Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Ткебучава, К. Финэ, О безусловной сходимости разложений Фурье по системам произведений базисов в пространствах Орлича, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 741–751

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:22:17

О безусловной сходимости разложений Фурье по системам произведений базисов в пространствах Орлича

Г. Е. Ткебучава, К. Финэ

Изучается безусловность разложений Фурье по системам произведений базисов в пространствах Орлича.

Библиография: 33 названия.

1. Введение. В семействе базисов функциональных пространств особую роль играют безусловные базисы, т.е. базисы, остающиеся таковыми при любых перестановках; они имеют теоретические (см. [1]–[7]) и практические приложения (см., например, [8]–[10]). Однако многие классические функциональные пространства такими базисами не обладают [11], [12]. Среди всех безусловных базисов система Хаара имеет экстремальные свойства (см. [13]–[18]). Этот факт использовался в различных вопросах. Например, было доказано, что рефлексивность пространства Орлича является необходимым и достаточным условием существования безусловных базисов (см. [19]–[21]).

Ниже рассматривается возможность ослабления метрики, относительно которой ряды Фурье по базисам в пространстве Орлича сходятся безусловно. В нерефлексивных пространствах Орлича для базисов в виде произведений устанавливается зависимость от размерности. Характеризуются подпространства сепарабельного пространства Орлича, для функций из которых ряды Фурье по кратной системе Хаара сходятся безусловно. В одномерном случае получен простой критерий существования безусловного базиса. Рассмотрены экстремальные свойства систем сплайнов Чисельского.

2. Предварительные сведения. Пусть $I = I^1 = [0, 1]$ и $d \in \mathbb{N}$. Через $L^0(I^d)$ обозначается пространство измеримых в смысле Лебега функций, почти всюду конечных на I^d , $L^1(I^d)$ – пространство интегрируемых на I^d в смысле Лебега функций, 1_A – характеристическая функция множества $A \subset I^d$.

Пусть $L_M = L_M(I^d)$ – пространство Орлича (см. [22]), порожденное $\mathcal{N}$ -функцией M , т.е. M – выпуклая непрерывная четная функция такая, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{M(u)} = \infty. \quad (1)$$

Это пространство снабжено нормой

$$\|f\|_{L_M(I^d)} = \inf \left\{ k > 0 : \int_{I^d} M\left(\frac{f(x)}{k}\right) dx \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

Через E_M обозначается замыкание по этой норме множества ограниченных функций. Пусть M^* – функция, дополнительная в смысле Юнга к функции M . Известно (см. [22]), что

$$\begin{aligned} [L_{M_1} \subset L_{M_2}] &\Leftrightarrow [\exists C > 0 \exists u_0 \geq 0 \forall u \geq u_0 M_2(u) \leq M_1(Cu)] \\ &\Rightarrow [\exists C_{M_2 M_1} > 1 \| \cdot \|_{L_{M_1}} \leq C_{M_2 M_1} \| \cdot \|_{L_{M_2}}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть N есть $\mathcal{N}$ -функция.

Как обычно выполнение условия Δ_2 для функции N означает, что

$$\exists C > 0 \exists u_0 \geq 0 \forall u \geq u_0 \quad N(2u) \leq CN(u). \quad (4)$$

Следующие свойства эквивалентны:

$$N \text{ удовлетворяет условию } \Delta_2; \quad (5)$$

$$\text{пространство } L_N \text{ сепарабельно}; \quad (6)$$

$$\|f\|_{L_N(I^d)} < \infty \Leftrightarrow \int_{I^d} N(f) < \infty; \quad (7)$$

$$\exists r \geq 1 \exists u_0 \geq 1 \forall u \geq u_0 \quad u^r \int_u^\infty t^{-r-1} N(t) dt \leq CN(u). \quad (8)$$

Для (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) см. [22], для (5) $\Leftrightarrow$ (8) см. [23].

