Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Ласурия, Оценки группы φ -отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^\psi H_\infty(D)$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 696–704

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:20:53

Оценки группы φ -отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^\psi H_\infty(D)$

Р. А. Ласурия

Получены оценки скорости сходимости сильных φ -средних Λ -методов суммирования рядов Тейлора на некоторых классах аналитических и ограниченных в круге функций.

Библиография: 7 названий.

Получены оценки скорости сходимости сильных φ -средних Λ -методов суммирования рядов Тейлора на некоторых классах аналитических и ограниченных в круге функций.

1. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и обозначим через $A(D)$ множество функций, аналитических в D , а через $H_\infty(D)$ пространство функций, аналитических и ограниченных в D , с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{H_\infty(D)} = \sup_{z \in D} |f(z)|. \quad (1)$$

Если функция $f \in A(D)$, то ее можно представить в виде суммы сходящегося ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k z^k, \quad z \in D, \quad (2)$$

где

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) \bar{\zeta}^{k+1} d\zeta,$$

$r < 1$, $\bar{z}$ – число, комплексно сопряженное к z .

Для любой суммируемой на T функции с рядом Фурье степенного вида интеграл типа Коши

$$Jf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D,$$

является функцией, аналитической в D , и имеет почти всюду на T определенные предельные значения $J_+ f(z)$ по некасательным путям, образующие суммируемую граничную функцию, причем

$$J_+ f(z) = f(z), \quad z \in T.$$

В связи с этим, множество функций с рядами Фурье степенного вида и множество интегралов типа Коши в D от таких функций отождествляются.

Пусть, далее (см., например, [1]), $\mathfrak{M}$ – множество выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций $\psi(v)$ непрерывного аргумента $v \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$, $\psi(0) = 1$.

Отправляясь от ряда (2), каждой функции $f \in A(D)$ поставим в соответствие ряд ([1], [2])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \widehat{f}_k z^k, \quad z \in D. \quad (3)$$

Если ряд (3) сходится в D , то его сумму обозначим через $f^\psi(z)$. Функция $f^\psi(z)$ называется ψ -производной функции $f(z)$:

$$f^\psi(z) = D^\psi(f; z).$$

Пусть

$$A^\psi H_\infty(D) = \{f \in A(D) : \|f^\psi\|_\infty < +\infty, \psi \in \mathfrak{M}\}.$$

Отметим, что $A^\psi H_\infty(D) \subset H_\infty(D)$, причем

$$\|f\|_\infty \leq \|f^\psi\|_\infty,$$

т.е. $f \in H_\infty(D)$ и имеет на T граничные значения.

Далее, каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ [1; с. 94] сопоставим пару функций

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 &= \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(t) \leq K_1\}, \\ \mathfrak{M}_c &= \{\psi \in \mathfrak{M} : K_2 \leq \mu(t) \leq K_3\}, \\ \mathfrak{M}_\infty &= \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(t) \uparrow +\infty, t \rightarrow +\infty\}, \end{aligned}$$

где $K_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, константы, зависящие, вообще говоря, от $\psi(\cdot)$.

Положим

$$\rho_n(f; z) = f(z) - S_{n-1}(f; z),$$

где

$$S_n(f; z) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_k z^k$$

– частная сумма порядка n ряда (2). Введем в рассмотрение сильные φ -средние Валле-Пуссена

$$H_n^\varphi(f; z) = \gamma_n^{-1} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} \varphi(|\rho_k(f; z)|), \quad \gamma_n = [\eta(n)] - n + 1, \quad (4)$$

($|a|$ – целая часть a) и более общие средние

$$H_n^\varphi(f; z; \Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(u) \varphi(|\rho_k(f; z)|), \quad (5)$$

где $\Lambda = \lambda_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, – произвольная последовательность неотрицательных функций, заданных на множестве U , $\varphi = \varphi(u)$ – произвольная неотрицательная на множестве $\mathbb{R}_+$ функция.

