Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Лобанов, Метод Важевского для нелинейных эволюционных уравнений, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 705–714

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:04:19

Метод Важевского для нелинейных эволюционных уравнений

С. Г. Лобанов

Обоснована схема сведения широкого класса нелинейных уравнений (в том числе и некоторых уравнений с частными производными) к обыкновенным дифференциальным уравнениям в локально выпуклых пространствах. Возможности этого метода демонстрируются на примере некоторого класса нелинейных гиперболических уравнений с частными производными.

Библиография: 8 названий.

Один из способов доказательства теоремы о неявной функции, предложенный для функций в конечномерных пространствах Важевским [1], основан на применении вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). При этом удается оценить размер области существования неявной функции (см. также упражнение 2.3 главы II в [2] и [3]). Для банаховых пространств этот же прием описан в упражнении 12 главы 2 книги [4]. Метод исследования нелинейных эволюционных уравнений, в том числе некоторых уравнений с частными производными, основанный на исследовании свойств множества решений некоторых линейных эволюционных уравнений, предложен автором в [5]. Завершающим элементом схемы этого метода, сохраняющей в общих чертах замысел Важевского, является доказательство существования решения некоторой задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в локально выпуклом пространстве (ЛВП). В настоящей работе возможности этого метода демонстрируются на примере некоторого класса нелинейных гиперболических уравнений с частными производными, изученного ранее в книге Мизохаты [6]. Показано, что новый подход позволяет получить не уступающие результаты.

1. Схема метода. Всюду далее под дифференцируемостью отображений ЛВП будем понимать дифференцируемость по Адамару: линейное непрерывное отображение $DF(x): X \rightarrow E$ ЛВП X в ЛВП E называется *производной по Адамару* отображения $F: U \rightarrow E$ в точке $x \in U$, где U – открытое подмножество X , если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(x + ty) - F(x) - tDF(x)y) = 0$$

равномерно по $y \in A$ для всякого секвенциально компактного множества A . Нам важно, что композиция дифференцируемых по Адамару отображений дифференцируется по обычному правилу. Всякое дифференцируемое по Фреше отображение нормированных пространств дифференцируемо по Адамару.

Следующая теорема имеет тривиальное доказательство. Тем не менее, именно она объединяет все дальнейшие построения в единую схему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E и X – секвенциально полные ЛВП, U – открытое подмножество X , $0 \in U$, $F: U \rightarrow E$ – дифференцируемое отображение, причем $F(0) = 0$ и при некотором $h \in E$ существует такое отображение $VF_h: U \rightarrow X$, что $DF(x)(VF_h(x)) = h$ при всех $x \in U$. Тогда если уравнение $\dot{x} = VF_h(x)$ имеет в ЛВП X определенное на отрезке $[0, 1]$ решение $\theta \mapsto x(\theta)$, удовлетворяющее условию $x(0) = 0$, то $F(x(1)) = h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно правилу дифференцирования композиции отображений

$$\frac{dF(x(\theta))}{d\theta} = DF(x(\theta)) \frac{dx(\theta)}{d\theta} = DF(x(\theta))(VF_h(x(\theta))) = h$$

при всех $\theta \in [0, 1]$. Следовательно, $F(x(\theta)) = F(x(0)) + \theta h = \theta h$.

Таким образом, достаточным условием разрешимости нелинейного уравнения

$$F(x) = h \quad (1)$$

является существование при всех $x \in U$ решения $y \in X$ линейного уравнения

$$DF(x)y = h \quad (2)$$

($VF_h(x)$ – одно из таких решений) и существование на отрезке $[0, 1]$ решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в ЛВП X (работа [7] является обзором теории таких уравнений)

$$\dot{x} = VF_h(x), \quad x(0) = 0. \quad (3)$$

В теореме 1 условия $0 \in U$ и $F(0) = 0$ не являются ограничением общности. Можно выбрать некоторый элемент $x_0 \in U$ и перейти к уравнению $\tilde{F}(x) = \tilde{h}$, где $\tilde{F}(x) = F(x + x_0) - F(x_0)$, $\tilde{h} = h - F(x_0)$.

