Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Иродова, О диадических пространствах Никольского–Бесова и их связи с классическими пространствами, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 683–695

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:46:12

О диадических пространствах Никольского–Бесова и их связи с классическими пространствами

И. П. Иродова

В статье приводятся свойства диадических пространств и устанавливается связь между диадическими и классическими пространствами. Доказывается свойство классических пространств с использованием техники диадических пространств.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Целью настоящей статьи является изучение свойств диадических пространств Никольского–Бесова $B_p^{\lambda\theta}(F)$, введенных автором в [1]. Так как мы будем рассматривать классы пространств, отличные от используемых в классическом анализе, естественно начать с мотивировки определения диадических пространств и обсудить возможные пути их приложения.

Классические пространства Никольского–Бесова $B_p^{\lambda\theta}$ функций многих переменных описываются через модуль непрерывности (см. определение 3). Позднее было доказано, что функции из $B_p^{\lambda\theta}$ можно описать в терминах приближения сплайнами степени k гладкости $k - 1$ по каждой переменной, $k > \lambda + 1$ (см. [2], [3]). Описать же функции из $B_p^{\lambda\theta}$ при достаточно больших λ с помощью приближения кусочно-полиномиальными функциями невозможно. Однако Брудный в [4] определил пространства $B_p^{\lambda\theta}$ (а также большинство встречающихся в анализе пространств гладких функций) в терминах теории локальных приближений. Результат, который сформулирован ниже, стал отправной точкой для введения диадических пространств. Он устанавливает связь между модулем непрерывности и локальными приближениями. Напомним, что локальное приближение функции $f \in L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, $Q_0 = [0, 1]^d$ на $Q \subset Q_0$, определяется формулой

$$E_k(f, Q)_p := \inf_{s \in P_k} \|f - s\|_{L_p(Q)}.$$

Здесь P_k – пространство полиномов степени не более $k - 1$ по каждой переменной.

Кроме того, через $\bar{w}_k(f, t)_p$ обозначим сумму частных модулей непрерывности (см. (8)).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01005900) и программы “Университеты России” (грант № 04.01.453).

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, то

$$\bar{w}_k(f, t)_p \approx \sup_{\Pi_t} \left\{ \sum_{Q \in \Pi_t} E_k(f, Q)_p^p \right\}^{1/p}. \quad (1)$$

Здесь верхняя грань взята по всем семействам Π_t замкнутых конгруэнтных кубов с длиной ребра $\leq t$, внутренности которых попарно не пересекаются.

Теорема 1 при $p \geq 1$ доказана в [4], а при $0 < p < 1$ – в [5]. Если в (1) фиксировать разбиение Π , то

$$\left(\sum_{Q \in \Pi} E_k(f, Q)_p^p \right)^{1/p} = \text{dist}_{L_p}(f, P_k(\Pi)).$$

Здесь через $P_k(\Pi)$ обозначено пространство кусочно-полиномиальных функций из P_k , подчиненных разбиению Π , т.е. пространство $P_k(\Pi)$ состоит из функций вида $\sum_{Q \in \Pi} \rho_Q \chi_Q$, где $\rho_Q \in P_k$.

Как следствие из теоремы 1 можно получить описание функций из $B_p^{\lambda\theta}$ с помощью локальных приближений (см. теорему 8).

Перейдем теперь к определению диадических пространств. Пусть F_n обозначает разбиение куба Q_0 на параллелепипеды, образованное $(2^n - 1)d$ гиперплоскостями (по $2^n - 1$ гиперплоскостей, параллельных каждой из координатных гиперплоскостей). В частности, F_0 состоит из единственного куба Q_0 . Мы будем предполагать, что разбиение F_n состоит из параллелепипедов с длинами ребер $\approx 2^{-n}$. В дальнейшем такие параллелепипеды будем называть *квазикубами*. Если разбиение F_{n+1} является измельчением разбиения F_n (т.е. если любой квазикуб из F_{n+1} содержится в некотором квазикубе из F_n), то такие разбиения будем называть *диадическими*, а $F = \{Q : Q \in F_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ будем называть *диадическим семейством*. Частным случаем диадических разбиений являются равномерные разбиения Q_0 на кубы, длина ребра которых равна 2^{-n} . Обозначим их D_{2^n} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Диадическим пространством Никольского–Бесова* $B_p^{\lambda\theta}(F)$, построенным по диадическому семейству F , называется множество функций из $L_p(Q_0)$, для которых конечна величина

$$|f|_{B_p^{\lambda\theta}(F)} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n\lambda} \text{dist}_{L_p}(f, P_k(F_n)))^\theta \right)^{1/\theta};$$

здесь $k > \lambda > 0$ и $0 < p, \theta \leq \infty$. Квазинорма в $B_p^{\lambda\theta}(F)$ определяется равенством

$$\|f\|_{B_p^{\lambda\theta}(F)} = |f|_{B_p^{\lambda\theta}(F)} + \|f\|_p.$$

Здесь и всюду ниже $L_p = L_p(Q_0)$ и $\|f\|_{L_p(Q)} = \|f\|_{p(Q)}$. В случае $Q = Q_0$ символ Q можно опустить.