Через $R_N^{(d)}$ при $d \geq 1$ обозначается $\mathcal{N}$ -функция, порождающая пространство Орлича $L_{R_N^{(d)}}$, такая, что

$$R_N^{(d)}(u) = u \int_1^u t_{d-1}^{-1} \dots \int_1^{t_2} t_1^{-1} \int_1^{t_1} t_0^{-2} N(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{d-1}, \quad u \geq 2. \quad (9)$$

т.е.

$$R_N^{(1)}(u) = u \int_1^u \frac{N(t)}{t^2} dt \quad \text{для } d = 1 \quad \text{и} \quad R_N^{(d)}(u) = R_{R_N^{(d-1)}}^{(1)}(u) \quad \text{для } d > 1.$$

Ниже определение функции $R_N^{(d)}(u)$ для $0 \leq u < 2$ несущественно.

Заметим, что выполнение условия Δ_2 для функции N влечет следующие свойства:

$$R_N^{(d)} \text{ удовлетворяет условию } \Delta_2, \quad (10)$$

$$\exists C > 0 \exists u_0 \geq 0 \forall u \geq u_0 \quad N(u) \leq CR_N^{(d)}(u). \quad (11)$$

Кроме того (11) эквивалентно (см. (3), (7)) включению

$$L_{R_N^{(d)}}(I^d) \subset L_N(I^d). \quad (12)$$

Условие Δ' для функции N означает выполнение такого неравенства:

$$\exists C > 0 \quad \exists u_0 \geq 0 \quad \forall u, v \geq u_0 \quad N(u, v) \leq CN(u)N(v), \quad (13)$$

что эквивалентно следующему соотношению (см. [22; гл. III]):

$$\begin{aligned} \exists C_N > 0 \quad \forall f(x) \in L_N(I^d) \quad \forall g(y) \in L_N(I^d) \\ \|f(x)g(y)\|_{L_N(I^d \times I^d)} \leq C_N \|f\|_{L_N(I^d)} \|g\|_{L_N(I^d)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Мы используем такой вид интерполяционной теоремы Марцинкевича.

ТЕОРЕМА А ([24; гл. XII], [23]). Пусть $A: L^1(I) \rightarrow L^0(I)$ – квазилинейный оператор, одновременно имеющий тип (p, p) для всех $1 < p < \infty$ и слабый тип $(1, 1)$. Пусть $L_N(I)$ – сепарабельное пространство Орлича. Тогда оператор A определен на $L_{R_N^{(1)}}(I)$ и

$$\exists C > 0 \quad \forall f \in L_{R_N^{(1)}} \quad \int_I N(Af) \leq C(1 + \int_I R_N^{(1)}(f)). \quad (15)$$

Пусть $\Phi^{(j)} = \{\varphi_{i_j, j}\}_{i_j=1}^\infty$, $j = 1, \dots, d$, – системы функций, определенных на I . Обозначим

$$\begin{aligned} \bigotimes_{j=1}^d \Phi^{(j)} &= \left\{ \bigotimes_{j=1}^d \varphi_{i_j, j}, i_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d \right\} \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^d \varphi_{i_j, j}(x_j), i_j \in \mathbb{N}, x_j \in I, j = 1, \dots, d \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ниже рассматриваются базисы, таким образом образованные в виде произведений базисов $\Phi^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$. В частности, пусть $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=1}^\infty$ – система Хаара, определенная на I (см. [1; гл. 3]); через $\bigotimes_{j=1}^d \mathcal{H}^{(j)}$ обозначается d -кратная система Хаара, определенная на I^d .