Заметим, что в некоторых случаях сложность исследования уравнения (2) существенно зависит от правой части уравнения и при замене h на $h - F(x_0)$ могут возникнуть дополнительные трудности. Например, если h – гладкая функция из функционального пространства E , то $F(x_0)$ может быть функцией меньшей гладкости при неудачном выборе x_0 . Кроме того, доставляемое теоремой 1 решение уравнения (1) может зависеть от x_0 .

2. Приложение к задачам о неподвижных точках дифференцируемых отображений. Пусть X – подпространство ЛВП E , наделенное топологией так, что X – секвенциально полное ЛВП, непрерывно вложенное в E , W – открытое подмножество X . Тогда неподвижные точки дифференцируемого отображения $P: W \subseteq X \rightarrow E$ удовлетворяют уравнению $F(x) = P(x) - x = 0$. Если x_0 – некоторая точка W , то описанная выше схема приводит к уравнению $\tilde{F}(x) = \tilde{h}$, где $\tilde{F}(x) = P(x) - x - P(x_0) + x_0$, $\tilde{h} = x_0 - P(x_0)$.

Поскольку $D\tilde{F}(x) = DP(x) - I$, где I – тождественное отображение, уравнению (2) соответствует уравнение $(DP(x) - I)y = x_0 - P(x_0)$. Для продолжения действий в рамках общей схемы не обязательно требовать непрерывную обратимость оператора $(DP(x) - I)$. Требуется лишь, чтобы указанное линейное относительно y уравнение имело какое-нибудь решение при всех $x \in W$ для данной правой части. Утрированный пример: если x_0 и есть неподвижная точка, то уравнение заведомо имеет решение $y = 0$ при любых свойствах оператора $(DP(x) - I)$.

Если все же оператор $(DP(x) - I)$ обратим при всех $x \in W$, то линейное уравнение однозначно разрешимо и соответствующее уравнение (3) принимает вид $\dot{x} = (DP(x) - I)^{-1}(x_0 - P(x_0))$, а соответствующее начальное условие $x(0) = x_0$. Если на отрезке $[0, 1]$ найдется решение x с начальным условием $x(0) = x_0$, то $x(1)$ – неподвижная точка отображения P .

Например, отображение $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^2 - 2$ имеет две неподвижные точки $x = -2/3$ и $x = 1$. В случае $x_0 = 0$ приходим к задаче Коши $\dot{x} = 2/(6x - 1)$, $x(0) = 0$, с решением $x = (1 - \sqrt{1 + 24t})/6$, для которого $x(1) = -2/3$. В случае $x_0 = 2$ получается задача Коши $\dot{x} = -8/(6x - 1)$, $x(0) = 2$, с решением $x = (1 + \sqrt{1 - 12(8t - 10)})/6$, для которого $x(1) = 1$.

Отображение $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 1$, не имеет неподвижных точек. Поэтому получаемая при $x_0 = 0$ задача Коши $\dot{x} = -1/(2x - 1)$, $x(0) = 0$, имеет непродолжаемое на весь отрезок $[0, 1]$ решение $x = (1 - \sqrt{1 - 4t})/2$.

3. Приложение к задачам об эволюционных дифференциальных уравнениях. Всюду далее через $D_k f(x_1, \dots, x_n)$ обозначается производная отображения f по k -му аргументу в точке $(x_1, \dots, x_n)$. Как всегда, это есть линейное непрерывное отображение, т.е. “полная” производная. Частные производные по числовым переменным будут обозначаться при помощи верхних мультииндексов $D^\alpha f$ или записываться в классическом виде как $\partial/\partial x_k$.

Пусть G – секвенциально полное ЛВП, G_1 – подпространство G , наделенное топологией так, что G_1 – секвенциально полное ЛВП, непрерывно вложенное в G , W – открытое подмножество G_1 , $[0, T]$ – отрезок вещественной прямой, $f: [0, T] \times W \rightarrow G$ – непрерывное по совокупности переменных и дифференцируемое по второму аргументу отображение, причем отображение $(t, x, y) \mapsto D_2 f(t, x)y$, $[0, T] \times W \times G_1 \rightarrow G$, непрерывно.

