Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Золин, Секвенциальные рефлексивные логики с оператором разрешимости, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 853–868

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:16:42

УДК 510.653

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ РЕФЛЕКСИВНЫЕ ЛОГИКИ С ОПЕРАТОРОМ РАЗРЕШИМОСТИ

Е. Е. Золин

Построены системы гильбертовского типа $L^\triangleright$ и секвенциальные исчисления $[L^\triangleright]$ для вариантов логик $L = \mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}$ и $\mathbf{Grz}$, сформулированных в языке с единственным модальным оператором разрешимости $\triangleright A = \Box A \vee \Box \neg A$. Доказано, что в исчислениях $[L^\triangleright]$ сечение не устранимо, однако можно ограничиться аналитическим сечением, сохраняющим свойство подформульности. Тем самым, исчисления $[\mathbf{T}^\triangleright]$, $[\mathbf{S4}^\triangleright]$, $[\mathbf{S5}^\triangleright]$ (соответственно $[\mathbf{Grz}^\triangleright]$) обладают (соответственно слабым) свойством подформульности (для $[\mathbf{B}_2^\triangleright]$ этот вопрос остается открытым). Установлено интерполяционное свойство Крейга для рассмотренных логик разрешимости.

Библиография: 17 названий.

Введение. При построении логических исчислений в модальной логике традиционным стал выбор языка с операторами необходимости $\Box$ (и возможности $\Diamond$). Однако определенный технический и философский интерес (см. [1], [2]) представляют системы, где в качестве базисного выбирается оператор *разрешимости* (или *неслучайности*), определяемый равенством $\triangleright A = \Box A \vee \Box \neg A$. (Термин “неслучайность” (non-contingency) принят в англоязычной литературе; мы будем употреблять термин “разрешимость”, происходящий из рассмотрения доказуемости интерпретации оператора $\Box$: предложение *разрешимо* в теории, если в ней доказуемо либо оно, либо его отрицание). Этим равенством задается перевод $\triangleright$ -формул (т.е. формул модального языка с единственным модальным оператором $\triangleright$ или, иначе говоря, $\triangleright$ -языка) в $\Box$ -формулы. Если задана $\Box$ -логика L (т.е. логика в $\Box$ -языке), то *логикой разрешимости* над L (обозначение: $L^\triangleright$) называется множество $\triangleright$ -формул, переводы которых являются теоремами L .

В работах [2], [3] были предложены различные аксиоматики логик разрешимости над известными нормальными логиками $\mathbf{T}$, $\mathbf{S4}$ и $\mathbf{S5}$ (см. также [4], [5]). Отметим, что в случае, когда логика L содержит $\mathbf{T}$, а точнее, аксиому рефлексивности $\Box A \rightarrow A$, исследование логики $L^\triangleright$ упрощается благодаря тому, что оператор $\Box$ выразим через $\triangleright$ посредством равенства $\Box A = A \& \triangleright A$. Как следствие, построение гильбертовских аксиоматик этих логик $L^\triangleright$ становится автоматическим (см. лемму 4.5 настоящей работы) и потому не представляет большого интереса. Напротив, построение для $L^\triangleright$ секвенциальных исчислений, обладающих “хорошими” структурными свойствами (устранимость сечения,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант научной школы).

свойство подформульности и т.п.), имеет определенный смысл. В статье [6] построен нетривиальный пример логики, не содержащей **T**, в которой, тем не менее, $\Box$ выразим через $\triangleright$.

Систематическое изучение логики разрешимости было начато в работе [7], содержащей первую, достаточно громоздкую аксиоматику минимальной логики разрешимости (т.е. логики **K** $^\triangleright$). В последующей работе [8] она была упрощена, а также была аксиоматизирована логика **K4** $^\triangleright$. В [9] предложена аксиоматика логики разрешимости над “эпистемической” логикой **KD45**; кроме того, для некоторых аксиом логик разрешимости были найдены элементарные эквиваленты. Наконец, в [10] аксиоматизирована логика **GL** $^\triangleright$ и построены секвенциальные исчисления для **K** $^\triangleright$, **K4** $^\triangleright$ и **GL** $^\triangleright$.