Сразу из определений пространств и теоремы 1 следует, что каждое диадическое пространство содержит классическое. С другой стороны (как будет показано ниже), для малых гладкостей эти пространства совпадают, а для остальных гладкостей $B_p^{\lambda\theta}$ является пересечением конечного числа диадических B -пространств с подходящим образом подобранными семействами разбиений F . Благодаря этому, многие трудные

результаты для B -пространств можно получить из аналогичных результатов для диадических B -пространств. Поскольку последние устроены сравнительно просто, мы получаем существенное упрощение доказательства.

Другим важным обстоятельством, делающим изучение диадических B -пространств оправданным, является их возможная роль в прикладных задачах (распознавание образов, сжатие информации и др.). Диадические пространства являются в этом случае удачной дискретизацией классических пространств и дают удобный язык для описания алгоритмов, применяемых в прикладных задачах.

Наконец, изучение диадических пространств можно рассматривать как часть потока исследований, изучающих “теорию функций” на графах. Эти исследования включают изучение спектральных свойств аналога оператора Лапласа на графе и нуждаются в использовании “графовых” аналогов пространств Соболева и Бесова. С этой точки зрения теория диадических пространств может рассматриваться как простейшая, но важная часть будущей общей теории.

Теперь несколько слов о содержании статьи. В первой ее части сформулированы некоторые свойства диадических пространств. Во второй части введены специальные диадические пространства и перечислены их свойства. В третьей части собраны результаты о связи диадических и классических B -пространств. В последней части приведен пример использования техники диадических пространств для доказательства результата в классических пространствах.

2. Свойства диадических пространств. Первая теорема относится к разложению функции из $B_p^{\lambda\theta}(F)$ в ряд по многочленам наилучшего приближения. Это очень удобный не только в теоретическом, но и в практическом плане способ проверки принадлежности функции пространству $B_p^{\lambda\theta}(F)$. Прежде чем сформулировать результат, обозначим через Q' “отца” куба Q , т.е., если $Q \in F_n$, то Q' – единственный куб из F_{n-1} , который содержит Q . Кроме того, через $P_Q(f)$ обозначим многочлен наилучшего приближения функции f в $L_p(Q)$.

ТЕОРЕМА 2. *Функция f из $L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, принадлежит пространству $B_p^{\lambda p}(F)$, $0 < \lambda < \infty$, тогда и только тогда, когда существует такое разложение*

$$f = \sum_{Q \in F} (P_Q(f) - P_{Q'}(f)) \chi_Q \quad (\text{сходимость в } L_p),$$

что конечна величина

$$KN_{\lambda p}(f) := \left(\sum_{Q \in F, Q \neq Q_0} |Q|^{-(\lambda p)/d} \|P_Q(f) - P_{Q'}(f)\|_{L_p(Q)}^p \right)^{1/p};$$

здесь $P_Q(f) \in P_k$ и $k > \lambda$.

Кроме того, квазинорма $KN_{\lambda p}(f)$ эквивалентна $|f|_{B_p^{\lambda p}}$.

Заметим, что теорема сформулирована для случая $\theta = p$. В [6] дано доказательство результата в общем случае.

В определении пространства $B_p^{\lambda\theta}(F)$ участвуют локальные приближения функции многочленами в пространстве L_p . Оказывается, можно написать эквивалентную квазинорму, в которой функция будет приближаться в пространстве L_q , $0 < q \leq p \leq \infty$. Впервые аналогичный результат для классических пространств Никольского–Бесова был доказан в [4].

ТЕОРЕМА 3. Функция f из $L_p(Q_0)$ принадлежит $B_p^{\lambda\theta}(F)$ тогда и только тогда, когда конечна величина

$$|f|_{B_p^{\lambda\theta}(F)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n(\lambda+d/q-d/p)} \left(\sum_{Q \in F_n} E_k(f, Q)_q^p \right)^{1/p} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta};$$

здесь $k > \lambda > 0$, $0 < q \leq p \leq \infty$, $0 < \theta \leq \infty$.