Пусть $\bigotimes_{j=1}^d \varphi_{i_j, j} \in L_Q(I^d) \subset L_F(I^d)$ для $\forall \{i_j\}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} K_{L_Q(I^d), L_F(I^d)} \left(\bigotimes_{j=1}^d \Phi^{(j)} \right) \\ = \sup_{a_{i_1, \dots, i_d}} \sup_{\varepsilon_{i_1, \dots, i_d} = \pm 1} \left\{ \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1, \dots, i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d \varphi_{i_j, j} \right\|_{L_F(I^d)} : \right. \\ \left. \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d \varphi_{i_j, j} \right\|_{L_Q(I^d)} = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ортонормированная система сплайнов Чисельского определяется следуя работе [25]. В частности, эти системы суть системы Хаара и Франклина (см. [1; гл. 6]). В пространстве E_N системы $\{C_n^{(m)}\}$ образуют базис и, таким образом, эти системы являются базисами в каждом сепарабельном пространстве Орлича.

ЛЕММА 1. Пусть функция N удовлетворяет условию Δ_2 . Тогда $L_N = L_{R_N^{(d)}}$ (равенство теоретико-множественное) тогда и только тогда, когда пространство L_N рефлексивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $d = 1$ см. [26], и это влечет справедливость утверждения для всех d .

ЛЕММА 2. Пусть $N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ – четная, возрастающая на $[0, \infty)$ и удовлетворяющая условию Δ_2 функция. Тогда $\exists C > 0 \forall a_{i_1, \dots, i_d}, i_j = 1, \dots, m_j, j = 1, \dots, d$,

$$\sup_{\varepsilon_{i_1, \dots, i_d} = \pm 1} \int_{I^d} N \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1, \dots, i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \right) \leq C \sup_{\varepsilon_{i_1}^{(1)}} \dots \sup_{\varepsilon_{i_d}^{(d)}} \int_{I^d} N \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1}^{(1)} \dots \varepsilon_{i_d}^{(d)} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \right). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится следующее утверждение (см. [27], [28]):

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall b_i \in \mathbb{R}$$

$$C_1 \int_I N \left(\left(\sum_{i=1}^m b_i^2 h_i^2 \right)^{1/2} \right) \leq \int_I N \left(\sup_{0 \leq k \leq m} \left| \sum_{i=1}^m b_i h_i \right| \right) \leq C_2 \int_I N \left(\left(\sum_{i=1}^m b_i^2 h_i^2 \right)^{1/2} \right). \quad (19)$$

Теперь мы последовательно применяем это соотношение и неравенство Хинчина (см. подробнее в [29]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Базис банахова пространства X называется безусловным относительно нормы пространства Y , если разложение каждого элемента из пространства X безусловно сходится по норме пространства Y .

3. Основные результаты. Основные результаты этой статьи представлены в следующих утверждениях.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L_N(I^d)$ – сепарабельное пространство Орлича. Тогда и только тогда d -кратная система Хаара образует безусловный базис в пространстве Орлича $L_Q(I^d)$ по норме пространства Орлича $L_N(I^d)$, когда

$$L_Q(I^d) \subset L_{R_N^{(d)}}(I^d). \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L_N(I^d)$ – сепарабельное пространство Орлича. Пусть далее $L_Q(I^d) \not\subset L_{R_N^{(d)}}(I^d)$ и функция Q удовлетворяет условию Δ' в случае $d > 1$ или Δ_2 в случае $d = 1$. Тогда не существует безусловного базиса в виде произведения в пространстве Орлича $L_Q(I^d)$ по норме пространства Орлича $L_N(I^d)$.

Теорема 2 следует немедленно из теоремы 1 и следующего варианта теоремы Олевского (см. [17]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L_Q(I^d), L_N(I^d)$ – пространства Орлича такие, что $L_Q(I^d) \subset L_N(I^d)$ и функция Q удовлетворяет условию Δ' . Пусть далее $\Phi^{(j)}, j = 1, \dots, d$, – произвольные базисы пространства $L_Q(I^d)$. Тогда

$$K_{L_Q(I^d), L_N(I^d)} \left(\bigotimes_{j=1}^d \Phi^{(j)} \right) \geq K_{L_Q(I^d), L_N(I^d)} \left(\bigotimes_{j=1}^d \mathcal{H}^{(j)} \right). \quad (21)$$