Настоящая работа является продолжением этого цикла исследований. После формулировки необходимых определений (п. 1) мы представляем в п. 2 гильбертовские аксиоматики $L^\triangleright$ и секвенциальные исчисления $[L_1^\triangleright]$ и $[L_2^\triangleright]$ для логик разрешимости над $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$. В п. 3 описан метод доказательства полноты секвенциальных исчислений в $\triangleright$ -языке с аналитическим сечением. Доказательству полноты построенных аксиомат посвящен п. 4. В построенных секвенциальных исчислениях сечение не устранимо, что установлено в п. 5; тем не менее, из доказанной в п. 4 теоремы о полноте вытекает, что исчисления $[\mathbf{T}_2^\triangleright]$, $[\mathbf{S4}_2^\triangleright]$, $[\mathbf{S5}_2^\triangleright]$ (соответственно **[Grz]**) обладают (соответственно слабым) свойством подформульности (для $[\mathbf{B}_2^\triangleright]$ вопрос остается открытым), а в п. 5 также установлено интерполяционное свойство Крейга для построенных логик разрешимости.

1. Определения и факты. Пропозициональный модальный язык ($\Box$ -язык) содержит счетное множество переменных $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$, булевы связки $\perp$ (ложь), $\rightarrow$ (импликация) и одноместный оператор $\Box$. Другие связки вводятся как сокращения, в частности: $\neg A \Leftrightarrow A \rightarrow \perp$, $\Diamond A \Leftrightarrow \neg \Box \neg A$. Множество $\Box$ -формул $\mathbf{Fm}^\Box$ определяется обычным образом. Минимальная нормальная логика **K** имеет следующие аксиомы и правила вывода (здесь $A[B/p]$ – результат подстановки в формулу A формулы B вместо всех вхождений переменной p):

$(A^\Box_T)$ – классические тавтологии в $\Box$ -языке,

$(A^\Box_K)$ – дистрибутивность: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$,

$$(\text{MP}) \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}, \quad (\text{Sub}) \frac{A}{A[B/p]}, \quad (\text{Nec}) \frac{A}{\Box A}.$$

Нас будут интересовать следующие нормальные модальные логики:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{K} + (A^\Box_T), & \mathbf{S4} &= \mathbf{T} + (A^\Box_4), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T} + (A^\Box_B), & \mathbf{S5} &= \mathbf{T} + (A^\Box_5), \\ \mathbf{S4.1} &= \mathbf{S4} + (A^\Box_1), & \mathbf{Grz} &= \mathbf{K} + (A^\Box_G), \end{aligned}$$

где дополнительные аксиомы задаются формулами

$(A^\Box_T)$ – рефлексивность: $\Box p \rightarrow p$,

$(A^\Box_B)$ – симметричность: $p \rightarrow \Box \Diamond p$,

$(A_4^{\Box})$ – транзитивность: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$,

$(A_5^{\Box})$ – евклидовость: $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$,

$(A_1^{\Box})$ – аксиома Маккинси: $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$,

$(A_G^{\Box})$ – аксиома Гжегорчика: $\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$.

При этом для перечисленных здесь модальных логик выполнена следующая диаграмма вложений:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{T} & \subset & \mathbf{S4} & \subset & \mathbf{S4.1} \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathbf{B} & \subset & \mathbf{S5} & & \mathbf{Grz} \end{array}.$$

Секвенция есть выражение вида $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где Π и Σ – конечные мультимножества¹ формул. Включение мультимножеств формул мы понимаем без учета кратности, т.е. запись $\Pi \subseteq \Sigma$ означает, что всякая формула из Π входит в Σ . Мы обозначаем $\Pi\Sigma := \Pi \cup \Sigma$ и $\Pi A := \Pi \cup \{A\}$. Множество подформул формулы A обозначаем $\text{Sb } A$, и если Γ – (мультимножество формул, то $\text{Sb } \Gamma := \cup\{\text{Sb } A \mid A \in \Gamma\}$. Если секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ обозначена как w , то обозначим ее антецедент через $\langle w \mid := \Pi$, сукцедент через $\mid w \rangle := \Sigma$, множество подформул $\text{Sb } w := \text{Sb } \Pi\Sigma$. Пишем $A \in w$, если $A \in \Pi\Sigma$, также $\Gamma \subseteq w$, если $\Gamma \subseteq \Pi\Sigma$, и $w \subseteq \Gamma$, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$. Если $\mathcal{L}$ – секвенциальное исчисление, то запись $\mathcal{L} \vdash A \Leftrightarrow B$ означает: $\mathcal{L} \vdash A \Rightarrow B$ и $\mathcal{L} \vdash B \Rightarrow A$.