При доказательстве этой теоремы (см. [1]) используются свойства локального приближения. Необходимость следует из неравенства Гёльдера, а при доказательстве достаточности используется факт, отмеченный в [3]: если $q \leq p$, то многочлен P_q наилучшего приближения в $L_q(Q)$ является многочленом почти наилучшего приближения и в $L_p(Q)$, т.е.

$$\|f - P_q\|_{p(Q)} \approx E_k(f, Q)_p.$$

Кроме того, переход от одного нормированного пространства к другому для многочленов возможен в силу неравенства

$$\|S\|_{p(Q)} \leq c \cdot |Q|^{1/p-1/q} \|S\|_{q(Q)};$$

здесь S – многочлен из пространства P_k .

Следующий результат связан с интерполяцией диадических пространств. Напомним определение аппроксимационного пространства (см. [7]).

Пусть $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ подмножества $L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$. Как обычно, определим операции сложения множеств и умножения множества на число по формулам

$$\begin{aligned} A_n + A_m &= \{\varphi \in L_p(Q_0) : \varphi = a_n + a_m, a_n \in A_n, a_m \in A_m\}, \\ \lambda \cdot A_n &= \{\varphi \in L_p(Q_0) : \varphi = \lambda \cdot a_n, a_n \in A_n\}. \end{aligned}$$

Последовательность подмножеств $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть *аппроксимационным семейством*, если выполняются условия

- 1) $A_n + A_m \subset A_{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
- 2) $\lambda A_n \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Заметим, что сразу из определения следует, что $0 \in A_n$ и $A_n \subset A_{n+1}$. Кроме того, пусть

$$e_n(f)_p := \text{dist}_{L_p}(f, A_n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Аппроксимационное пространство $E_{\lambda,q}(A, L_p)$ определяется как подмножество $f \in L_p$, для которого

$$\|f\|_{E_{\lambda,q}(A, L_p)} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n\lambda} e_n(f)_p)^q \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p} < \infty;$$

здесь $0 < p, q \leq \infty$ и $0 < \lambda < \infty$.

Если, кроме того, положить

$$E_{0,p}(A, L_p) = L_p,$$

то можно сформулировать следующий результат (см. [7]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < q_i \leq \infty$, $0 \leq \lambda_i < \infty$, $i = 0, 1$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$ и $0 < p, s \leq \infty$. Тогда при интерполяции вещественным методом имеет место изоморфизм

$$(E_{\lambda_0, q_0}, E_{\lambda_1, q_1})_{\theta s} = E_{\lambda_{\theta}, s};$$

здесь $0 < \theta < 1$, $\lambda_{\theta} = (1 - \theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$ и $E_{\lambda, q} = E_{\lambda, q}(A, L_p)$.

Из определения 1 следует, что пространство $B_p^{\lambda q}(F)$ является аппроксимационным. Для этого нужно взять $A_n = P_k(F_n)$. В силу диадичности разбиений F_n нужные свойства выполняются. Таким образом,

$$(B_p^{\lambda_0 q_0}(F), B_p^{\lambda_1 q_1}(F))_{\theta s} = B_p^{\lambda_{\theta} s}(F);$$

здесь все параметры такие же, как в теореме 4.

Следующий результат позволяет описать функции из пространства $B_p^{\lambda \theta}(F)$ через приближение в более широком пространстве L_t .

Прежде всего определим аппарат приближения. Будем говорить, что $S \in R_k^n(F)$, если существует такой набор диадических квазикубов $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ из F , что

$$S = \sum_{i=1}^n p_{Q_i} \chi_{Q_i};$$

здесь p_{Q_i} – многочлены из P_k .

Обозначим $R_k(F) = \{R_k^n(F)\}_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что семейство $R_k(F)$ является аппроксимационным.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\lambda/d = 1/p - 1/t$. Если $0 < p < t < \infty$ или $t = \infty$ и $0 < p < 1$, то

$$B_p^{\lambda p}(F) = E_{\lambda/d, p}(R_k(F), L_t);$$

здесь $k > \lambda > 0$.

Впервые для классических пространств Никольского–Бесова аналогичная теорема была получена Брудным в [8] для $d = 1$; многомерный случай см. в [9]. Теорема 5 доказана в [6].

3. Специальные диадические разбиения. Пусть x – вершина куба Q_0 . От Q_0 перейдем к кубу Q_x , который получается гомотетией Q_0 относительно вершины x с коэффициентом 3. Куб Q_x разделим на 2^{nd} равных кубов, а затем возьмем пересечение этих кубов с кубом Q_0 . Получившееся разбиение Q_0 на параллелепипеды обозначим $F_n(x)$. Заметим, что в зависимости от n длина ребра каждого параллелепипеда может принимать значения $3 \cdot 2^{-n}$, $2 \cdot 2^{-n}$ или 2^{-n} . В частности, $F_0(x)$ и $F_1(x)$ состоят только из куба Q_0 . Кроме того, из построения следует, что разбиение $F_{n+1}(x)$, $n \geq 1$, является измельчением разбиения $F_n(x)$. Следовательно, $F_n(x)$ – диадические разбиения, а $F(x) = \{Q \in F_n(x), n \in N_0\}$ – диадическое семейство. В дальнейшем разбиения $F_n(x)$ будем называть *специальными диадическими разбиениями*, а $F(x)$ будем называть *специальным диадическим семейством*.