В работах [1], [3], [4] доказан ряд утверждений в отношении скорости сходимости рядов Фурье на классах функций

$$C_{\beta}^{\psi} \mathfrak{N} = \left\{ f \in C(T) : \widehat{f}_k = \exp\left(i \operatorname{sign} k \frac{\beta\pi}{2}\right) \psi(k) \widehat{g}_k, g \in \mathfrak{N} \subset C(T), k \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $C(T)$ – пространство функций, непрерывных на T , а в качестве меры скорости сходимости выступают средние вида (4), (5).

Оценки величин (4) на всем пространстве $C(T)$ ($[\eta(n)] = 2n$) через наилучшие приближения тригонометрическими полиномами получены в [5], [6]. Скорость сходимости рядов Тейлора на классах функций $A^{\psi} H_{\infty}(D)$ исследовалась в [2], где доказаны следующие аналоги неравенства Лебега–Ландау, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f; z)\|_{\infty} &\leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \right) \psi(n) E_n(f^{\psi})_{\infty}, & \psi \in \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_{\infty}, \\ \|\rho_n(f; z)\|_{\infty} &\leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) \psi(n) E_n(f^{\psi})_{\infty}, & \psi \in \mathfrak{M}_0, \quad n > 1, \end{aligned}$$

где $E_n(g)_{\infty} = \inf_{P_{n-1} \in W_n} \|g - P_{n-1}\|_{\infty}$, W_n – множество алгебраических полиномов порядка $n - 1$, $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$.

В настоящей работе устанавливаются оценки сильных φ -средних (4) и (5) на классах функций $A^{\psi} H_{\infty}(D)$ в терминах наилучших приближений $E_n(f^{\psi})_{\infty}$ их ψ -производных, когда $\psi \in \mathfrak{M}_c, \mathfrak{M}_{\infty}, \mathfrak{M}_0$.

2. Формулировкам основных результатов предположим вспомогательные утверждения, которые не лишены, по-видимому, самостоятельного интереса.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} \equiv \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_{\infty}$, $n \leq k_1 < \dots < k_2 \leq [\eta]$. Тогда $\forall f \in A^{\psi} H_{\infty}(D)$ и $\forall q \geq 2$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D} h_{n,r}^{(q)} &\equiv \sup_{z \in D} \left\{ r^{-1} \sum_{j=1}^r |f_{k_j}(f; z)|^q \right\}^{1/q} \\ &\leq \begin{cases} K_1 \psi(n) E_n(f^{\psi})_{\infty}, & \eta(n) < n + 1, \\ \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{r} + K(q) \right) \psi(n) E_n(f^{\psi})_{\infty}, & \eta(n) \geq n + 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

где $K(q) = K_2 + 2/(2\pi(q' - 1))^{1/q'}$, $q = q'/(q' - 1)$, $1 < q' \leq 2$, $K_i, i = 1, 2$, – величины, равномерно ограниченные по $r, n \in \mathbb{N}$, $z \in D$, $q \geq 2$, $f \in A^{\psi} H_{\infty}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно считать $q \geq 2$. Если $\eta(n) < n + 1$, то $[n, [\eta(n)]]$ содержит единственное натуральное число n . Поэтому

$$h_{n,r}^{(q)}(f; z) = |\rho_n(f; z)|, \quad z \in D. \quad (7)$$

В работе (см., например, [2]) в условиях леммы установлено неравенство

$$\|\rho_n(f; z)\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \right) \psi(n) E_n(f^{\psi})_{\infty}, \quad (8)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$ и $f(\cdot) \in A^{\psi} H_{\infty}(D)$.

Отсюда с учетом (7)

$$h_{n,r}^{(q)}(f; z) \leq K\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty. \quad (9)$$

Пусть теперь $\eta(n) \geq n + 1$, $k_k = (\eta(k) - k)^{-1}$,

$$\Delta_n(f^\psi; u) = f^\psi(u) - P_{n-1}^*(u),$$

где $P_{n-1}^*(u)$ – полином наилучшего приближения $f^\psi(\cdot)$ в $H_\infty(D)$.

