Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шаевска, Свойство кривизн и кручения регулярного семейства кривых в E^n , *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 757–762

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:33:45

Свойство кривизны и кручения регулярного семейства кривых в E^n

М. Шаевска

В работе доказано, что для регулярного семейства алгебраических кривых в E^n существует последовательность точек, на которой одновременно стремятся к нулю все кривизны кривых, за исключением последней.

Библиография: 5 названий.

В работах Бернштейна, Ефимова, Аминова и многих других рассмотрено влияние средней кривизны H и кривизны Гаусса K на размер области существования регулярной поверхности.

В работе Ефимова [1] относительно регулярной проекции поверхности вида $z = z(x, y)$ с кривизной Гаусса $K \leq -1$ на квадрат со стороной a на плоскости x, y доказана теорема (теорема 1), говорящая о том, что сторона квадрата ограничена сверху абсолютной постоянной: $a \leq 14$.

В статье [2] получено ограничение сверху ребра куба, в котором существует регулярное алгебраическое векторное поле с кривизной $|K| \geq K_0 = \text{const} > 0$ (теорема 2).

В работе [3] Аминов рассмотрел регулярное семейство гиперповерхностей в кубе с ребром a в E^n , заданное уравнением $z(x^1, x^2, \dots, x^n) = \text{const}$ со средней кривизной H , удовлетворяющей неравенству $|H| \geq H_0 = \text{const} > 0$. Доказана теорема (теорема 3) о том, что a ограничено сверху: $a \leq 2n/H_0$. В частности, когда имеется семейство кривых на плоскости, то вместо средней кривизны берется обыкновенная кривизна кривых.

В работе [4] Аминов рассмотрел семейство подмногообразий постоянной отрицательной кривизны K_0 размерности n в $(2n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве, которое включается в ортогональную систему координат. Введено понятие многомерной системы координат Бианки. Доказана теорема 4: пусть в шаре радиуса ρ евклидова пространства E^{2n-1} задана регулярная система координат Бианки и $K_0 \leq -1$; тогда $\rho \leq \pi/4$.

Полученные результаты указывают на влияние большой отрицательной кривизны подмногообразий на ограниченность размеров области их существования.

Рассмотрим сначала семейство кривых в E^3 . Легко построить регулярное семейство кривых с постоянной кривизной $k \neq 0$ и постоянным кручением $\kappa \neq 0$ во всем

пространстве. Возьмем винтовую линию

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad a, b = \text{const},$$

и при помощи передвижения вдоль осей x и y создадим искомое семейство с $k \neq 0$:

$$\begin{cases} x = a \cos t + C_1, \\ y = a \sin t + C_2, \\ z = bt, \end{cases} \quad C_1, C_2 = \text{const}.$$

Кривизна винтовой линии $k = a/(a^2 + b^2)$, а кручение $\kappa = b/(a^2 + b^2)$.

Этот пример показывает, что обобщение теоремы 3 прямо на семейство подмногообразий с коразмерностью больше 1 является невозможным.

Рассмотрим семейство алгебраических кривых в евклидовом пространстве E^3 . Пусть семейство регулярных кривых будет задано при помощи системы уравнений $\Phi^\alpha(x^1, x^2, x^3) = c_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, на алгебраические многочлены степени $\leq m_\alpha$ во всем E^3 . Под регулярностью понимается принадлежность функций Φ^α классу C^3 и условие линейной независимости векторов $\text{grad } \Phi^\alpha$ во всех точках E^3 .

Введем следующие обозначения: k – кривизна, κ – кручение кривой из рассматриваемого семейства.

ТЕОРЕМА. Пусть задано семейство регулярных алгебраических кривых во всем пространстве. Тогда существует последовательность точек, на которой одновременно $k \rightarrow 0$ и $k^2 \kappa \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В книге Форсайта [5] дается выражение кривизны и кручения кривой, заданной в неявном виде. Введем следующие обозначения производных:

$$\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^i} := \Phi_i^\alpha.$$

Обозначим минор

$$\begin{vmatrix} \Phi_j^1 & \Phi_k^1 \\ \Phi_j^2 & \Phi_k^2 \end{vmatrix} = p^{jk}.$$

Для некоторой функции U введем дифференцирование в виде

$$U' = \frac{\partial U}{\partial x^1} p^{23} + \frac{\partial U}{\partial x^2} p^{31} + \frac{\partial U}{\partial x^3} p^{12}.$$