Секвенциальное исчисление $[L]$ для логики

$$L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$$

получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\Box \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow_L^{\Box})$, задаваемых следующими формулами:

$$\begin{array}{lll} (\Box \Rightarrow) \frac{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma}, & (\Rightarrow_B^{\Box}) \frac{\Pi \Rightarrow \Box \Sigma, A}{\Box \Pi \Rightarrow \Sigma, \Box A}, & (\Rightarrow_{S5}^{\Box}) \frac{\Box \Pi \Rightarrow \Box \Sigma, A}{\Box \Pi \Rightarrow \Box \Sigma, \Box A}, \\ (\Rightarrow_T^{\Box}) \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Box \Pi \Rightarrow \Box A}, & (\Rightarrow_{S4}^{\Box}) \frac{\Box \Pi \Rightarrow A}{\Box \Pi \Rightarrow \Box A}, & (\Rightarrow_{Grz}^{\Box}) \frac{\Box(A \rightarrow \Box A), \Box \Pi \Rightarrow A}{\Box \Pi \Rightarrow \Box A}. \end{array}$$

Известно, что сечение устранимо в исчислениях для $\mathbf{T}$, $\mathbf{S4}$ и $\mathbf{Grz}$ [11] и не устранимо в исчислениях для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{S5}$ [12]–[14]. В последних можно ограничиться *аналитическим* сечением [15]:

$$\frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, A \quad A, \Pi' \Rightarrow \Sigma'}{\Pi\Pi' \Rightarrow \Sigma\Sigma'}, \quad A \in \text{Sb}(\Pi\Pi'\Sigma\Sigma').$$

Получающееся при этом исчисление $[\mathbf{S5}]$ обладает *свойством подформульности* [14]: всякая выводимая секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, все секвенции которого состоят из подформул формул из $\Pi\Sigma$. Правило $(\Rightarrow_B^{\Box})$ может нарушать свойство подформульности, однако известно [14], что можно ограничиться такими его применениями, в которых $\Sigma \subseteq \text{Sb}(\Pi A)$ и даже $\Box \Sigma \subseteq \text{Sb}(\Pi A)$. Тем самым, свойство подформульности справедливо и для $[\mathbf{B}]$. Наконец, исчисление $[\mathbf{Grz}]$ обладает *слабым* свойством подформульности:

¹Под *мультимножеством* понимается множество с указанием кратности (≥ 0) вхождения элементов. Формально, мультимножество $\Box$ -формул есть отображение $\mathbf{Fm}^{\Box} \rightarrow \mathbb{N}$.

всякая выводимая секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, состоящий из секвенций вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где $\Delta \subseteq \text{Sb } \Pi\Sigma$ и

$$\Gamma \subseteq \text{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\Box(A \rightarrow \Box A) \mid \Box A \in \text{Sb } \Pi\Sigma\}).$$

Для формулировки логик разрешимости введем $\triangleright$ -язык, отличающийся от $\Box$ -языка лишь заменой символа $\Box$ на $\triangleright$, и множество $\triangleright$ -*формул* $\mathbf{Fm}^\triangleright$. Зададим $\triangleright$ -перевод $\text{tr}: \mathbf{Fm}^\triangleright \rightarrow \mathbf{Fm}^\Box$, сохраняющий переменные и булевы связки, такой, что

$$\text{tr}(\triangleright A) = \Box \text{tr}(A) \vee \Box \neg \text{tr}(A).$$

Вместо $\text{tr}(A)$ будем часто писать $A_\triangleright$. Допуская вольность в обозначениях, мы иногда пишем $\triangleright A$, где A есть $\Box$ -формула, подразумевая $\Box A \vee \Box \neg A$; такое использование символа $\triangleright$ легко распознать по контексту. *Логикой разрешимости* над логикой L назовем множество $\triangleright$ -формул, $\triangleright$ -переводы которых являются теоремами логики L :

$$L^\triangleright := \{A \in \mathbf{Fm}^\triangleright \mid A_\triangleright \in L\}.$$

Семантика Крипке для $\Box$ - и $\triangleright$ -языков вводится обычным образом. Отношение достижимости в шкале и обратное к нему мы будем обозначать $\uparrow$ и $\downarrow$ соответственно; кванторы по достижимым из w точкам мы записываем как $\forall x \downarrow w$ и $\exists x \downarrow w$. В этих обозначениях модальный пункт определения истинности $\triangleright$ -формулы в точке модели имеет вид

$$w \models \triangleright A \Leftrightarrow (\forall x \downarrow w \ x \models A) \text{ или } (\forall x \downarrow w \ x \not\models A).$$

Очевидно, что $w \models A \Leftrightarrow w \models A_\triangleright$ для любой $\triangleright$ -формулы A . Если Γ – множество формул, то Γ -*шкалой* называется шкала, на которой общезначимо Γ . Под истинностью (общезначимостью) секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ подразумеваем истинность (общезначимость) формулы $\bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Sigma$.