В случае $d = 1$ верна

ТЕОРЕМА 4. Пусть $L_Q(I)$ и $L_N(I)$ – сепарабельные пространства Орлича такие, что $L_Q(I) \subset L_N(I)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) в пространстве $L_Q(I)$ существует безусловный базис по норме пространства $L_N(I)$;
- б) каждая система Чисельского образует безусловный базис в пространстве $L_Q(I)$ по норме пространства $L_N(I)$;
- в) $\liminf_{u \rightarrow \infty} Q(u)/R_N^{(1)}(u) > 0$.

В частности, имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 4 из существования безусловного базиса в пространстве $L_Q(I)$ по норме пространства $L_N(I)$ следует, что и система Франклина является таким базисом.

4. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала предположим, что кратная система Хара образует безусловный базис пространства $L_Q(I^d)$ по норме сепарабельного пространства $L_N(I^d)$. Тогда, в частности, существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждой функции $f \in L_Q(I^d)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|T_n f\|_{L_N(I^d)} \leq C \|f\|_{L_Q(I^d)}, \quad (22)$$

где

$$T_n f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-1} a_{2^{2k_1+1}, \dots, 2^{2k_d+1}}(f) h_{2^{2k_1+1}}(x_1) \cdots h_{2^{2k_d+1}}(x_d). \quad (23)$$

Введем обозначения $K_n = Q^{-1}(2^{dn})2^{-dn}$ и $\tilde{N}(t) = N(K_n t)$ и ниже будем рассматривать $n \geq n_0$ такие, что $K_n < 1$ (существование n_0 следует из (1)). В силу условия Δ_2 для функции N и следующей оценки (см. (23)):

$$\exists C > 0 \quad \forall x_i \in [2^{-n}, 1], \quad i = 1, \dots, d, \quad |T_n \mathbf{1}_{[0, 2^{-n}]^d}(x_1, \dots, x_d)| > C 2^{-nd} x_1^{-1} \cdots x_d^{-1}$$

получим (см. (2), (4))

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|T_n \mathbf{1}_{[0, 2^{-n}]^d} / C\|_{L_Q(I^d)} \| \mathbf{1}_{[0, 2^{-n}]^d} \|_{L_N(I^d)} \geq C \int_{I^d} N(Q^{-1}(2^{nd}) T_n \mathbf{1}_{[0, 2^{-n}]^d}) \\ &\geq C \int_{2^{-n}}^1 \cdots \int_{2^{-n}}^1 N\left(\frac{K_n}{x_0 \cdots x_{d-1}}\right) dx_0 \cdots dx_{d-1} \\ &= C \int_1^{2^{nd}} t_{d-1}^{-2} \tilde{N}(t_{d-1}) dt_{d-1} \int_1^{t_{d-1}} \frac{dt_{d-2}}{t_{d-2}} \cdots \int_1^{t_1} \frac{dt_0}{t_0} \geq C R_N^{(d)}(2^{nd}) 2^{-nd}. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (9), (10)),

$$R_N^{(d)}(Q^{-1}(2^{nd})) \leq C 2^{nd}. \quad (24)$$

Используя свойства Q и $R_N^{(d)}$, из (24) получим

$$\exists C > 0 \quad \exists u_0 \geq 0 \quad \forall u \geq u_0 \quad R_N^{(d)}(u) \leq C Q(u),$$

что в силу (3) влечет (20).

Теперь докажем, что для любой функции из пространства $L_{R_N^{(d)}}(I^d)$ ее кратный ряд Фурье–Хаара безусловно сходится по норме пространства $L_N(I^d)$. Достаточно показать (см. (12)), что в условиях теоремы 1 операторы

$$T_\varepsilon^{m_1, \dots, m_d} f = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1, \dots, i_d} \left(f, \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \right) \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j}, \quad (25)$$

которые отображают пространство $L_{R_N^{(d)}}(I^d)$ в пространство $L_N(I^d)$, ограничены равномерно относительно m_j , $j = 1, \dots, d$, и $\varepsilon = \{\varepsilon_{i_1, \dots, i_d} = \pm 1\}$.