Отметим некоторые свойства семейств $F(x)$, доказанные в [10].

ТЕОРЕМА 6. Специальные диадические семейства $F(x)$ обладают следующими свойствами:

- 1) вершины квазикубов из семейств $F(x)$ и $F(y)$ не совпадают, если различаются x и y (здесь речь идет о вершинах, не лежащих на границах куба Q_0);
- 2) если Q_1 лежит в $F_n(x)$, а Q_2 лежит в $F_m(y)$, то квазикубы Q_1 и Q_2 или не пересекаются или хорошо “зацепляют” друг друга, а именно

$$|Q_1 \cap Q_2| \approx \min(|Q_1|, |Q_2|);$$

- 3) для любого параллелепипеда J , ребро которого не превышает 2^{-n} (границы J параллельны координатным плоскостям), найдется квазикуб Q , принадлежащий одному из 2^d разбиений $F_n(x)$, такой, что $Q \supset J$.

Следующий результат дает возможность сравнить скорости приближений кусочно-полиномиальными функциями, подчиненными разным разбиениям.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in L_p(Q_0)$, $0 < p < \infty$, и x, y – вершины куба Q_0 ; тогда

$$\text{dist}_{L_p}(f, P_m(F_k(x))) \leq c \cdot 2^{-k/p} \left(\sum_{j=1}^k (2^{j/p} \text{dist}_{L_p}(f, P_m(F_j(y))))^{p^*} \right)^{1/p^*};$$

здесь $p^* = \min(1, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_j – кусочно-полиномиальные функции, подчиненные разбиению $F_j(y)$ такие, что

$$\|f - S_j\|_{L_p} = e_m(f, F_j(y))_p; \quad (2)$$

здесь и всюду ниже

$$e_m(f, F_j(y))_p = \text{dist}_{L_p}(f, P_m(F_j(y))).$$

Представим f в виде ряда

$$f = (f - S_k) + \sum_{j=2}^k (S_j - S_{j-1}) + S_1.$$

Заметим, что $P_m(F_1(y)) = P_m$, так как $F_1(y)$ состоит только из одного куба Q_0 . Следовательно, S_1 – многочлен из P_m и $e_m(S_1, F_k(x))_p = 0$. Имеем

$$e_m(f, F_k(x))_p \leq c \cdot \left(e_m(f - S_k, F_k(x))_p + \left(\sum_{j=2}^k e_m(S_j - S_{j-1}, F_k(x))_p^{p^*} \right)^{1/p^*} \right). \quad (3)$$

Так как в силу выбора S_k

$$e_m(f - S_k, F_k(x))_p \leq e_m(f, F_k(y))_p,$$

остается оценить вторую группу слагаемых в правой части (3).

Обозначим через $\varphi_j = S_j - S_{j-1}$. В силу диадичности разбиений $F_j(y)$ является измельчением разбиения $F_{j-1}(y)$, поэтому $\varphi_j \in P_m(F_j(y))$ и, как следует из (2),

$$\|\varphi_j\|_{L_p} \leq c \cdot e_m(f, F_{j-1}(y))_p. \quad (4)$$

Оценим $e_m(\varphi_j, F_k(x))_p$, т.е. кусочно-полиномиальную функцию φ_j , подчиненную разбиению $F_j(y)$, будем приближать кусочно-полиномиальными функциями более мелкого разбиения $F_k(x)$, $j \leq k$. По определению наилучшего приближения

$$e_m^p(\varphi_j, F_k(x))_p = \sum_{Q \in F_k(x)} E_m(\varphi_j, Q)_p^p. \quad (5)$$

Если квазикуб $Q \in F_k(x)$ целиком попадает в некоторый квазикуб J из $F_j(y)$, то $E_m(\varphi_j, Q)_p = 0$ в силу того, что φ_j на J является многочленом. Поэтому в (5) справа остаются лишь те слагаемые, которые соответствуют квазикубам Q пересекающим грани квазикубов J . Обозначим множество таких квазикубов $G := G(F_k(x), F_j(y))$. Отметим, что $|G| \neq 0$, так как по свойству 1 теоремы 6 узлы разбиений $F_k(x)$ и $F_j(y)$ не совпадают. Имеем

$$e_m^p(\varphi_j, F_k(x))_p \leq \sum_{Q \in G} \|\varphi_j\|_{L_p(Q)}^p.$$

Оценим $\|\varphi_j\|_{L_p(Q)}$. Квазикуб Q может одновременно пересекать не более чем 2^d квазикубов из $F_j(y)$. То есть φ_j , определенная на Q , является кусочно-полиномиальной функцией, состоящей из не более чем 2^d многочленов. Разобьем квазикуб Q на подмножества $Q \cap J$, где J – это те квазикубы из $F_j(y)$, которые пересекает Q . Обозначим это множество $J(Q)$. Таким образом,

$$\|\varphi_j\|_{L_p(Q)}^p = \sum_{J \in J(Q)} \|\varphi_j\|_{L_p(Q \cap J)}^p.$$