2. Аксиоматические системы. Аксиомами минимальной рефлексивной логики разрешимости $\mathbf{T}^\triangleright$ являются все классические тавтологии в $\triangleright$ -языке и следующие аксиомы:

$$(A_\triangleright) \text{ – зеркальность: } \triangleright p \leftrightarrow \triangleright \neg p,$$

$$(A_\mathbf{T}^\triangleright) \text{ – слабая дистрибутивность: } p \rightarrow [\triangleright (p \rightarrow q) \rightarrow (\triangleright p \rightarrow \triangleright q)],$$

а правилами вывода

$$(\text{MP}), (\text{Sub}) \text{ и } (\text{Dec}) \frac{A}{\triangleright A}.$$

Аксиоматика других рефлексивных логик разрешимости приведена ниже (гипотеза: в формулировке исчисления $\mathbf{Grz}^\triangleright$ аксиома $(A_4^\triangleright)$ является лишней):

$$\mathbf{B}^\triangleright = \mathbf{T}^\triangleright + (A_\mathbf{B}^\triangleright), \quad (A_\mathbf{B}^\triangleright) \text{ – аксиома } p \rightarrow \triangleright (\triangleright p \rightarrow p),$$

$$\mathbf{S4}^\triangleright = \mathbf{T}^\triangleright + (A_4^\triangleright), \quad (A_4^\triangleright) \text{ – аксиома } \triangleright p \rightarrow \triangleright \triangleright p,$$

$$\mathbf{S5}^\triangleright = \mathbf{T}^\triangleright + (A_5^\triangleright), \quad (A_5^\triangleright) \text{ – аксиома } \triangleright \triangleright p,$$

$$\mathbf{Grz}^\triangleright = \mathbf{S4}^\triangleright + (A_\mathbf{G}^\triangleright), \quad (A_\mathbf{G}^\triangleright) \text{ – аксиома } \triangleright (\triangleright (p \rightarrow \triangleright p) \rightarrow p) \rightarrow \triangleright p.$$

Далее L обозначает одну из логик $\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}$. Записывая выводы схематично, мы пишем

$$L \vdash A_0 \overset{1}{\rightarrow} A_1 \overset{2}{\rightarrow} \dots \overset{n}{\rightarrow} A_n, \quad \text{где } \overset{k}{\rightarrow} \in \{\rightarrow, \leftrightarrow\},$$

подразумевая

$$L \vdash A_{k-1} \overset{k}{\rightarrow} A_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

ЛЕММА 2.1. (а) *Исчисления $L^\triangleright$ замкнуты относительно правила эквивалентной замены*

$$(RE) \frac{A \leftrightarrow B}{\triangleright A \leftrightarrow \triangleright B}.$$

(б) *Имеет место выводимость*

$$\mathbf{T}^\triangleright \vdash \triangleright p \& \triangleright q \rightarrow \triangleright (p \& q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По правилу (Dec) и аксиоме $(A_T^\triangleright)$ из $A \rightarrow B$ получаем $A \rightarrow (\triangleright A \rightarrow \triangleright B)$, а из $\neg A \rightarrow \neg B$ сначала получим формулу $\neg A \rightarrow (\triangleright \neg A \rightarrow \triangleright \neg B)$, а затем – формулу $\neg A \rightarrow (\triangleright A \rightarrow \triangleright B)$ по аксиоме $(A_\neg^\triangleright)$. Ввиду $\vdash A \vee \neg A$ из двух полученных формул выводим $\triangleright A \rightarrow \triangleright B$. Обратная импликация доказывается аналогично.

(б) Из тавтологии $p \rightarrow (q \rightarrow p \& q)$ по аксиоме $(A_T^\triangleright)$ получаем $p \& q \rightarrow [\triangleright p \rightarrow (\triangleright q \rightarrow \triangleright (p \& q))]$. Из тавтологии $\neg p \rightarrow \neg(p \& q)$ по аксиомам $(A_T^\triangleright)$, $(A_\neg^\triangleright)$ получаем $\neg p \rightarrow [\triangleright p \rightarrow \triangleright (p \& q)]$ и, тем более, $\neg p \rightarrow [\triangleright p \rightarrow (\triangleright q \rightarrow \triangleright (p \& q))]$. Аналогично выводится $\neg q \rightarrow [\triangleright p \rightarrow (\triangleright q \rightarrow \triangleright (p \& q))]$. Наконец, в силу тавтологии $(p \& q) \vee \neg p \vee \neg q$ заключаем, что $\triangleright p \rightarrow (\triangleright q \rightarrow \triangleright (p \& q))$.