Для эволюционного уравнения относительно $x \in C([0, T], G_1)$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (4)$$

редукция к задаче о неподвижной точке может привести к задаче Коши (3), существование решения которой удастся доказать лишь на отрезке $[0, \theta_{\max}]$ с $\theta_{\max} < 1$, что не позволит получить каких-либо решений (1). Далее указаны способы преодоления такого препятствия.

В случае $f(t, 0) \equiv 0$ положим $X = C([0, T], G_1)$, $E = C([0, T], G)$,

$$F(x)(t) = x(t) - \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (5)$$

$U = \{x \in C([0, T], G_1) : x([0, T]) \subseteq W\}$, и рассмотрим уравнение (1) с тождественно равной $h \in G$ правой частью. Тогда уравнение относительно $y \in X$

$$y(t) - \int_0^t D_2 f(\tau, x(\tau))y(\tau) d\tau = h \quad (6)$$

соответствует уравнению (2). Если теперь решение начальной задачи (3) определено на отрезке $[0, \theta_{\max}]$, то существует на отрезке $[0, T]$ решение исходного уравнения (4) при всех $x_0 = \theta h$, $\theta \in [0, \theta_{\max}]$. Тем самым удастся доказать разрешимость уравнения (4) на отрезке $[0, T]$ для достаточно малых значений x_0 .

Предложенная выше схема может быть приспособлена для построения решения уравнения (4) и в случае $f(t, 0) \neq 0$. Для этого вслед за Роббиным [8] заметим, что если $\varphi_a(t)$ – решение уравнения

$$\varphi(t) - a \int_0^t f(a\tau, \varphi_0 + \varphi(\tau)) d\tau = 0$$

на отрезке $[0, T]$ при некотором $a > 0$, то $\psi(t) = \varphi_0 + \varphi_a(\tau/a)$ – решение на отрезке $[0, aT]$ уравнения

$$\psi(t) - \varphi_0 - \int_0^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau = 0.$$

В связи с этим положим $X = \mathbb{R} \times C([0, T], G_1)$, $E = \mathbb{R} \times C([0, T], G)$,

$$F(x)(t) = \left(x_1, x_2(t) - x_1 \int_0^t f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) d\tau \right),$$

$h = (1, 0)$, $U = [0, 1] \times \{\varphi \in C([0, T], G_1) : \varphi([0, T]) \subseteq W\}$. Тогда $F(0) = 0$ и если решение уравнения (3) определено на отрезке $[0, \theta_{\max}]$, то решение (4) получается на отрезке $[0, \theta_{\max}T]$. Действительно, в этом случае, как показывает доказательство теоремы 1, $F(x(\theta_{\max})) = \theta_{\max}h$, а это значит, что для первых компонентов имеет место равенство $x_1(\theta_{\max}) = \theta_{\max}$. Поэтому равенство вторых компонентов можно записать как

$$x_2(t) - \theta_{\max} \int_0^t f(\theta_{\max}\tau, x_0 + x_2(\tau)) d\tau = 0 \quad \text{при всех } t \in [0, T].$$

Тем самым удастся доказать разрешимость уравнения (4) для произвольных значений x_0 на, быть может, малом отрезке $[0, \theta_{\max}T]$.

В данном случае уравнению (2) соответствует система уравнений

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ y_2(t) - y_1 \int_0^t f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) d\tau - x_1 y_1 \int_0^t \tau D_1 f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) d\tau \\ - x_1 \int_0^t D_2 f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) y_2(\tau) d\tau = 0, \end{cases}$$

которая приводит к линейному относительно неизвестной функции $y(t)$ уравнению

$$\begin{aligned} y(t) - x_1 \int_0^t D_2 f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) y(\tau) d\tau \\ = \int_0^t f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) d\tau + x_1 \int_0^t \tau D_1 f(x_1\tau, x_0 + x_2(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

4. Приложение к задачам для нелинейных гиперболических систем уравнений с частными производными. В этом разделе мы придерживаемся обозначений и терминологии из книги [6].