Используем второе свойство специальных диадических разбиений (см. теорему 6), в силу которого

$$|Q \cap J| \approx \min(|Q|, |J|) \approx 2^{-kd}.$$

Кроме того, $\|\varphi_j\|_{L_p(Q \cap J)}^p \leq |Q \cap J| \cdot \|\varphi_j\|_{C(J)}^p$. Объединяя предыдущие оценки, получим

$$e_m^p(\varphi_j, F_k(x))_p \leq c \cdot 2^{-kd} \sum_{Q \in G} \sum_{J \in J(Q)} \|\varphi_j\|_{C(J)}^p.$$

Можно поменять порядок суммирования. Для этого нужно оценить, сколько квазикубов Q из $F_k(x)$ может пересечь фиксированный квазикуб J из $F_j(y)$. Обозначим множество таких квазикубов через $\Gamma_k(J)$; тогда

$$e_m^p(\varphi_j, F_k(x))_p \leq c \cdot 2^{-kd} \sum_{J \in F_j(y)} |\Gamma_k(J)| \cdot \|\varphi_j\|_{C(J)}^p.$$

Докажем, что

$$|\Gamma_k(J)| \leq c \cdot 2^{(d-1)(k-j)}. \quad (6)$$

Для этого заметим, что если квазикуб Q пересекает одну из граней квазикуба J , то он пересекает и $(d-1)$ -мерную грань. Поэтому достаточно оценить, сколько квазикубов может пересечь $(d-1)$ -мерную грань. Так как ребро квазикуба J равно $\approx 2^{-j}$, а ребро квазикуба Q равно $\approx 2^{-k}$, одномерную грань пересекает не более чем $c \cdot 2^{k-j}$ квазикубов. Тогда $(d-1)$ -мерную грань пересекает не более чем $c \cdot 2^{(d-1)(k-j)}$ квазикубов. Если учесть, что количество $(d-1)$ -мерных граней равно $2d$, то получим (6). Итак,

$$e_m^p(\varphi_j, F_k(x))_p \leq c \cdot 2^{-k} \sum_{J \in F_j(y)} \|\varphi_j\|_{C(J)}^p \cdot 2^{-j(d-1)}.$$

Остается учесть, что φ_j на J является многочленом, поэтому от пространства $C(J)$ можно вернуться к пространству $L_p(J)$:

$$\|\varphi_j\|_{C(J)} \leq |J|^{-1/p} \|\varphi_j\|_{L_p(J)}.$$

Так как $|J| \approx 2^{-jd}$, то

$$e_m^p(\varphi_j, F_k(x))_p \leq c \cdot 2^{j-k} \sum_{J \in F_j(y)} \|\varphi_j\|_{L_p(J)}^p.$$

Учитывая (4), получим

$$e_m(\varphi_j, F_k(x))_p \leq c \cdot 2^{(j-k)/p} e_m(f, F_{j-1}(x))_p.$$

Вместе с (3) это доказывает теорему.

4. Связь диадических и классических пространств. Напомним определение классического пространства Никольского–Бесова $B_p^{\lambda\theta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция f из $L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, принадлежит пространству $B_p^{\lambda\theta}$, если конечна квазинорма

$$|f|_{B_p^{\lambda\theta}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n\lambda} w_k(f, 2^{-n})_p)^\theta \right)^{1/\theta};$$

здесь $0 < \lambda < k$, $0 < \theta \leq \infty$ и

$$w_k(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^k f\|_{L_p(Q^{kh})}. \quad (7)$$

Оказывается, в определении модуль непрерывности $w_k(f, t)_p$ можно заменить на сумму частных модулей непрерывности. Это следует из неравенства типа неравенства Маршю, доказанного в [11]. Напомним, что частный модуль непрерывности $w_k^{(i)}(f, t)_p$ отличается от $w_k(f, t)_p$ тем, что верхнюю грань в (7) следует брать лишь по векторам, коллинеарным оси x_i .

ТЕОРЕМА 8. Функция f из $L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, принадлежит пространству $B_p^{\lambda\theta}$, $0 < \lambda < k$, $0 < \theta \leq \infty$, тогда и только тогда, когда конечна величина

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n\lambda} \bar{w}_k(f, 2^{-n})_p)^\theta \right)^{1/\theta};$$

здесь

$$\bar{w}_k(f, 2^{-n})_p = \sum_{k=1}^d w_k^{(i)}(f, 2^{-n})_p. \quad (8)$$

Отметим некоторые результаты, в которых устанавливается связь между модулем непрерывности и локальными приближениями.