Для каждой из рассматриваемых логик L сформулируем два секвенциальных исчисления $[L_1^\triangleright]$ и $[L_2^\triangleright]$. Исчисление $[L_1^\triangleright]$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\triangleright_\neg \Rightarrow)$, $(\Rightarrow_\neg^\triangleright)$ и $(\Rightarrow_L^\triangleright)$, задаваемых следующим образом:

$$\begin{aligned} (\triangleright_\neg \Rightarrow) \frac{\triangleright A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\triangleright \neg A, \Pi \Rightarrow \Sigma}, \quad (\Rightarrow_\neg^\triangleright) \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow \triangleright A}, \quad (\Rightarrow_B^\triangleright) \frac{\Pi \Rightarrow (\triangleright \Sigma \& \Sigma), A}{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright A}, \\ (\Rightarrow_\neg^\triangleright) \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright \neg A}, \quad (\Rightarrow_{S4}^\triangleright) \frac{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow A}{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow \triangleright A}, \quad (\Rightarrow_{S5}^\triangleright) \frac{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow \triangleright \Sigma, A}{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow \triangleright \Sigma, \triangleright A}, \\ (\Rightarrow_{Grz}^\triangleright) \frac{\triangleright (A \rightarrow \triangleright A), \Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow A}{\Pi, \triangleright \Pi \Rightarrow \triangleright A}. \end{aligned}$$

При формулировке правила $(\Rightarrow_B^\triangleright)$ использовано обозначение

$$(\triangleright \Sigma \& \Sigma) := \{(\triangleright \sigma \& \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}.$$

Правила $(\triangleright_\neg \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow_\neg^\triangleright)$ нарушают свойство подформульности. Введем исчисление $[L_2^\triangleright]$, в котором данные правила поглощены другими. Это исчисление получаем добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\Rightarrow_L^{\triangleright r})$, $r \in \{0, 1\}$, задаваемых следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Rightarrow_T^{\triangleright r}) \frac{A^r, \Pi \Rightarrow \Lambda, A^r}{\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}, \quad (\Rightarrow_B^{\triangleright r}) \frac{\{A^r, \Pi, \Phi' \Rightarrow \Phi, \triangleright (\Psi' \Psi), \Lambda, A^r\}_{\Sigma' = \Phi' \Psi}}{\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \triangleright A}, \\ (\Rightarrow_{S4}^{\triangleright r}) \frac{A^r, \Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, A^r}{\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}, \quad (\Rightarrow_{Grz}^{\triangleright 0}) \frac{A, \triangleright (A \vee \triangleright A), \Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}, \\ (\Rightarrow_{S5}^{\triangleright r}) \frac{A^r, \Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright \Sigma, A^r}{\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright \Sigma, \triangleright A}, \quad (\Rightarrow_{Grz}^{\triangleright 1}) \frac{\triangleright (A \rightarrow \triangleright A), \Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, A}{\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}; \end{aligned}$$

при их формулировке используются обозначения: $\bar{r} := 1-r$, $A^0 := \emptyset$, $A^1 := A$. Правила $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^r)$, $r \in \{0, 1\}$, имеют $2^{|\Sigma|+|\Sigma'|}$ посылок, отвечающих всевозможным разбиениям мультимножеств $\Sigma = \Phi\Psi$ и $\Sigma' = \Phi'\Psi'$.

В п. 4 мы докажем, что в построенных исчислениях $[L_k^>]$ сечение не устранимо. Обозначим теперь через $[L_2^>]^-$ исчисления, полученные из $[L_2^>]$ заменой правила сечения на *аналитическое* сечение. Как будет следовать из теоремы 4.1 о полноте, исчисления $[L_2^>]^-$ и $[L_2^>]$ эквивалентны. Поэтому справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. (а) *Исчисления $[L_2^>]$, где $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}\}$, обладают свойством подформульности.*

(б) *Исчисление $[\mathbf{Grz}_2^>]$ обладает слабым свойством подформульности: всякая выводимая секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, состоящий из секвенций вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где $\Delta \subseteq \text{Sb } \Pi\Sigma$ и*

$$\Gamma \subseteq \text{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\triangleright (A \rightarrow \triangleright A), \triangleright (A \vee \triangleright A) \mid \triangleright A \in \text{Sb } \Pi\Sigma\}).$$