Пусть m, n, N – некоторые натуральные числа, причем $m \geq [n/2] + 2$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ – пространство квадратично суммируемых функций n переменных, $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева функций с квадратично суммируемыми обобщенными производными m -го порядка, $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций, имеющих ограниченные непрерывные производные k -го порядка для $k = 0, \dots, m$, $G = [L_2(\mathbb{R}^n)]^N$,

$G_1 = [\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)]^N, [\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n)]^N$ – пространства векторных функций с N компонентами из соответствующих пространств. Все вышеперечисленные пространства рассматриваются с обычными топологиями [6]. Далее для краткости мы будем обозначать соответствующие пространства числовых и векторных функций просто через $L_2, \mathcal{D}^m, \mathcal{B}^m$.

Известно (теорема 2.8 из [6]), что при $m \geq [n/2] + 2$ всякая функция $u \in \mathcal{D}^m$ принадлежит одновременно пространству $\mathcal{B}^1$, причем

$$\|u\|_{\mathcal{B}^1} \leq c_1(m, n) \|u\|_m, \quad (7)$$

где $c_1(m, n)$ – постоянная, зависящая от m и n .

Пусть далее $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $B, A_k, k = 1, \dots, n$, – такие отображения Ω в пространство матриц порядка N , что

Н1) отображения $t \mapsto B(t, x) \in \mathcal{B}^m, t \mapsto A_k(t, x) \in \mathcal{B}^m, t \mapsto (\partial/\partial t)A_k(t, x) \in \mathcal{B}^0$ непрерывны.

Отображение $g: \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ будем предполагать $(m+2)$ раза непрерывно дифференцируемым, причем

Н2) $g(t, x, 0) = 0$ при всех $(t, x) \in \Omega$;

Н3) для всех $C > 0$ имеем

$$\max_{|\beta| \leq m+2} \sup \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u} \right)^\beta g(t, x, u) \right| : (t, x) \in \Omega, |u| \leq C \right\} < \infty.$$

Последнее условие выполнено, например, если g не зависит от второго аргумента.

Пусть

Н4) h – некоторый элемент G_1 .

Предположим, что W – выпуклая окрестность нуля в G_1 , и определим отображение $f: [0, T] \times W \rightarrow G$, полагая

$$f(t, u)(x) = \sum_{k=1}^n A_k(t, x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + B(t, x)u(x) + g(t, x, u(x)).$$

ЛЕММА 1. *Отображение $f: [0, T] \times W \rightarrow G$ непрерывно по совокупности переменных и дифференцируемо по второму аргументу, причем отображение $(t, x, y) \mapsto D_2 f(t, x)y, [0, T] \times W \times G_1 \rightarrow G$ непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки включения $f(t, u) \in G$, непрерывности функции f и дифференцируемости f по переменной u достаточно установить наличие этих свойств у нелинейного отображения $(t, u) \mapsto g(t, x, u(x))$.

Соотношение

$$g(t, x, u_1) - g(t, x, u_2) = \left[\int_0^1 D_3 g(t, x, u_2 + \theta(u_1 - u_2)) d\theta \right] (u_1 - u_2) \quad (8)$$

вместе с условием Н2 приводит к соотношению

$$g(t, x, u(x)) = g(t, x, u(x)) - g(t, x, 0) = \left[\int_0^1 D_3 g(t, x, \theta u(x)) d\theta \right] u(x),$$

которое с учетом неравенства (7) и условия Н3 доказывает включение $g(t, \cdot, u(\cdot)) \in G$.

Непрерывность f вытекает из (8), неравенства (7), условия НЗ и соотношения

$$\begin{aligned} & g(t_1, x, u_1(x)) - g(t_2, x, u_2(x)) \\ &= \left[\int_0^1 D_1 g(t_2 + \theta(t_1 - t_2), x, u_1(x)) d\theta \right] (t_1 - t_2) \\ & \quad + \left[\int_0^1 D_3 g(t_2, x, u_2(x) + \theta(u_1(x) - u_2(x))) d\theta \right] (u_1(x) - u_2(x)). \end{aligned}$$