Обозначим

$$J = (p^{23})^2 + (p^{31})^2 + (p^{12})^2.$$

Тогда

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} p^{12} & p^{31} \\ (p^{12})' & (p^{31})' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p^{31} & p^{23} \\ (p^{31})' & (p^{23})' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p^{12} & p^{23} \\ (p^{12})' & (p^{23})' \end{vmatrix}^2}{J^3}, \quad (1)$$

$$k^2 \kappa = \frac{\begin{vmatrix} p^{12} & p^{31} & p^{23} \\ (p^{12})' & (p^{31})' & (p^{23})' \\ (p^{12})'' & (p^{31})'' & (p^{23})'' \end{vmatrix}}{J^3}. \quad (2)$$

Так как наши кривые заданы многочленами, миноры p^{ij} являются также многочленами по координатам x^1, x^2, x^3 . Каждая кривая по условию регулярна; следовательно, $J \neq 0$, т.е. какой-то минор не равен нулю. Берем p^{ij} наивысшей степени, например m . Пусть $m \neq 0$. Следовательно, в выражении k^2 знаменатель имеет степень, равную $6m$. Рассмотрим сейчас степень числителя этого выражения. Так как при его вычислении производим дифференцирование по x^i , то у многочленов $(p^{ij})'$ степень не выше $2m - 1$. Тогда у каждого из миноров

$$\begin{vmatrix} p^{ij} & p^{jk} \\ (p^{ij})' & (p^{jk})' \end{vmatrix}$$

степень не выше, чем $3m - 1$. Следовательно, числитель в выражении для кривизны является многочленом степени не больше $6m - 2$. То есть его степень ниже степени знаменателя.

Запишем знаменатель в формуле (1) в виде суммы однородного многочлена P наивысшей степени и остатка Q :

$$J = P(x^1, x^2, x^3) + Q(x^1, x^2, x^3).$$

Пусть точка x_0^1, x_0^2, x_0^3 является такой, что $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \neq 0$. Такая точка существует, а так как многочлен является однородным, то

$$P(tx_0^1, tx_0^2, tx_0^3) = t^{6m} P(x_0^1, x_0^2, x_0^3).$$

Аналогично поступаем с числителем формулы (1):

$$\mathcal{C} = \bar{P}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + \bar{Q}(x_0^1, x_0^2, x_0^3),$$

который является многочленом степени не выше $6m - 2$:

$$\bar{P}(tx_0^1, tx_0^2, tx_0^3) = t^{6m-2} \bar{P}(x_0^1, x_0^2, x_0^3).$$

Тогда получаем

$$k^2 = \frac{t^{6m-2} \bar{P}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + \bar{Q}(tx_0^1, tx_0^2, tx_0^3)}{t^{6m} P(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + Q(tx_0^1, tx_0^2, tx_0^3)}.$$

Когда $t \rightarrow \pm\infty$, то $k \rightarrow 0$.

Заметим, что k стремится к нулю вдоль прямых, которые проходят через начало системы координат и не проходят через корень уравнения $P(x^1, x^2, x^3) = 0$.

Рассмотрим формулу (2). С одной стороны, знаменатель является многочленом степени не менее $6m$, с другой,

$$\begin{aligned} (p^{ij})' &= \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^k} q^k, & q^k &= \varepsilon^{klm} p^{lm}, \\ (p^{ij})'' &= \frac{\partial^2 p^{ij}}{\partial x^k \partial x^l} q^k q^l + \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial q^k}{\partial x^r} q^r, \end{aligned}$$

т.е. числитель является многочленом степени не больше $6m - 3$. Поэтому

$$k^2 \kappa = \frac{t^{6m-3} \tilde{P}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + \tilde{Q}(tx_0^1, tx_0^2, tx_0^3)}{t^{6m} P(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + Q(tx_0^1, tx_0^2, tx_0^3)} \rightarrow 0.$$

Так как знаменатели в выражениях для k^2 и $k^2 \kappa$ совпадают, то и ряд точек, для которых эти выражения стремятся к нулю, будет одним и тем же в обоих случаях. Теорема доказана.

Приведенное доказательство не проходит для доказательства убывания кручения κ .

Вопрос о том, будет ли $\kappa \rightarrow 0$, остается без ответа.