В [2] также получено представление

$$\rho_k(f; z) = -\frac{\psi(k)}{2\pi i} \int_{x_k \leq |t| \leq \pi} \Delta_n(ze^{-it}) \frac{e^{ikt}}{t} dt + b_k^\psi(f; z), \quad (10)$$

где

$$|b_k^\psi(f; z)| \leq K\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty, \quad k \geq n, \quad z \in D. \quad (11)$$

Положим

$$d_{k,n}(f^\psi, z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_k \leq |t| \leq 1/r} \Delta_n(f^\psi, ze^{-it}) \frac{e^{ikt}}{t} dt, & x_k \neq \frac{1}{r}, \\ 0, & x_k = \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Тогда соотношение (10) принимает вид

$$\rho_{k_j}(f; z) = -\psi(k_j) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{r^{-1} \leq |t| \leq \pi} \Delta_n(f^\psi; ze^{-it}) \frac{e^{ik_j t}}{t} dt + d_{k_j,n}(f^\psi; z) \right\} + b_{k_j}^\psi(f; z).$$

Отсюда с учетом (11)

$$\begin{aligned} h_{n,r}^{(q)}(f; z) &\leq \psi(n) \left[\left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{r^{-1} \leq |t| \leq \pi} \Delta_n(f^\psi; ze^{-it}) \frac{e^{ik_j t}}{t} dt \right|^q \right\}^{1/q} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |d_{k_j,n}(f^\psi; z)|^q \right\}^{1/q} \right] + K\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty \\ &\equiv \psi(n) [U_{n,1}^{(q)}(f; z) + U_{n,2}^{(q)}(f; z)] + K\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что

$$|d_{k_j,n}(f^\psi; z)| \leq \frac{1}{\pi} E_n(f^\psi)_\infty \left| \ln \frac{\eta(K_j) - K_j}{r} \right|. \quad (13)$$

Известно (см., например, [4]), что $\forall \psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$

$$0 < K_1 \leq \frac{\eta(k) - k}{\eta(n) - n} \leq K_2 \quad \forall k \in [n, \eta(n)] \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Поэтому в силу (13), (14)

$$|d_{k_j,n}(f^\psi; z)| \leq \frac{1}{\pi} E_n(f^\psi)_\infty \left(K + \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{r} \right), \quad z \in D. \quad (15)$$

Согласно (15)

$$U_{n,2}^{(q)}(f; z) \leq \frac{1}{\pi} E_n(f^\psi)_\infty \left(K + \ln^+ \frac{\eta(n) - n}{r} \right), \quad z \in D. \quad (16)$$

Пусть, далее,

$$\delta_n(z; t) = \begin{cases} \Delta_n(f^\psi; ze^{-it})t^{-1}, & r^{-1} \leq |t| \leq \pi, \\ 0, & |t| \leq r^{-1}, \end{cases} \quad \delta_n(z; t + 2\pi) = \delta_n(z; t),$$

$c_k(\varphi)$ – коэффициенты Фурье функции φ по системе $\{e^{ikx}\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда, применяя теорему Хаусдорфа–Юнга [7; с. 153], находим

$$\begin{aligned} U_{n,1}^{(q)}(f; z) &= r^{-1/q} \left\{ \sum_{j=1}^r |c_{k_j}(\delta_n)|^q \right\}^{1/q} \leq \frac{r^{-1/q}}{(2\pi)^{1/q'}} \|\delta_n\|_{q'} \\ &\leq \frac{r^{-1/q}}{(2\pi)^{1/q'}} \left\{ \int_{r^{-1} \leq |t| \leq \pi} \left| \frac{\Delta_n(f^\psi; ze^{it})}{t} \right|^{q'} dt \right\}^{1/q'} \\ &\leq \frac{2r^{-1/q}}{(2\pi)^{1/q'}} E_n(f^\psi)_\infty \left\{ \int_{r^{-1}}^{\pi} \frac{dt}{t^{q'}} \right\}^{1/q'} \leq \frac{2E_n(f^\psi)_\infty}{(2\pi(q'-1))^{1/q'}}, \quad q' = \frac{q}{q-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Принимая во внимание (9), (16), (17) и (19), приходим к утверждению леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $r, n \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, r$, $n \leq k_1 < \dots < k_r \leq 2n$. Тогда $\forall f \in A^\psi H_\infty(D)$, $\forall q \geq 2$

$$\sup_{z \in D} h_{n,r}^{(q)}(f; z) \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ \frac{n}{r} + K(q) \right) \psi(n) E_n(f^\psi)_\infty, \quad (18)$$