Из (8), неравенства (7) и условия НЗ

$$\begin{aligned} & \frac{g(t, x, u(x) + \gamma \Delta u(x)) - g(t, x, u(x))}{\gamma} - D_3 g(t, x, u(x)) \Delta u(x) \\ &= \left[\int_0^1 (D_3 g(t, x, u(x) + \theta \gamma \Delta u(x)) - D_3 g(t, x, u(x))) d\theta \right] \Delta u(x) \\ &= \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 D_3 D_3 g(t, x, u(x) + \theta_1 \theta \gamma \Delta u(x)) d\theta_1 \right] \theta \gamma \Delta u(x) d\theta \right] \Delta u(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в G при $\gamma \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, T]$, $u \in W$, $\Delta u \in V$ для любых ограниченных множеств $V, W \subset G_1$, что доказывает дифференцируемость по Адамару (и даже по Фреше) отображения f по переменной u и непрерывность производной по совокупности переменных $t, u, \Delta u$.

Согласно условию Н2 $f(t, 0) \equiv 0$ и можно применить описанную в предыдущем разделе для функции (5) схему к уравнению

$$u(t, x) - \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n A_k(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_k} + B(\tau, x) u(\tau, x) \right) d\tau - \int_0^t g(\tau, x, u(\tau, x)) d\tau = h(x). \quad (9)$$

В данном случае ЛВП $X = C([0, T], \mathscr{D}^m)$, ЛВП $E = C([0, T], L_2)$, уравнению (6) соответствует при замене y на u , x на ψ линейное уравнение

$$\begin{aligned} & u(t, x) - \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n A_k(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_k} + B(\tau, x) u(\tau, x) \right) d\tau \\ & \quad - \int_0^t D_3 g(\tau, x, \psi(\tau, x)) u(\tau, x) d\tau = h(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Приведем теперь некоторые сведения из теории линейных гиперболических уравнений, содержащиеся в книге [6].

Будем говорить, что для уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^n A_k(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_k} + B(t, x) u(t, x) + f(t, x) \quad (11)$$

выполнены условия регулярной гиперболичности, если при всех $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ корни $\lambda_i(t, x, \xi)$ уравнения

$$\det \left(\lambda I - \sum_{k=1}^n A_k(t, x) \xi_k \right) = 0$$

вещественны и различны, причем при $i \neq j$

$$\inf\{|\lambda_i(t, x, \xi) - \lambda_j(t, x, \xi)| : (t, x) \in \Omega, |\xi| = 1\} > 0.$$

ТЕОРЕМА 2 ([6; теорема 6.9]). Пусть отображения

$$t \mapsto B(t, x) \in \mathcal{B}^m, \quad t \mapsto A_k(t, x) \in \mathcal{B}^{\max[1+\sigma, m]}, \quad \sigma > 0, \quad t \mapsto \frac{\partial}{\partial t} A_k(t, x) \in \mathcal{B}^0$$

непрерывны на отрезке $[0, T]$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, и для уравнения (11) выполнены условия регулярной гиперболичности. Тогда для любой функции $f \in C([0, T], \mathcal{D}^m)$ и любого начального значения $u_0 \in \mathcal{D}^m$ существует единственное решение $u \in C([0, T], \mathcal{D}^m) \cap C^1([0, T], \mathcal{D}^{m-1})$ уравнения (11). При этом для $u(t)$ справедливо энергетическое неравенство

$$\|u(t)\|_m \leq c(m, T) \left[\|u(0)\|_m + \int_0^t \|f(s)\|_m ds \right]. \quad (12)$$

С помощью теоремы 2 мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия Н1, Н3, Н4, W – выпуклая ограниченная окрестность нуля в G_1 , и для уравнения (10) выполнены условия регулярной гиперболичности. Тогда для любого начального значения $h \in \mathcal{D}^m$ существует единственное решение $u \in C([0, T], \mathcal{D}^m) \cap C^1([0, T], \mathcal{D}^{m-1})$ уравнения (10). При этом функция $u = VF_h(\psi)$ непрерывна и удовлетворяет на множестве $U = \{\psi \in C([0, T], G_1) : \psi([0, T]) \subseteq W\}$ условию Липшица с константой, которая является неубывающей функцией от $\|h\|_m$.