Начнем с аналогичного утверждения для операторов вида

$$T_{\varepsilon^{(1)} \dots \varepsilon^{(d)}}^{m_1, \dots, m_d} f = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1}^{(1)} \cdots \varepsilon_{i_d}^{(d)} \left(f, \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \right) \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j}, \quad (26)$$

где $\varepsilon^{(j)} = \{\varepsilon_{i_j}^{(j)} = \pm 1\}$, $j = 1, \dots, d$.

Операторы

$$f \mapsto \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(f, h_i) h_i, \quad (27)$$

которые отображают пространство $L^1(I)$ в пространство $L^\infty(I)$ равномерно относительно m и $\varepsilon = \{\varepsilon_i = \pm 1\}$ имеют тип (p, p) для всех $1 < p < \infty$ ([30]) и слабый тип $(1, 1)$ ([31]).

Тогда для произвольного полинома

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j}, \quad (28)$$

применяя интерполяционную теорему А последовательно по переменным x_j , $j = 1, \dots, d$, получим (см. (26), (27), (13), (15))

$$\exists C > 0 \quad \forall \varepsilon^{(j)} \quad \forall j = 1, \dots, d$$

$$\begin{aligned} & \int_{I^d} N \left(T_{\varepsilon^{(1)} \dots \varepsilon^{(d)}}^{m_1, \dots, m_d} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \right) \right) \\ & \leq C + C \int_{I^d} R_N^{(d)} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Так как кратная система Хаара образует базис в любом сепарабельном пространстве Орлича в смысле сходимости по прямоугольникам (в смысле Прингсхейма), то (29) влечет оценку (см. также (25), (28), (10), (18)):

$$\forall m_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad \forall \varepsilon = \{\varepsilon_{i_1, \dots, i_d} = \pm 1\} \quad \forall f \in L_{R_N^{(d)}}(I^d)$$

$$\int_{I^d} N(T_\varepsilon^{m_1, \dots, m_d} f) \leq C + C \int_{I^d} R_N^{(d)}(f). \quad (30)$$

Окончательно (см. [24; гл. IV]) из (30) имеем

$$\exists C > 0 \quad \|T_\varepsilon^{m_1, \dots, m_d}\|_{L_{R_N^{(d)}}(I^d) \rightarrow L_N(I^d)} < C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 (Метод Олевского [17]). Пусть $\Phi^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$, – произвольные базисы пространства $L_Q(I) \subset L_N(I)$ и $\bar{\Phi}^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$, – их сопряженные системы функционалов. Пусть (см. (16), (17))

$$\mu < K_{L_Q(I^d), L_F(I^d)} \left(\bigotimes_{j=1}^d \Phi^{(j)} \right)$$

– произвольное положительное число. Тогда существует полином

$$H = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d h_{i_j} \quad (31)$$

и последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_{i_1 \dots i_d} = \pm 1\}$ такие, что

$$\|H\|_{L_Q(I^d)} = 1 \quad \text{и} \quad \|T_\varepsilon^{m_1, \dots, m_d} H\|_{L_N(I^d)} > \mu.$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное положительное число. По условиям теоремы 3 существует постоянная $C_{NQ} > 0$, для которой выполнено

$$\|f\|_{L_N(I^d)} \leq C_{NQ} \|f\|_{L_Q(I^d)}. \quad (32)$$

Через $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ обозначим последовательность положительных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ таких, что

$$\sum_{k=1}^\infty \gamma_k < \gamma, \quad (33)$$

где положительное число γ будет определено ниже.