В дальнейшем нам потребуется следующая

ЛЕММА 2.3. (а) *Для $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ исчисление $[L_1^>]$ замкнуто относительно правила (RE), т.е. из $[L_1^>] \vdash A \Leftrightarrow B$ следует $[L_1^>] \vdash \triangleright A \Leftrightarrow \triangleright B$.*

(б) *Имеет место выводимость $[T_2^>]^- \vdash \triangleright (p \rightarrow \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p$.*

(в) *Имеет место выводимость $[T_2^>]^- \vdash \triangleright (p \vee \triangleright p) \Rightarrow p, \triangleright p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Имеем вывод в $[T_1^>]$:

$$\frac{\frac{\frac{A \Rightarrow B}{A, \triangleright A \Rightarrow \triangleright B} \quad \frac{B \Rightarrow A}{\neg A \Rightarrow \neg B}}{\triangleright A \Rightarrow \triangleright B, \neg A, \neg A, \triangleright \neg A \Rightarrow \triangleright \neg B} \quad \frac{}{\triangleright A, \triangleright \neg A \Rightarrow \triangleright B, \triangleright \neg B}.$$

Применив сечения с секвенцией $\triangleright A \Rightarrow \triangleright \neg A$ (по формуле $\triangleright \neg A$) и с секвенцией $\triangleright \neg B \Rightarrow \triangleright B$ (по формуле $\triangleright \neg B$), а затем сокращения, получим $\triangleright A \Rightarrow \triangleright B$. Обратная секвенция доказывается аналогично.

(б) Пользуясь аналитическим сечением, выводим $[T_2^>]^-$:

$$\frac{\frac{\frac{p \Rightarrow \triangleright p, p}{\Rightarrow (p \rightarrow \triangleright p), p} \quad \frac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow \triangleright p}}{\triangleright (p \rightarrow \triangleright p) \Rightarrow (p \rightarrow \triangleright p), \triangleright p \quad (p \rightarrow \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p} \quad \frac{}{\triangleright (p \rightarrow \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p, \triangleright p} \quad \frac{}{\triangleright (p \rightarrow \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p}.$$

(в) Аналогично пункту (б).

3. Метод замыкания. В этом пункте описан метод доказательства полноты для произвольного непротиворечивого секвенциального исчисления $\mathcal{L}$ (в $\triangleright$ -языке) с аналитическим сечением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество формул Γ *замкнуто*, если $\text{Sb } \Gamma \subseteq \Gamma$. Секвенцию w назовем *замкнутой*, если $\text{Sb } w \subseteq w$, т.е. всякая подформула формулы из w содержится в антецеденте или сукцеденте секвенции w ; секвенцию w назовем *тонкой*, если ее антецедент и сукцедент являются множествами, т.е. формулы в них не повторяются.

Очевидно, для всякого конечного (мульти)множества формул существует наименьшее содержащее его *конечное* замкнутое множество. Построим конечную шкалу $F_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := (W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}, \uparrow)$ и модель $M_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := (F_{\mathcal{L}}^{\Gamma}, \models)$, где $\Gamma \neq \emptyset$ – конечное замкнутое множество формул. Множество

$$W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := \{w \subseteq \Gamma \mid w \text{ — замкнутая тонкая секвенция, } \mathcal{L} \not\vdash w\},$$

очевидно, конечно.

ЛЕММА 3.2 (О замыкании). *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$, состоящую из формул множества Γ , можно расширить до тонкой замкнутой невыводимой в $\mathcal{L}$ секвенции. Формально, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ и $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, то*

$$\exists w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} : \Pi \subseteq \langle w |, \Sigma \subseteq |w \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится стандартным методом замыкания: если $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, $A \notin \Pi\Sigma$ и $A \in \text{Sb } \Pi\Sigma$, то ввиду наличия в $\mathcal{L}$ аналитического сечения (и сокращения) имеем $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma A$ или $\mathcal{L} \not\vdash A\Pi \Rightarrow \Sigma$, поэтому A можно добавить в антецедент или сукцедент секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Процесс продолжается, пока секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ не станет замкнутой.

Отметим, что ввиду $\Gamma \neq \emptyset$ имеем $\perp \in \Gamma$ или $p \in \Gamma$ для некоторой переменной p . Значит, Γ содержит секвенцию $\Rightarrow \perp$ или $\Rightarrow p$, очевидно, не выводимую в $\mathcal{L}$. По лемме о замыкании ее можно погрузить в некоторый “мир” $w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. Таким образом, $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} \neq \emptyset$.