ТЕОРЕМА 9. Для любой функции f из $L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$,

$$\bar{w}_k(f, 2^{-n})_p \approx \sum_x e_k(f, F_n(x))_p;$$

здесь суммирование идет по всем вершинам x куба Q_0 .

Теорема 9 показывает, что вычисление модуля непрерывности равносильно вычислению 2^d кусочно-полиномиальных приближений. При доказательстве этой теоремы используется теорема 1 и третье свойство теоремы 6.

Сформулируем теперь результат, который является следствием теоремы 7 и теоремы 9. Он позволяет оценить модуль непрерывности через кусочно-полиномиальные приближения.

ТЕОРЕМА 10. Если $f \in L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, то

$$\bar{\omega}_m(f, 2^{-k})_p \leq c \cdot \left(2^{-k/p} \left(\sum_{j=1}^k (2^{j/p} e_m(f, F_j(x)))_p \right)^{p^*} \right)^{1/p^*};$$

здесь $p^* = \min(1, p)$.

Заметим, что такого типа неравенства, которые называются обратными теоремами теории приближения, доказаны в [2] и [3].

Теперь мы можем установить связь диадических и классических пространств.

ТЕОРЕМА 11. Если $f \in L_p(Q_0)$, $0 < p, \theta \leq \infty$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$B_p^{\lambda\theta} = \bigcap_x B_p^{\lambda\theta}(F(x));$$

здесь пересечение идет по всем вершинам x куба Q_0 .

Доказательство теоремы сразу следует из определения пространств $B_p^{\lambda\theta}$, $B_p^{\lambda\theta}(F)$ и теоремы 9.

ТЕОРЕМА 12. Если $0 < \lambda < 1/p$, то для любого специального диадического семейства $F(x)$

$$B_p^{\lambda\theta} = B_p^{\lambda\theta}(F(x));$$

здесь $0 < \theta \leq \infty$, $0 < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теоремы 11, $B_p^{\lambda\theta} \subset B_p^{\lambda\theta}(F(x))$ при $0 < p, \theta \leq \infty$, $0 < \lambda < \infty$. Поэтому достаточно установить непрерывное вложение $B_p^{\lambda\theta}(F(x))$ в $B_p^{\lambda\theta}$ при $0 < \lambda < 1/p$. Для сокращения записи обозначим $a_j := e_m(f, F_j(x))_p$ и $b_k := \bar{\omega}_m(f, 2^{-k})_p$. Тогда результат теоремы 10 можно записать в виде

$$b_k \leq c \cdot \left(2^{-k/p} \left(\sum_{j=1}^k (2^{j/p} a_j)^{p^*} \right)^{1/p^*} \right). \quad (9)$$

Если взять $p^* \leq \theta$, то можно воспользоваться дискретным неравенством Харди, в силу которого из (9) при $0 < \lambda < 1/p$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k\lambda} b_k)^{\theta} \right)^{1/\theta} \leq c \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k\lambda} a_k)^{\theta} \right)^{1/\theta}.$$

Этим неравенство

$$\|f\|_{B_p^{\lambda\theta}} \leq c \cdot \|f\|_{B_p^{\lambda\theta}(F(x))} \quad (10)$$

при $0 < \lambda < 1/p$, $p^* \leq \theta$ доказано.

Если же $p^* > \theta$, то, умножив обе части (9) на $2^{k\lambda}$, возведя в степень θ и просуммировав по k , в правой части получившегося неравенства воспользуемся неравенством

$$\left(\sum_i x_i\right)^r \leq \sum_i x_i^r,$$

которое верно при $0 < r < 1$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2^{k\lambda} b_k)^\theta \leq c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\lambda-1/p)\theta} \sum_{j=1}^k (2^{j/p} a_j)^\theta.$$

Остается поменять порядок суммирования и учесть, что $\lambda < 1/p$. Таким образом, мы доказали неравенство (10) и для $\lambda < 1/p$, $p^* > \theta$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Специальное диадическое семейство $F(x)$ в теореме 12 можно заменить на более привычное диадическое семейство $D = \{D_{2^n}\}_{n=0}^\infty$. Напомним, что D_{2^n} состоит из равных кубов объема 2^{-nd} .

5. Пространства Бесова и пространства бesselевых потенциалов. Дадим описание пространств Бесова в терминах локальных приближений. Однако в отличие от предыдущего описания (см. теорему 3) локальные приближения будут группироваться не по размерам кубов, а по наличию общего центра. Это позволит нам сравнить пространства $B_p^{\lambda p}$ и пространства бesselевых потенциалов L_p^λ (их определение будет дано позднее). При доказательстве будут использоваться свойства диадических B -пространств.