Согласно теореме Олевского (см. [16]) для последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ найдется система функций

$$\{u_{i_j}^{(j)}(x_j)\}_{i_j=1}^\infty, \quad j = 1, \dots, d,$$

и последовательности

$$\{n_{p_j}^{(j)}\}_{p_j=1}^\infty, \quad 0 < n_1^{(j)} < n_2^{(j)} < \dots, \quad j = 1, \dots, d,$$

такие, что для m_j , $j = 1, \dots, d$, существуют меросохраняющие биекции $\lambda_{m_j}^{(j)}: I \rightarrow I$, для которых

$$u_{i_j}^{(j)}(x_j) = h_{i_j}(\lambda_{m_j}^{(j)}(x_j)) \quad (34)$$

при $i_j = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, d$, и выполнено

$$\|A_{p_j, j}^{(i_j)}\|_{L_Q(I)} \leq \gamma_{p_j} \gamma_{i_j} \quad \forall p_j \neq i_j, \quad (35)$$

где

$$A_{p_j, j}^{(i_j)} = \sum_{n_j \in \Gamma^{(j)}(p_j)} (u_{i_j}^{(j)}, \bar{\varphi}_{n_j}^{(j)}) \varphi_{n_j}^{(j)}, \quad p_j, i_j = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, d \quad (36)$$

и $\Gamma^{(j)}(p_j) = \{n_{p_j}^{(j)} + 1, \dots, n_{p_j+1}^{(j)}\}$.

Теперь рассмотрим полиномы

$$G = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d A_{i_j, j}^{(i_j)}, \quad (37)$$

$$M = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1, \dots, i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \bigotimes_{j=1}^d A_{i_j, j}^{(i_j)}. \quad (38)$$

Докажем, что

$$\|G\|_{L_Q(I^d)} \leq 1 + \delta, \quad \|M\|_{L_N(I^d)} > \mu - \delta,$$

откуда получим

$$K_{L_Q(I^d), L_N(I^d)} \left(\bigotimes_{j=1}^d \Phi^{(j)} \right) > \frac{\mu - \delta}{1 + \delta},$$

что и влечет (21).

Пусть U – непустое подмножество множества $\{1, \dots, d\}$. Согласно (14), (31)–(36), (38) получим

$$\begin{aligned} & \left\| \prod_{k \in U} u_{i_k}^{(i)}(x_k) \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus U} \sum_{p_j \neq i_j} A_{p_j, j}^{(i_j)}(x_j) \right\|_{L_N(I^d)} \\ & \leq C_{NQ} C_Q^{2d-2} \prod_{k \in U} \|u_{i_k}^{(i)}\|_{L_Q(I^1)} \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus U} \sum_{p_j \neq i_j} \|A_{p_j, j}^{(i_j)}\|_{L_Q(I^1)} \\ & \leq C_{NQ} C_Q^{2d-2} \prod_{k \in U} \|h_{i_k}\|_{L_Q(I^1)} \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus U} \gamma_{i_j} \sum_{p_j \neq i_j} \gamma_{p_j} \\ & \leq \gamma C_{NQ} C_Q^{2d-2} \prod_{k \in U} \|h_{i_k}\|_{L_Q(I^1)}. \end{aligned}$$

В силу этой оценки имеем

$$\begin{aligned} \|M\|_{L_N(I^d)} &= \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1, \dots, i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \prod_{j=1}^d (u_{i_j}^{(j)}(x_j) - \sum_{p_j \neq i_j} A_{p_j, j}^{(i_j)}(x_j)) \right\|_{L_N(I^d)} \\ &\geq \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} \varepsilon_{i_1, \dots, i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \prod_{j=1}^d u_{i_j}^{(j)}(x_j) \right\|_{L_N(I^d)} \\ &\quad - \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} |a_{i_1, \dots, i_d}| \\ &\quad \times \sum_{U \in \{1, \dots, d\}} \left\| \prod_{k \in U} (u_{i_k}^{(j)}(x_k)) \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus U} \left(\sum_{p_j \neq i_j} A_{p_j, j}^{(i_j)}(x_j) \right) \right\|_{L_N(I^d)} \\ &\geq \mu - \gamma C_Q^{2d-2} C_{NQ} \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{m_d} |a_{i_1, \dots, i_d}| \sum_{U \in \{1, \dots, d\}} \prod_{j \in U} \|h_{i_j}\|_{L_Q(I^1)} \equiv \mu - \gamma D. \end{aligned}$$