Зададим оценку переменных, положив

$$w \models p \Leftrightarrow p \in \langle w | \quad \text{для любых } w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} \text{ и } p \in \mathbb{P}.$$

Осталось задать отношение $\uparrow$. Сформулируем условие на $\uparrow$, выполнения которого достаточно для наших целей:

$$\forall w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} \forall A \in w \quad w \models A \Leftrightarrow A \in \langle w |. \quad \langle 1^{\triangleright} \rangle$$

ЛЕММА 3.3. *Если выполнено $\langle 1^{\triangleright} \rangle$, то для любых $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ из $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$ следует $M_{\mathcal{L}}^{\Gamma} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме о замыкании

$$\Pi \subseteq \langle w | \quad \text{и} \quad \Sigma \subseteq |w \rangle$$

для некоторого $w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. По $\langle 1^{\triangleright} \rangle$ имеем $w \models \bigwedge \Pi$ и $w \models \bigwedge \neg \Sigma$, т.е. $w \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Покажем далее, что для удовлетворения $\langle 1^{\triangleright} \rangle$ достаточно наложить на $\uparrow$ следующее условие (квадратная скобка означает дизъюнкцию условий):

$$\forall w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} \forall \triangleright B \in w \quad \triangleright B \in \langle w | \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall x \downarrow w \quad B \in \langle x |, \\ \forall x \downarrow w \quad B \in |x \rangle. \end{array} \right. \quad \langle 2^{\triangleright} \rangle$$

ЛЕММА 3.4. *Имеет место импликация $\langle 2^\triangleright \rangle \implies \langle 1^\triangleright \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем одновременно для всех $w \in W_{\mathcal{L}}^\Gamma$ индукцией по построению формулы $A \in w$. При $A \equiv \perp$ левая и правая части $\langle 1^\triangleright \rangle$ ложны. Для $A \equiv p$ утверждение следует из определения $\models$.

Пусть $A \equiv (B \rightarrow C)$. Так как секвенция w замкнута, то $B, C \in w$ и по предположению индукции

$$(b) \quad w \models B \Leftrightarrow B \in \langle w |, \quad w \not\models B \Leftrightarrow B \in |w\rangle;$$

$$(c) \quad w \models C \Leftrightarrow C \in \langle w |, \quad w \not\models C \Leftrightarrow C \in |w\rangle.$$

Отсюда

$$w \models (B \rightarrow C) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} w \not\models B \\ w \models C \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (b, c) \\ \left[\begin{array}{l} B \in |w\rangle \\ C \in \langle w | \end{array} \right] \Leftrightarrow (B \rightarrow C) \in \langle w |. \end{array} \right.$$

Докажем эквивалентность, помеченную знаком вопроса (?).

($\Rightarrow$) Если $(B \rightarrow C) \in |w\rangle$, то $B \notin |w\rangle$ и $C \notin \langle w |$, поскольку в $\mathcal{L}$ доказуемы секвенции $\Rightarrow B, (B \rightarrow C)$ и $C \Rightarrow (B \rightarrow C)$.

($\Leftarrow$) Если $(B \rightarrow C) \in \langle w |$, то невозможно одновременное выполнение условий $B \in \langle w |$ и $C \in |w\rangle$, ибо секвенция $(B \rightarrow C), B \Rightarrow C$ доказуема в $\mathcal{L}$.

Наконец, пусть $A \equiv \triangleright B$. По предположению индукции для любого $x \in W_{\mathcal{L}}^\Gamma$ если $B \in x$, то

$$(x) \quad x \models B \Leftrightarrow B \in \langle x |, \quad x \not\models B \Leftrightarrow B \in |x\rangle.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \triangleright B \in \langle w | &\stackrel{\langle 2^\triangleright \rangle}{\implies} \left[\begin{array}{l} \forall x \downarrow w \quad B \in \langle x | \\ \forall x \downarrow w \quad B \in |x\rangle \end{array} \right] \stackrel{(x)}{\implies} \left[\begin{array}{l} \forall x \downarrow w \quad x \models B \\ \forall x \downarrow w \quad x \not\models B \end{array} \right] \stackrel{\text{def}}{\implies} w \models \triangleright B, \\ \triangleright B \in |w\rangle &\stackrel{\langle 2^\triangleright \rangle}{\implies} \left\{ \begin{array}{l} \exists x \downarrow w \quad B \in \langle x | \\ \exists y \downarrow w \quad B \in |y\rangle \end{array} \right\} \stackrel{(x)}{\implies} \left\{ \begin{array}{l} \exists x \downarrow w \quad x \models B \\ \exists y \downarrow w \quad y \not\models B \end{array} \right\} \stackrel{\text{def}}{\implies} w \not\models \triangleright B. \end{aligned}$$