Теорема 3 позволяет применить теорему Пикара об ОДУ в банаховых пространствах к задаче Коши (3).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для рассматриваемого уравнения (1) задача Коши (3) имеет единственное решение на отрезке $[0, \theta_{\max}]$, где число $\theta_{\max} > 0$ можно выбрать единым для всех $h \in V$ в случае ограниченного множества $V \subset G_1$.

Как было показано в предыдущем разделе, разрешимость задачи Коши (3) влечет разрешимость нелинейного уравнения (9).

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 3 для любого ограниченного множества $V \subset \mathcal{D}^m$ найдется такое число $\theta_{\max} > 0$, что уравнение (9) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение $u \in C([0, T], \mathcal{D}^m)$ для всех начальных значений $u_0 = \theta h$, $\theta \in [0, \theta_{\max}]$, $h \in V$.

Один из основных результатов книги [6] о нелинейных системах гиперболических уравнений (теорема 7.3) содержит условия существования локального решения (т.е. на части отрезка $[0, T]$) только для нелинейного слагаемого вида $g(t, x, u) = \beta(x)f(t, x, 0) + \alpha(x)\{f(t, x, u) - f(t, x, 0)\}$, где α, β – некоторые гладкие функции с ограниченным носителем.

Доказательство единственности решения из следствия (2) приводится в конце следующего раздела.

5. Доказательство теоремы 3. Отображение $t \rightarrow D_3g(t, x, \psi(t, x)) \in \mathcal{B}^1$ непрерывно. Поэтому можно применить теорему 2 для уравнения (10) при $m = 1$. Таким образом, для всякого $\psi \in X = C([0, T], \mathcal{D}^m)$ доказано существование единственного решения $u = VF_h(\psi) \in C([0, T], \mathcal{D}^1)$ уравнения (10). Требуется доказать, что $u \in X$ для первоначально заданного m , и исследовать зависимость решения $u = VF_h(\psi)$ от функции ψ .

Воспользуемся сглаживанием $\psi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \psi$ функции $\psi \in X$ по переменной x при помощи свертки с бесконечно дифференцируемой финитной функцией $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, $\rho(x) \geq 0$, $\rho(x) = 0$ при $|x| > 1$, $\int \rho(x) dx = 1$. Как хорошо известно, $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi$ в пространстве X при $\varepsilon \downarrow 0$; кроме того, если W – ограниченное множество из G_1 , то ограничено в X множество $\{\psi_\varepsilon : \psi \in U, \varepsilon \in (0, 1]\}$. Напомним, $U = \{x \in C([0, T], G_1) : x([0, T]) \subseteq W\}$.

Решение u_ε уравнения (10) для функции ψ_ε по теореме 2 принадлежит G_1 , поскольку $\psi_\varepsilon \in \bigcap_{s=1}^\infty C([0, T], \mathcal{D}^s)$. Отсюда

$$\|u_\varepsilon(t)\|_m \leq c(m, T) \left[\|h(0)\|_m + \int_0^t \|D_3g(s, (\cdot), \psi_\varepsilon(s, (\cdot)))u_\varepsilon(s, (\cdot))\|_m ds \right]. \quad (13)$$

ЛЕММА 2. Пусть

$$M_{\psi, \varepsilon} = \max_{|\beta| \leq m+1} \sup \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u} \right)^\beta g(t, x, u) \right| : (t, x) \in \Omega, |u| \leq \sup_{\Omega} \{|\psi_\varepsilon(t, x)|\} \right\}.$$

Тогда

$$\|D_3g(s, (\cdot), \psi_\varepsilon(s, (\cdot)))u_\varepsilon(s, (\cdot))\|_m \leq c_2(n, m) M_{\psi, \varepsilon} \{1 + \|\psi_\varepsilon(s)\|_m^m\} \|u_\varepsilon(s)\|_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все частные производные D^α , $|\alpha| \leq m$, по переменной x компонентов векторной функции $D_3g(s, x, \psi_\varepsilon(s, x))u_\varepsilon(s, x)$ можно представить в виде линейной комбинации с не большими по абсолютной величине $CM_{\psi, \varepsilon}$ коэффициентами, где множитель C зависит только от m и n , от произведений нескольких частных производных функции ψ_ε и от одной из частных производных функции u_ε .