Для заданного $\delta > 0$ выберем $\gamma < 1$ так, чтобы выполнялось $\gamma D < \delta$; отсюда следует

$$\|M\|_{L_N(I^d)} \geq \mu - \delta.$$

Аналогично используя (31)–(37), получим

$$\|G\|_{L_Q(I^d)} \leq 1 + \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Ввиду теоремы 1 достаточно доказать $c) \Rightarrow b)$, что следует из анализа теоремы 1, так как каждая из систем Чисельского удовлетворяет тем же требуемым условиям, что и система Хаара: операторы вида (29) относительно системы Чисельского равномерно по n и $\varepsilon_i = \pm 1$ имеют тип (p, p) для всех $1 < p < \infty$ и слабый тип $(1, 1)$ (см. [25], [32]).

5. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для сопряженных пространств теорему 4 можно сформулировать следующим образом (см. [33]).

ТЕОРЕМА 5. В условиях теоремы 4 системы Чисельского образуют безусловный базис пространства $E_{N^*(I^d)}$ по норме пространства $L_{Q^*}(I^d)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (20).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $d > 1$ можно рассматривать случаи $\varepsilon = \{\varepsilon_{i_1, \dots, i_k} = \pm 1\}$ для $1 \leq k < d$, тогда в теоремах 1 и 2 пространство $L_{R_N^{(d)}}(I^d)$ должно заменяться на $L_{R_N^{(k)}}(I^d)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу изоморфизма между $L_M(I)$ и $L_M(I^d)$ в многомерном случае для произвольных базисов (не вида произведений) теорема 2 не имеет места.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Все утверждения работы сохраняют силу для $N(t) = t$, т.е. для пространства $L^1(I^d)$ (см. [29]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ослабление метрики сепарабельного пространства Орлича $L_N(I^d)$ для обеспечения существования безусловных базисов указанного выше вида возможно лишь при $N(t) \geq Ct \ln^{d-1} t$ (см. [29]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Так как рефлексивность пространства L_N эквивалентна условию $L_N(I^d) = L_{R_N^{(d)}}(I^d)$, то теоремы 1 и 2 содержат некоторые известные для таких пространств результаты (см. [19]–[21]).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для произвольных сепарабельных пространств Орлича $L_N(I)$ найдутся постоянные $C' = C'(N)$ и $C'' = C''(N)$ такие, что для любых последовательностей $\{a_i\}_{i=1}^m$ имеем

$$C_1 \left\| \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 h_i^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_N(I)} \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i h_i \right\|_{L_{R_N^{(1)}}(I)} \leq C_2 \left\| \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 h_i^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_{R_N^{(2)}}(I)}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Б. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.
- [2] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., **37**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