Для формулировки теоремы обозначим через Q_{xt} куб с центром в точке x , размер ребра которого равен t , а через $\overline{Q}_{xt}$ — его пересечение с Q_0 .

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\lambda > 0$, $k > \lambda$, $0 < q \leq p < \infty$. Тогда $f \in L_p(Q_0)$ принадлежит $B_p^{\lambda p}$ тогда и только тогда, когда функция

$$\varphi_\lambda f(\xi) = \left(\int_0^1 (t^{-\lambda-d/q} E_k(f, \overline{Q}_{\xi t})_q)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \quad (11)$$

принадлежит L_p . Кроме того,

$$|f|_{B_p^{\lambda p}} \approx \|\varphi_\lambda f\|_{L_p} + E_k(f, Q_0)_q. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $t_1 \leq t_2$

$$E_k(f, \overline{Q}_{\xi t_1})_q \leq E_k(f, \overline{Q}_{\xi t_2})_q.$$

Учитывая это свойство, интеграл в (11) можно оценить суммой

$$(\varphi_\lambda f(\xi))^p \geq c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\lambda+d/q)p} E_k(f, \overline{Q}_{\xi, 2^{-n}})_q^p. \quad (13)$$

Обозначим через $J_\xi = J_\xi(F_n(x))$ квазикуб специального диадического разбиения $F_n(x)$, содержащий точку ξ . Напомним, что по построению длина каждого ребра J_ξ

не превышает $3 \cdot 2^{-n}$ (здесь $n \geq 2$). Так как куб $Q_{\xi, 6 \cdot 2^{-n}}$ имеет точку ξ своим центром, он содержит куб J_{ξ} . Имеем

$$J_{\xi}(F_n(x)) \subset \overline{Q}_{\xi, 2^{-(n-3)}}. \quad (14)$$

Продолжим оценку (13), учитывая (14). Тогда

$$(\varphi_{\lambda} f(\xi))^p \geq c \cdot \sum_{n=4}^{\infty} 2^{n(\lambda+d/q)p} E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p. \quad (15)$$

Чтобы суммирование в (15) начиналось с $n = 0$, прибавим к обеим частям неравенства $4E_k(f, Q_0)_q$ и учтем, что

$$E_k(f, Q_0)_q \geq E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q.$$

Имеем

$$(\varphi_{\lambda} f(\xi))^p + E_k(f, Q_0)_q^p \geq c \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\lambda+d/q)p} E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p \right). \quad (16)$$

Напомним, что $F_0(x) = \{Q_0\}$ и x — любая из 2^d вершин куба Q_0 . Получим теперь неравенство, противоположное (16). Вновь воспользуемся монотонностью локального приближения, что позволит получить неравенство, противоположное (13), и суммирование начнется с $n = 0$.

Перейдем от $\overline{Q}_{\xi, 2^{-n}}$ к квазикубам специальных диадических разбиений. Заметим, что по определению каждое ребро параллелипипеда $\overline{Q}_{\xi, 2^{-n}}$ не более 2^{-n} . По свойству 3 теоремы 6 найдется квазикуб $J_{\xi}(F_n(z))$ такой, что $\overline{Q}_{\xi, 2^{-n}} \subset J_{\xi}(F_n(z))$. Тогда

$$E_k(f, \overline{Q}_{\xi, 2^{-n}})_q^p \leq \sum_x E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p;$$

здесь суммирование взято по всем вершинам x куба Q_0 . Имеем

$$(\varphi_{\lambda} f(\xi))^p \leq c \cdot \sum_x \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\lambda+d/q)p} E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p. \quad (17)$$

Если просуммировать (16) по всем x (а их 2^d) и сравнить с (17), то мы получим

$$E_k(f, Q_0)_q^p + (\varphi_{\lambda} f(\xi))^p \approx \sum_x \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\lambda+d/q)p} E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p. \quad (18)$$

Докажем, что

$$\int_{Q_0} E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p d\xi = 2^{-nd} \cdot \sum_{Q \in F_n(x)} E_k(f, Q)_q^p. \quad (19)$$

Действительно, разбиваем Q_0 на Q из $F_n(x)$. Тогда для любой точки $\xi \in Q$ по определению J_{ξ} получим $J_{\xi}(F_n(x)) = Q$. Таким образом,

$$\int_Q E_k(f, J_{\xi}(F_n(x)))_q^p d\xi = |Q| \cdot E_k(f, Q)_q^p$$

и (19) доказано. Проинтегрируем (18) по Q_0 и воспользуемся (19). Получим

$$\|\varphi_\lambda f\|_p^p + E_k(f, Q_0)_q^p \approx \sum_x \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\lambda+d/q-d/p)p} \sum_{Q \in F_n(x)} E_k(f, Q)_q^p. \quad (20)$$