Вывод. Семейство спиралей невозможно представить в неявном виде при помощи алгебраических функций, но можно представить с помощью тригонометрических функций

$$\Phi^1 = x - a \cos zb - C_1, \quad \Phi^2 = y - a \sin zb - C_2.$$

Это семейство кривых регулярно, так как

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi^1 &= \left(1, 0, \frac{a}{b} \sin zb\right), & \text{grad } \Phi^2 &= \left(0, 1, -\frac{a}{b} \cos zb\right), \\ [\text{grad } \Phi^1, \text{grad } \Phi^2] &\neq 0. \end{aligned}$$

Обобщим сейчас этот результат для E^n . Пусть семейство кривых будет задано системой уравнений

$$\Phi^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) = c_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1.$$

Кривизна вычисляется по формуле

$$k_1^2 = \frac{|[r'_t, r''_t]|}{|r'_t|^6},$$

где t – произвольный параметр на кривой.

Запишем поливектор

$$p^{i_1 \dots i_{n-1}} = \begin{vmatrix} \Phi_{i_1}^1 & \dots & \Phi_{i_{n-1}}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{i_1}^{n-1} & \dots & \Phi_{i_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k < \dots < i_{n-1} \leq n,$$

и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \varepsilon^{i i_1 \dots i_{n-1}} p^{i_1 \dots i_{n-1}} = q^i, & i &= 1, \dots, n, \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}, & k &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

Тогда

$$|r'_t|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (q^i)^2,$$

$$[r'_t, r''_t]^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} q^\alpha & \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^k} \\ q^\beta & \frac{\partial q^\beta}{\partial x^k} \end{vmatrix} q^k, \quad |[r'_t, r''_t]|^2 = \sum_{\alpha < \beta} ([r'_t, r''_t]^{\alpha\beta})^2.$$

Кривизна

$$k_1^2 = \frac{\sum_{\alpha < \beta} \left(\sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} q^\alpha & \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^k} \\ q^\beta & \frac{\partial q^\beta}{\partial x^k} \end{vmatrix} q^k \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (q^i)^2 \right)^3},$$

q^i – многочлены от координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. Эта формула обобщает формулу (1).

Пусть q^i степени m ; тогда знаменатель имеет степень $6m$, а числитель – $6m - 2$. Можем записать нашу кривизну, как и в 3-мерном пространстве, в виде суммы многочленов.

Пусть в точке $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$ многочлен $P(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \neq 0$. Тогда k^2 в точке $ux_0^1, ux_0^2, \dots, ux_0^n$ задается выражением

$$k^2 = \frac{u^{6m-2} \bar{P}(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) + \bar{Q}(ux_0^1, ux_0^2, \dots, ux_0^n)}{t^{6m} P(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) + Q(ux_0^1, ux_0^2, \dots, ux_0^n)}.$$

Когда $u \rightarrow \pm\infty$, то $k_1 \rightarrow 0$.

Вывод. В любом пространстве E^n для любого регулярного семейства алгебраических кривых существует последовательность точек, на которой $k_1 \rightarrow 0$.

Замечание. Предложенный метод рассмотрения кривых применим и к тем кривым, которые заданы системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \Psi^i(x^1, \dots, x^n),$$

где Ψ^i являются алгебраическими многочленами и $\sum_{i=1}^n (\Psi^i)^2 \neq 0$ (или эта сумма обращается в нуль в конечном числе точек; например, это условие выполняется для системы Лоренца).

В заключение поставим следующие задачи.

Задача 1. Пусть в шаре радиуса R задано регулярное алгебраическое порядка m семейство кривых, у которых кривизна $k \geq k_0 > 0$. Можно ли получить оценку сверху для R вида

$$R \leq f(m, k_0),$$

где f – некоторая функция?

Задача 2. Пусть задано произвольное многообразие M (например E^n, S^n, H^n) и свойство геометричности (P) . Исследовать, существует ли на M расслоение $\mathfrak{F}$ такое, что для каждого слоя выполняется свойство (P) .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. В. Ефимов, “Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **93**:4 (1953), 609–611.
- [2] Ю. А. Аминов, “Дивергентные свойства кривизн векторного поля и семейства поверхностей”, *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 103–111.
- [3] Ю. А. Аминов, “ n -мерные аналоги интегральной формулы С. Н. Бернштейна”, *Матем. сб.*, **75**:3 (1968), 375–399.
- [4] Ю. А. Аминов, “О семействах подмногообразий постоянной отрицательной кривизны в многомерном евклидовом пространстве”, *Матем. сб.*, **197**:2 (2006), 3–16.
- [5] A. R. Forsyth, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1912.

М. Шаевска

Институт математики Белостокского университета, Польша

E-mail: marzena@math.uwb.edu.pl

Поступило

31.10.2006

Исправленный вариант

01.10.2007