- [3] P. Wojtaszczyk, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, London Math. Soc. Stud. Texts, **37**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [4] М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, ИЛ, М., 1961.
- [5] С.В. Бочкарев, “Существование базиса в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина”, *Матем. сб.*, **95**:1 (1974), 3–18.
- [6] С.В. Бочкарев, “Базисы функциональных пространств и система Франклина”, *Теория функций. Материалы всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН, **190**, Наука, М., 1989, 22–39.
- [7] Г.Г. Геворкян, “Некоторые теоремы о безусловной сходимости, мажоранте рядов Франклина и их приложениях к пространствам $Re H_p$ ”, *Теория функций. Материалы всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН, **190**, Наука, М., 1989, 49–74.
- [8] D. L. Donoho, “Unconditional bases and bit-level compression”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **3**:4 (1996), 388–392.
- [9] D. L. Donoho, “Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **1**:1 (1993), 100–115.
- [10] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkycharian, D. Picard, “Wavelet shrinkage: asymptopia?”, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **57**:2 (1995), 301–369.
- [11] S. Karlin, “Bases in Banach spaces”, *Duke Math. J.*, **15**:4 (1948), 971–985.
- [12] A. Pelczynski, “Projections in certain Banach spaces”, *Studia Math.*, **19** (1960), 209–228.
- [13] P. L. Uljanov, “Haar series and related questions”, *Alfred Haar memorial conference*, vol. I, II (Budapest, 1985), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **49**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 57–96.
- [14] Б.И. Голубов, “Ряды по системе Хаара”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ*, ВИНТИ, М., 1971, 109–146.
- [15] W. R. Wade, “Recent developments in the theory of Haar series”, *Colloq. Math.*, **52**:2 (1987), 213–238.
- [16] А.М. Олевский, “Ряды Фурье и функции Лебега”, *УМН*, **22**:3 (1967), 237–239.
- [17] А.М. Olevskii, *Fourier Series With Respect to General Orthogonal Systems*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **86**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [18] D. L. Burkholder, “A proof of Pelczynski’s conjecture for the Haar system”, *Studia Math.*, **91**:1 (1988), 79–83.
- [19] В.Ф. Гапошкин, “О существовании безусловных базисов в пространствах Орлича”, *Функц. анализ и прилож.*, **1**:4 (1967), 26–32.
- [20] В.Ф. Гапошкин, “О безусловных базисах в пространствах Орлича”, *Сиб. матем. журн.*, **9**:2 (1968), 280–287.
- [21] С.В. Бочкарев, “О безусловных базисах”, *Матем. заметки*, **1** (1967), 391–398.
- [22] М.А. Красносельский, Я.Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Современ. проблемы матем., Физматгиз, М., 1958.
- [23] О.Д. Церетели, “Об интегрируемости сопряженной функции”, *Тр. Тбилисского матем. ин-та им. А.М. Размадзе АН ГрССР*, **43** (1973), 149–168.
- [24] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965.
- [25] Z. Ciesielski, “Constructive function theory and spline system”, *Studia Math.*, **53**:3 (1975), 277–302.
- [26] C. Finet, G. Tkebuchava, “Some classical function systems in separable Orlicz spaces”, *Studia Math.*, **121**:2 (1996), 193–205.
- [27] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, “Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales”, *Acta Math.*, **124**:1 (1970), 249–304.
- [28] D. L. Burkholder, “Distribution function inequalities for martingales”, *Ann. Probab.*, **1**:1 (1973), 19–42.
- [29] Г.Е. Ткебучава, “О безусловной сходимости по системам произведений базисов”, *Матем. сб.*, **183**:10 (1992), 109–122.
- [30] J. Marcinkiewicz, “Quelques théorèmes sur les séries orthogonales”, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **16** (1938), 84–96.

- [31] S. Yano, “On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series”, *Tohoku Math. J.* (2), **11**:2 (1959), 191–215.
- [32] Z. Ciesielski, P. Simon, P. Sjölin, “Equivalence of Haar and Franklin systems in L^p spaces”, *Studia Math.*, **60**:2 (1977), 195–210.
- [33] Г. Е. Ткебучава, “О базисах в пространствах Орлича”, *Anal. Math.*, **7**:1 (1981), 69–80.

Г. Е. Ткебучава

Тбилисский государственный университет, Грузия

E-mail: george_tkebuchava@hotmail.com

Поступило

22.08.2006

К. Финэ

Université de Mons-Hainaut

E-mail: finet@umh.ac.be