По теореме 3 правая часть (20) равна $\sum_x |f|_{B_p^{\lambda p}(F(x))}^p$. Остается применить теорему 11, в силу которой

$$\sum_x |f|_{B_p^{\lambda p}(F(x))}^p = |f|_{B_p^{\lambda p}}^p.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Верхний предел в (11) можно заменить на $\gamma \geq 2$. В этом случае второе слагаемое в (12) можно опустить. Это связано с тем, что, $\bar{Q}_{\xi t} = Q_0$ при $t \geq 2$.

Теорема 13 другим методом была получена Брудным в [4]. Доказанная теорема позволяет сравнить пространства Никольского–Бесова $B_p^{\lambda\theta}$ и пространства бesselевых потенциалов L_p^λ . Классическое определение пространства $L_p^\lambda(\mathbb{R}^d)$, $p > 1$, дается с помощью ядра Бесселя–Макдональда (см. [12; с. 73]). Однако существует описание пространства $L_p^\lambda(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, в терминах локальных приближений. Этот результат доказан в статье Доронсоро [13]. Для его формулировки обозначим для $\xi \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$

$$\Omega_f^k(\xi, t) = \sup \left\{ \int_Q |f - P_Q^k f|, \xi \in Q, |Q| = t^d \right\};$$

здесь $P_Q^k(f)$ – многочлен наилучшего приближения функции f на кубе Q в пространстве $L_2(Q)$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\lambda > 0$, $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $k = [\lambda] + 1$. Функция $f \in L_p^\lambda(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда функция

$$G_\lambda f(\xi) = \left(\int_0^\infty (t^{-\lambda-d} \Omega_f(\xi, t))^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \quad (21)$$

принадлежит $L_p(\mathbb{R}^d)$. Кроме того,

$$\|f\|_{L_p^\lambda(\mathbb{R}^d)} \approx \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \|G_\lambda f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Изменив верхний предел интегрирования в (21), получим определение $L_p^\lambda = L_p^\lambda(Q_0)$. Сравнение результатов теоремы 13 и теоремы 14 позволяет получить известные вложения $B_p^{\lambda p} \subset L_p^\lambda$, $1 < p \leq 2$, $L_p^\lambda \subset B_p^{\lambda p}$, $2 \leq p < \infty$. Кроме того, эти результаты можно распространить и на случай $0 < p < 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. П. Иродова, “О некоторых свойствах диадических пространств Бесова”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования*, т. 1, Труды междунар. конф. ун-та дружбы народов, Рос. ун-т дружбы народов, М., 1998, 78–81.
- [2] И. П. Иродова, “Свойства функций, заданных скоростью убывания кусочно-полиномиальной аппроксимации”, *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, ЯрГУ, Ярославль, 1980, 92–117.

- [3] R. A. Devore, V. A. Popov, "Interpolation of Besov Spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **305**:1 (1988), 397–414.
- [4] Ю. А. Брудный, "Пространства, определяемые с помощью локальных приближений", *Тр. ММО*, **24** (1971), 69–132.
- [5] Э. А. Стороженко, П. Освальд, "Теоремы Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ ", *Сиб. матем. журн.*, **19**:4 (1978), 888–901.
- [6] И. П. Иродова, "Диадические пространства Бесова", *Алгебра и анализ*, **12**:3 (2000), 40–80.
- [7] J. Peetre, G. Sparr, "Interpolation of normed Abelian groups", *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **92** (1972), 217–262.
- [8] Ю. А. Брудный, И. П. Иродова, "Нелинейная сплайн-аппроксимация и B -пространства", *Труды Международной конференции по теории приближений* (Киев, 1983), Наука, М., 1987, 71–75.
- [9] R. A. DeVore, B. Javerth, V. A. Popov, "Compression of wavelet decompositions", *Amer. J. Math.*, **114**:4 (1992), 737–785.
- [10] И. П. Иродова, "Диадические и классические пространства Бесова", *Математика. Материалы всероссийской научной конференции*, ЯрГУ, Ярославль, 2003, 257–264.
- [11] И. П. Иродова, "Обобщение неравенства Маршо", *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, ЯрГУ, Ярославль, 1984, 63–69.
- [12] Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский, "Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения", *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 5–157.
- [13] J. R. Dorronsoro, "A characterization of Potential Spaces", *Amer. Math. Soc.*, **95**:1 (1985), 21–31.

И. П. Иродова

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова, г. Ярославль

E-mail: Irodov@adm.yar.ru

Поступило

20.06.2006

Исправленный вариант

27.04.2007