Действительно, как показано в предложении 2.4 из [6], произведение гладкой функции $a(x)$ из пространства $\mathcal{B}^m$ и распределения $b(x)$ из пространства $\mathcal{D}^m$ принадлежит пространству $\mathcal{D}^m$ и можно пользоваться формулой Лейбница

$$D^\alpha(ab)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta a(x) D^{\alpha-\beta} b(x), \quad |\alpha| \leq m.$$

Если $a(x)$ и $b(x)$ – компоненты векторных функций $D_3g(s, x, \psi_\varepsilon(s, x))$ и $u_\varepsilon(s, x)$, то по правилу дифференцирования композиции отображений получим

$$D^\beta a(x) = \sum_{\substack{\sum_j \nu_j \leq |\beta| \\ l \leq |\beta|}} c_{\nu_1 \dots \nu_l} q_{\nu_1 \dots \nu_l}(s, x, \psi_\varepsilon(s, x)) \times \prod_{j=1}^l D^{\nu_j} r_j(s, x).$$

Здесь $q_{\nu_1 \dots \nu_l}(s, x, \psi_\varepsilon(s, x))$ – это одна из производных вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u} \right)^\nu g_i(s, x, u), \quad |\nu| \leq |\beta| + 1,$$

при $u = \psi_\varepsilon(s, x)$. По абсолютной величине все такие сомножители не превосходят $M_{\psi, \varepsilon}$. Произведение

$$\prod_{j=1}^l D^{\nu_j} r_j(s, x)$$

есть произведение частных производных некоторых компонентов r_j векторной функции $\psi_\varepsilon(s, x)$.

Для завершения доказательства воспользуемся оценкой L_2 -нормы произведения частных производных нескольких функций. В теореме 7.1 из [6] среди прочего доказывается, что

$$\left\| \prod_{j=1}^l D^{\nu_j} u_j \right\|_{L_2} \leq c \prod_{j=1}^l \|u_j\|_m,$$

если $u_j \in \mathcal{D}^m$ при всех j и $|\nu_1| + \dots + |\nu_l| \leq m$.

Применяя результат леммы 2 для оценки подынтегрального выражения в неравенстве (13), получаем возможность применить неравенство Гронуолла

$$\|u_\varepsilon(t)\|_m \leq c^2(m, T) \|h(0)\|_m \exp \left(\int_0^t c_2(n, m) M_{\psi, \varepsilon} \{1 + \|\psi_\varepsilon(s)\|_m^m\} ds \right). \quad (14)$$

Отсюда следует, что если U – ограниченное множество из X , то ограничено в X множество $\{u_\varepsilon : \psi \in U, \varepsilon \in (0, 1]\}$.

Обозначим через $u_{1, \varepsilon}$ и $u_{2, \delta}$ решения уравнения (10) для сглаженных функций $\psi_{1, \varepsilon}$ и $\psi_{2, \delta}$. Тогда функция $u = u_{1, \varepsilon} - u_{2, \delta}$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} u(t, x) - \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n A_k(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_k} + B(\tau, x) u(\tau, x) \right) d\tau \\ - \int_0^t f_1(\tau, x) d\tau - \int_0^t f_2(\tau, x) d\tau = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\tau, x) &= D_3 g(\tau, x, \psi_{1, \varepsilon}(\tau, x)) u(\tau, x), \\ f_2(\tau, x) &= [D_3 g(\tau, x, \psi_{1, \varepsilon}(\tau, x)) - D_3 g(\tau, x, \psi_{2, \delta}(\tau, x))] u_{2, \delta}(\tau, x). \end{aligned}$$

По лемме 2

$$\begin{aligned} \|f_1(\tau)\|_m &\leq c_2(n, m) M_{\psi_{1, \varepsilon}} \{1 + \|\psi_{1, \varepsilon}(\tau)\|_m^m\} \|u(\tau)\|_m, \\ \|f_2(\tau)\|_m &\leq c_2(n, m) \|D_3 g(\tau, \cdot, \psi_{1, \varepsilon}(\tau, \cdot)) - D_3 g(\tau, \cdot, \psi_{2, \delta}(\tau, \cdot))\|_m \|u_{2, \delta}(\tau)\|_m. \end{aligned}$$