где $K(q) = K + 2/(2\pi(q'-1))^{1/q'}$, $q = q'/(q'-1)$, $q \geq 2$, K – величина, равномерно ограниченная по $r, n \in \mathbb{N}$, $z \in D$ и $f \in A^\psi H_\infty(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 повторяет по существу доказательство леммы 1, если воспользоваться представлением ([2])

$$\rho_k(f; z) = -\frac{\psi(k)}{2\pi i} \int_{|t| \geq 1/k} \Delta_n(f^\psi; ze^{-it}) \frac{e^{ikt}}{t} dt + b_k^\psi(f; z),$$

где

$$|b_k^\psi(f; z)| \leq K \psi(n) E_n(f^\psi)_\infty, \quad k \geq n, \quad z \in D.$$

3. Следуя работе [5], обозначим через Φ – множество неубывающих и непрерывных на $(0, +\infty)$ функций $\varphi(\cdot)$ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0 \quad \forall u > 0$, $\varphi(u) \leq e^{bu} \quad \forall u \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(2u) \leq a\varphi(u) \quad \forall u \in [0, 1]$, $a = a(\varphi)$.

Представителями множества Φ являются, к примеру, функции $\varphi(u) = u^q$ ($q > 0$), $\varphi(u) = \exp u - 1$ и др.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$. Тогда $\forall f \in A^\psi H_\infty(D) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z \in D} H_n^\varphi(f; z) \leq K \varphi(\psi(n) E_n(f^\psi)_\infty), \quad (19)$$

$K = K(\varphi)$ – величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$ и $f \in A^\psi H_\infty(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E_n(f^\psi)_\infty = 0$, то $\|f^\psi - P_n^*\|_\infty = 0$, т.е. $f^\psi(z) = P_{n-1}^*(z)$. Тогда $f(z) = P_{n-1}(z)$, $S_k(P_{n-1}; z) = P_{n-1}(z)$, $k \geq n$. Принимая во внимание определение множества Φ , соотношение (19) становится очевидным.

Пусть $E_n(f^\psi)_\infty > 0$, $\beta_n = \psi(n)E_n(f^\psi)_\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\eta(n) < n + 1$, то

$$H_n^\varphi(f; z) = \varphi(|\rho_n(f; z)|).$$

С учетом свойств функции $\varphi(\cdot) \in \Phi$ и (8) находим

$$H_n^\varphi(f; z) \leq \varphi(K\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty) = \varphi(K\beta_n).$$

Выберем $p \in \mathbb{N}$ так, чтобы $K < 2^p$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0,$$

то $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > n_0$

$$\beta_n < \min\{2^{-p+1}, (2ab)^{-1}\}.$$

Применяя неравенство $\varphi(2u) \leq a\varphi(u) \quad \forall u \in (0, 1)$, получаем

$$\varphi(K\beta_n) \leq \varphi(2^p\beta_n) \leq a^p\varphi(\beta_n), \quad \beta_n < 1, \quad n > n_0.$$

Отсюда

$$H_n^\varphi(f; z) \leq a^p\varphi(\beta_n), \quad n > n_0, \quad a = a(\varphi). \quad (20)$$

Если же $n \leq n_0$, то требуемое неравенство можно получить за счет соответствующего выбора константы.

Пусть теперь $\eta(n) \geq n + 1$, $n > n_0$.

В дальнейшем будем следовать, в общих чертах, схеме рассуждений из работы [5]. Положим

$$B_{n,\sigma}(z) = \{k \in [n, \eta(n)] : (\sigma - 1)\beta_n \leq |\rho_k(f; z)| \leq G\beta_n\},$$

$\sigma \in \mathbb{N}$, $\mu_{n,\sigma}(z)$ – количество всех элементов множества $B_{n,\sigma}(z)$. Тогда

$$H_n^\varphi(f; z) \leq \gamma_n^{-1} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{k \in B_{n,\sigma}(z)} \varphi(|\rho_k(f; z)|) \leq \gamma_n^{-1} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi(\sigma\beta_n) \mu_{n,\sigma}(z), \quad (21)$$

где предполагается, что если $B_{n,\sigma}(z) = \{\emptyset\}$, то $\sum_{B_{n,\sigma}(z)} = 0$.

