n выполнено $f(\alpha^n) \neq 2$, $h(0) = h(1) = 2$. Рассмотрим функцию обращения ξ ($\xi = (2, 2, 0)^T$). Заметим, что $\xi \sim h$. В классе $\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2)$ содержится функция $g \in \nabla_2$, $g = (0, 2, 2)^T$. Из того, что $\xi(g(x)) \sim s(x)$, где $s(x) = x + 2 \pmod{3}$, и в силу того, что $\mathcal{R}_2(s) = P_3^1$, выполняется

$$P_3^1 \subseteq \mathcal{R}_2(\xi \cup g) \subseteq \mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2).$$

Но, как уже отмечалось выше, существует функция $f' \in \nabla_2 \setminus Sl$, а значит, $f' \notin P_3^1$ и, пользуясь леммой 3.1, получаем

$$\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2) = \mathcal{R}_2(f' \cup P_3^1) = P_3.$$

2. Пусть $O_2(\alpha^n) = 1$. В силу того, что $f(\alpha^n) \neq 2$, возможно два случая: $f(\alpha^n) = 0$ и $f(\alpha^n) = 1$.

Рассмотрим сначала случай $f(\alpha^n) = 0$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Возможно 3 случая.

2.1. Если $2 \in \{h(0), h(1)\}$, то функция h имеет вид либо $h = (2, 0, 0)^T$, либо $h = (0, 2, 0)^T$, либо $h = (2, 2, 0)^T$. В первых двух случаях справедливо $P_3^1 = \mathcal{R}_2(h)$. Если же $h = (2, 2, 0)^T$, то, как отмечалось выше, $s(x) \in \mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2)$ и, следовательно, $\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2) = P_3$.

2.2. Если $h \in P_2^3$ и функция h существенно зависит от одной переменной, то, воспользовавшись леммой 3.2, получаем, что $\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2) = P_3$.

2.3. Если $h(x) \equiv 0$, то, воспользовавшись леммой 3.2, перейдем от функции f к функции g такой, что функция g совпадает с функцией f на всех наборах за исключением набора α^n , причем $g(\alpha^n) = 1$. Тогда функция

$$h'(x) = g(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

будет удовлетворять всем условиям случая 2.2, а значит, и в этом случае имеем $\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2) = P_3$.

Случай $f(\alpha^n) = 1$ разбирается аналогично случаю $f(\alpha^n) = 0$ с точностью до двойственности.

Итак, выполнено $\mathcal{R}_2(\nabla_2) = \nabla_2$, и для любой функции $f \notin \nabla_2$ справедливо

$$\mathcal{R}_2(f \cup \nabla_2) = P_3;$$

следовательно, класс ∇_2 — $\mathcal{R}_2$ -предполный.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Покажем, что не существует других $\mathcal{R}_2$ -предполных классов. Допустим, что существует некоторый $\mathcal{R}_2$ -предполный класс M , не совпадающий с указанными классами. Тогда найдутся функции $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in M$ такие, что $f_1 \notin T_2$, $f_2 \notin T_{01}$, $f_3 \notin T_{\sim}$, $f_4 \notin \nabla_2$, $f_5 \notin P_3^1$.

С помощью отождествления всех переменных функции $f_1 \in M \setminus T_2$ можно получить функцию $g \notin T_2$ такую, что $|X_g| \leq 1$.

Обозначим $\bar{T}_2^1 = \{f \mid f \notin T_2, |X_f| \leq 1\}$. Множество $\bar{T}_2^1$ конечно, поэтому перебором можно проверить, что оно распадается на пять классов эквивалентности относительно отношения $\sim$, а именно, $\bar{T}_2^1 = \bigsqcup_{i=0}^4 M_i$, где

$$\begin{aligned} M_0 &= \{\omega_0, \omega_1\}, \\ M_1 &= \{f \mid f = (a_1, 2, a_2)^T, a_i \in \{0, 1\}\}, \\ M_2 &= \{f \mid f = (2, a_1, a_2)^T, a_i \in \{0, 1\}\}, \\ M_3 &= \{f \mid f = (a_1, a_2, a_3)^T, a_i \in \{0, 1\}, |X_f| = 1\}, \\ M_4 &= \{f \mid f = (2, 2, a)^T, a \in \{0, 1\}\}. \end{aligned}$$

Функция g принадлежит одному из M_i .

Легко проверить, что $[M_1] = [M_2] = P_3^1$, а значит, если справедливо $g \in M_1$ или $g \in M_2$, то справедливо и включение $P_3^1 \subset \mathcal{R}_2(M)$. В силу того, что функция f_5 не принадлежит классу P_3^1 , и леммы 3.1, получаем $\mathcal{R}_2(M) = \mathcal{R}_2(f_5 \cup P_3^1) = P_3$; следовательно, класс M — $\mathcal{R}_2$ -полный, что противоречит предположению о $\mathcal{R}_2$ -предполноте класса M .