Применяя для разности $D_3 g(\tau, x, \psi_{1, \varepsilon}(\tau, x)) - D_3 g(\tau, x, \psi_{2, \delta}(\tau, x))$ преобразование (8), приходим к следующему заключению: если W – выпуклое ограниченное множество из G_1 , то найдутся такие числа C_1 и C_2 , что при всех $\psi_1, \psi_2 \in U, \varepsilon, \delta \in (0, 1], \tau \in [0, T]$

$$\|f_1(\tau)\|_m \leq C_1 \|u(\tau)\|_m, \quad \|f_2(\tau)\|_m \leq C_2 \|\psi_{1, \varepsilon} - \psi_{2, \delta}\|_X.$$

Поэтому из энергетического неравенства (12) для $f = f_1 + f_2$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_m &\leq c(m, T) \int_0^t \|f_1(s) + f_2(s)\|_m ds \\ &\leq c(m, T) \left[C_1 \int_0^t \|u(s)\|_m ds + C_2 T \|\psi_{1, \varepsilon} - \psi_{2, \delta}\|_X \right]. \end{aligned}$$

Теперь из неравенства Гронуолла получается оценка

$$\|u\|_X = \|u_{1,\varepsilon} - u_{2,\delta}\|_X \leq C_3 \|\psi_{1,\varepsilon} - \psi_{2,\delta}\|_X \quad (15)$$

для всех $\psi_1, \psi_2 \in U$, $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ с зависящей от выбора множества W константой C_3 . Полагая $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ и устремляя δ и ε к нулю, с учетом полноты пространства X приходим к выводу о сходимости u_ε в X к некоторому пределу u , который является решением уравнения (10). Последнее подтверждается переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнении (10) при $u = u_\varepsilon$, $\psi = \psi_\varepsilon$.

Таким образом, доказано, что единственное решение $u = VF_h(\psi)$ уравнения (10) принадлежит $C([0, T], \mathcal{D}^m)$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве (15), получаем условие Липшица для отображения VF_h

$$\|u_1 - u_2\|_X = \|VF_h(\psi_1) - VF_h(\psi_2)\|_X \leq C_3 \|\psi_1 - \psi_2\|_X.$$

Докажем теперь единственность решения уравнения (9). Если $u_1, u_2 \in X$ решения этого уравнения, то $u = u_1 - u_2$ является решением уравнения (11) для $f(t, x) = g(t, x, u_1(t, x)) - g(t, x, u_2(t, x))$ с нулевым начальным значением. Энергетическое неравенство (12) в данном случае принимает вид

$$\|u(t)\|_1 \leq c(1, T) \int_0^t \|g(s, (\cdot), u_1(s)) - g(s, (\cdot), u_2(s))\|_1 ds.$$

Из соотношения (8) следует, что подынтегральное выражение при всех $s \in [0, T]$ не превосходит $C\|u_1(s) - u_2(s)\|_1$ с некоторой константой C . Усиливая таким образом неравенство, применим затем неравенство Гронуолла и получим $\|u(t)\|_1 = 0$ при всех $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Wazewski, "Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites réelles ou complexes", *Ann. Soc. Polon. Math.*, **20** (1947), 81–120.
- [2] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [3] M. Su, "Applications of modified global existence theorems of Cauchy problem", *Nonlinear Stud.*, **9**:3 (2002), 299–306.
- [4] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, М., 1971.
- [5] С. Г. Лобанов, "О методе сведения некоторых классов нелинейных уравнений к эволюционным уравнениям в локально выпуклых пространствах", *Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева*, т. 2, Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, М., 1996, 390–393.
- [6] С. Мизохата, *Теория уравнений с частными производными*, Мир, М., 1977.
- [7] С. Г. Лобанов, О. Г. Смолянов, "Обыкновенные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах", *УМН*, **49**:3 (1994), 93–168.
- [8] J. W. Robbin, "On the existence theorem for differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:4 (1968), 1005–1006.

С. Г. Лобанов

Высшая школа экономики (Государственный университет)

E-mail: lobanov@hse.ru

Поступило

20.06.2006