Если $\mu_{n,\sigma}(z) \geq 0$, K_j – все элементы множества $B_{n,\sigma}(z)$, то применяя соотношение (6), в котором $r = \mu_{n,\sigma}(z)$, $q = 1$, получаем

$$\mu_{n,\sigma}(z) \leq \gamma_n e^{1-\sigma/c}, \quad (22)$$

где C – константа при величине $\ln^+((\eta(n) - n)/r)\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty$ в неравенстве (6).

В силу неравенства [5]

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi(u\sigma) e^{-\sigma/b} \leq C_1 \varphi(u) \quad \forall u \in (0, (2ab)^{-1}), \quad \varphi \in \Phi,$$

в предположении, что $b = C$, a – константа, входящая в определение множества Φ , вследствие (21) и (22)

$$H_n^\varphi(f; z) \leq C_2 \varphi(\beta_n). \quad (23)$$

Согласно (20) и (23) приходим к утверждению теоремы 1.

На основании соотношения (18) леммы 2 аналогично доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}_0$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$. Тогда $\forall f \in A^\psi H_\infty(D) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z \in D} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(|\rho_k(f; z)|) \leq K \varphi(\psi(n) E_n(f^\psi)_\infty), \quad K = K(\varphi). \quad (24)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\varphi(\cdot) \in \Phi$ и $\Lambda = (\lambda_k(u) \geq 0)$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in U$, таковы, что $\forall u \in U$ числа $\lambda_k(u)$, $\psi(k)$ не возрастают. Тогда $\forall f \in A^\psi H_\infty(D)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D} H_n^\varphi(f; z; \Lambda) \leq K \left\{ \lambda_n(u) (\eta(n) - n) \varphi(\psi(n) E_n(f^\psi)_\infty) \right. \\ \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u) \varphi(\psi(k) E_k(f^\psi)_\infty) \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

$K = K(\varphi)$ – величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$, $f(\cdot) \in A^\psi H_\infty(D)$ и не зависит от выбора последовательности $\Lambda = (\lambda_k(u))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим лишь схему доказательства. Положим $n_0 = n$, $j \in \mathbb{N}$

$$n_j = \begin{cases} [\eta(n_{j-1})], & n_{j-1} \leq [\eta(n_{j-1})], \\ [\eta(n_{j-1})] + 1, & n_{j-1} = [\eta(n_{j-1})]. \end{cases} \quad (26)$$

Известно (см., например, [4]), что $\gamma_{n_j} / \gamma_{n_{j-1}} \leq l \quad \forall j \geq 1$.

Пусть

$$\begin{aligned} J = \{j \in \mathbb{N} : \gamma_{n_j} \leq 2l\}, \quad J' = \{j \in \mathbb{N} : \gamma_{n_j} > 2l\}, \\ U_{n_j}(f; z) = \sum_{k=n_j}^{[\eta(n_j)]} \lambda_k(u) \varphi(|\rho_k(f; z)|), \quad z \in D. \end{aligned}$$

В принятых обозначениях

$$H_n^\varphi(f; z; \Lambda) = \sum_{k \in J} U_{n_j}(f; z) + \sum_{j \in J'} U_{n_j}(f; z).$$

В силу (14)

$$\eta(k) - k < C(\eta(n_j) - n_j), \quad \psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} \quad \forall u \in [n_j, \eta(n_j)].$$

Отсюда, если $j \in J$, то $\eta(k) - k < C_1 \quad \forall k \in [n_j, \eta(n_j)]$. С учетом этого

$$\sum_{j \in J} U_{n_j}(f; z) \leq C_2 \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u) \varphi(\psi(k) E_k(f^\psi)_\infty). \quad (27)$$