Таким образом, осталось рассмотреть три случая:

1. $g \in M_4$;
2. $g \in M_3$;
3. $g \in M_0$.

Случай 1. Заметим что функция $g'' = g(g(x))$ принадлежит T_{01} . Как было показано в теореме 1, $\mathcal{R}_2$ -замыкание функции f_3 , не принадлежащей множеству $T_{\sim}$, и функции g'' содержит функцию f'' , для которой, с точностью до перестановки переменных, справедливо

$$f''(2, 0) \approx f''(2, 1).$$

Заметим, что существует функция g_1'' , для которой выполнено $g_1'' \sim g''$ и $g_1''(0) = 0$, $g_1''(1) = 1$. Тогда функция

$$h''(x) = f(g(x), g_1''(x))$$

будет удовлетворять свойству $h''(0) \approx h''(1)$.

Возможно два случая.

1.1. Если $h''(2) \neq 2$, то справедливо либо $h'' \in M_1$, либо $h'' \in M_2$, что в силу вышедоказанного влечет $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

1.2. Если $h''(2) = 2$, то функция $h_1''(x) = g(h''(x))$ будет удовлетворять условиям предыдущего пункта, т.е. получаем, что и в этом случае $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

Итак мы показали, что если функция $g \in M_4$, то справедливо $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

Случай 2. В силу леммы 3.2 из того, что $g \in P_2^3$, справедливо $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

Случай 3. Как уже было показано выше, справедливо $\omega_2 \in \mathcal{R}_2(\omega_0, \omega_1, f_1)$; следовательно $\omega_2 \in \mathcal{R}_2(M)$. Таким образом, для класса $\mathcal{R}_2(M)$ выполнены все условия второго пункта леммы 3.2.

Пусть $n = |X_{f_4}|$. Возможно два случая.

3.1. $|X_{f_4}| = 1$. В силу того, что функция f_4 существенно зависит от одной переменной и $f_4 \notin \nabla_2$ справедливо $f_4 \in \bar{T}_2^1 \setminus M_0$, но из доказанного выше получаем, что в этом случае справедливо $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

3.2. $|X_{f_4}| \geq 2$. По определению функции f_4 найдется такой набор

$$\alpha_2^n = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$a_i = 2$, что $f_4(\alpha_2^n) \neq 2$. Рассмотрим наборы

$$\alpha_0^n = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i^0, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$\alpha_1^n = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i^1, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

где $\{a_i^0, a_i^1\} = E_2$. Возможны два подслучая.

3.2 а) $f_4(\alpha_0^n)$, $f_4(\alpha_1^n)$ и $f_4(\alpha_2^n)$ не равны одновременно. В этом случае рассмотрим функцию $f_4^1(x) = f_4(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Заметим, что $f_4^1(x) \in \bar{T}_2^1 \setminus M_0$, т.е. для функции f_4^1 выполнены все условия случая 3.1. Получаем, что $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

3.2 б) $f_4(\alpha_0^n) = f_4(\alpha_1^n) = f_4(\alpha_2^n)$. В этом случае перейдем к функции g_4 такой, что $g_4 \sim f_4$ и g_4 совпадает с f_4 на всех наборах, кроме α_2^n , причем если $g_4(\alpha_2^n) = 0$, то $f_4(\alpha_2^n) = 1$, а если $g_4(\alpha_2^n) = 1$, то $f_4(\alpha_2^n) = 0$. В силу леммы 3.2 либо $g_4 \in \mathcal{R}_2(M)$, либо класс $M - \mathcal{R}_2$ -полный. Заметим, что функция g_4 удовлетворяет всем условиям уже рассмотренного случая 3.2 а), а значит, $\mathcal{R}_2(M) = P_3$.

Итак мы показали, что вне зависимости от того, какому из классов эквивалентности принадлежит функция g , выполнено, $\mathcal{R}_2(M) = P_3$, что противоречит предположению о существовании $\mathcal{R}_2$ -предполного класса M , не совпадающего ни с одним из классов T_{01} , T_2 , $T_\sim$, ∇_2 и P_3^1 .

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. L. Post, *Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, Ann. of Math. Stud., 5, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.

- [2] С. В. Яблонский, “Функциональные построения в k -значной логике”, *Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики*, Тр. МИАН, **51**, Изд-во АН СССР, М., 1958, 5–142.
- [3] С. С. Марченков, *S-классификация функций трехзначной логики*, Физматлит, М., 2001.
- [4] J. Slupecki, “Kryterium petnosci wielowartoskiowych systemow logiki zdan”, *C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie*, **32** (1939), 102–110.
- [5] С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев, *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, М., 1966.

А. А. Есин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: esin@mi.ras.ru

Поступило

18.05.2006