Если $j \in J'$, то вследствие (26)

$$n_{j-1} + 1 < n_j \leq \eta(n_{j-1}), \quad n_j = [\eta(n_{j-1})].$$

Стало быть

$$n_{j-1} + 1 < n_j \leq \eta(n_{j-1}). \quad (28)$$

Далее, так как числа $\lambda_k(u)\psi(k)$ не возрастают, то $\forall k \in [n_j, [\eta(n_j)]] \quad \forall u \in U$

$$\lambda_k(u) \leq \frac{\lambda_{n_j}(u)\psi(n_j)}{\psi(\eta(n_j))} = \frac{\lambda_{n_j}2\psi(\eta(n_j))}{\psi(\eta(n_j))} = 2\lambda_{n_j}(u). \quad (29)$$

Согласно (19), (28) и (29)

$$U_{n_j}(f; z) \leq K\lambda_{n_j}(u)\gamma_{n_j}\varphi(\psi(n_{n_j})E_{n_j}(f^\psi)_\infty).$$

На основании же (26) и того, что $\forall k \in [n_{j-1}, [\eta(n_{j-1})]]$

$$\lambda_{n_j}(u) = \frac{\lambda_{n_j}(u)\psi(n_j)}{\psi(n_j)} \leq \frac{\lambda_k(u)\psi(n_{j-1})}{\psi(\eta(n_{j-1}))} = \frac{2\lambda_k(u)\psi(\eta(n_{j-1}))}{\psi(\eta(n_{j-1}))} = 2\lambda_k(u),$$

получаем

$$U_{n_j}(f; z) \leq K_1 \sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]} \lambda_k(u)\varphi(\psi(k)E_k(f^\psi)_\infty). \quad (30)$$

Если в сумме $\sum_{j \in J'}$ присутствует слагаемое с индексом $j = 0$, то, выделяя его отдельно и принимая во внимание (29), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J'} U_{n_j}(f; z) &\leq K_2 \left\{ \lambda_n(u)(\eta(n) - n)\varphi(\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in J' \setminus \{0\}} \sum_{k=n_{j-1}}^{[\eta(n_{j-1})]} \lambda_k(u)\varphi(\psi(k)E_k(f^\psi)_\infty) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Вследствие (27) и (31) получаем (25).

Используя неравенство (24), аналогично доказывается такое утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\varphi \in \Phi$ и последовательность $\Lambda = (\lambda_k(u))$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда $\forall f \in A^\psi H_\infty(D) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D} H_n^\varphi(f; z; \lambda) &\leq K \left\{ n\lambda_n(u)\varphi(\psi(n)E_n(f^\psi)_\infty) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi(\psi(k)E_k(f^\psi)_\infty) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Полагая в (25) и (32) $n = 1$, в условиях теорем 3 и 4 будем иметь

$$\sup_{z \in D} H_1^\varphi(f; z; \lambda) \leq K \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u)\varphi(\psi(k)E_k(f^\psi)_\infty) \right\}. \quad (33)$$

Соотношение (33) позволяет устанавливать оценки для достаточно широкого спектра φ -сильных средних рядов Тейлора функций $f \in A^\psi H_\infty(D)$, если предполагать, что последовательность функций $\Lambda = (\lambda_k(u))$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in U$, определяет метод суммирования рядов и при каждом фиксированном $u \in U$ элементы $\lambda_k(u)$ удовлетворяют условиям теоремы 3 или 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, Наукова Думка, Киев, 1987.
- [2] В. В. Савчук, “Скорость сходимости, ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций”, *Укр. матем. журн.*, **50**:7 (1998), 1001–1003.
- [3] Н. Л. Пачулиа, “О сильной суммируемости рядов Фурье (ψ, β) -дифференцируемых функций”, *Укр. матем. журн.*, **41**:6 (1989), 808–814.
- [4] Н. Л. Пачулиа, А. И. Степанец, “Сильная суммируемость рядов Фурье на классах (ψ, β) -дифференцируемых функций”, *Матем. заметки*, **44**:4 (1988), 506–516.
- [5] V. Totik, “On the strong approximation of Fourier series”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **35**:1–2 (1980), 151–172.
- [6] V. Totik, “Notes on Fouries series: strong approximation”, *J. Approx. Theory*, **43**:2 (1985), 105–111.
- [7] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965.

Р. А. Ласурия

Абхазский государственный университет, Сухум

Поступило

25.02.2002

Исправленный вариант

16.01.2007