Теперь полноту логики $\mathcal{L}$ относительно класса конечных шкал $\mathcal{F}$ можно доказывать следующим образом. Пусть $\mathcal{L} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$. Строим конечное замкнутое множество $\Gamma \supseteq \Pi \Sigma$ и отношение $\uparrow$ так, что $F_{\mathcal{L}}^\Gamma \in \mathcal{F}$ и выполнено условие $\langle 2^\triangleright \rangle$. Из него по лемме 3.4 вытекает $\langle 1^\triangleright \rangle$, и в силу леммы 3.3 получаем $F_{\mathcal{L}}^\Gamma \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$, что и требовалось.

4. Полнота аксиоматик. Доказываемая в этом пункте теорема утверждает, что построенные выше гильбертовские и секвенциальные исчисления дают полную аксиоматизацию логик разрешимости над **T**, **S4**, **B**, **S5** и **Grz**. В конце пункта мы аксиоматизируем логику **S4.1** ^{$\triangleright$} .

ТЕОРЕМА 4.1 (совместная теорема о полноте). *Для каждой логики $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ и любой секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ в $\triangleright$ -языке эквивалентны следующие утверждения:*

- (1) $[L_2^\triangleright]^- \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,
- (2) $[L_1^\triangleright] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,
- (3) $L^\triangleright \vdash \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Sigma$,
- (4) $L \vdash (\bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Sigma)_{\triangleright}$,
- (5) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ для любой конечной L -шкалы F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (1)$. Импликация $(2) \Rightarrow (3)$ доказывается индукцией по построению вывода в $[L_1^\triangleright]$; при этом шаги, отвечающие правилам $(\triangleright \Rightarrow)$ и $(\Rightarrow \triangleright)$, очевидны ввиду наличия в логиках $L^\triangleright$ аксиомы $(A_\triangleright)$; поэтому необходимо лишь проверять шаги, отвечающие правилу $(\Rightarrow_L^\triangleright)$. Импликацию $(3) \Rightarrow (4)$ достаточно доказывать лишь для $\Pi = \emptyset$ и $\Sigma = \{A\}$, т.е. проверять выводимость $\triangleright$ -переводов аксиом $L^\triangleright$ в L ; для аксиомы $(A_\triangleright)$ эта проверка тривиальна, а для $(A_\mathbf{T}^\triangleright)$, $(A_4^\triangleright)$ и $(A_5^\triangleright)$ она проведена в [2], [3]. Далее, эквивалентность $(4) \Leftrightarrow (5)$ есть известная (см. [16], [17]) теорема о полноте логик L . Наконец, при доказательстве импликации $(5) \Rightarrow (1)$ мы обозначаем исчисление $\mathcal{L} := [L_2^\triangleright]^-$.

$(1) \Rightarrow (2)$ Достаточно показать, что правила $(\Rightarrow_L^\triangleright)$ являются производными в $[L_1^\triangleright]$. Выведем, например, заключение правила $(\Rightarrow_{\mathbf{T}}^{\triangleright 0})$ из его посылки в исчислении $[\mathbf{T}_1^\triangleright]$:

$$\frac{\frac{A, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \neg \Lambda \Rightarrow \neg A}}{\Pi, \neg \Lambda, \triangleright \Pi, \triangleright \neg \Lambda \Rightarrow \triangleright \neg A}.$$

Применив сечение с секвенцией $\triangleright \neg A \Rightarrow \triangleright A$ (по формуле $\triangleright \neg A$), а также с секвенциями $\Rightarrow C, \neg C$ (по $\neg C$) и $\triangleright C \Rightarrow \triangleright \neg C$ (по $\triangleright \neg C$) для всех $C \in \Lambda$, мы получим $\Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A$.

При рассмотрении правила $(\Rightarrow_{\mathbf{Grz}}^{\triangleright 0})$ потребуются выводимость в $[\mathbf{Grz}_1^\triangleright]$ секвенции

$$\triangleright (\neg A \rightarrow \triangleright \neg A) \Rightarrow \triangleright (A \vee \triangleright A),$$

вытекающая из леммы 2.3 (а).

Логика $\mathbf{T}$. $(2) \Rightarrow (3)$ По лемме 2.1 (б) $\mathbf{T}^\triangleright \vdash \wedge \triangleright \Pi \rightarrow \triangleright \wedge \Pi$, поэтому выводим в $\mathbf{T}^\triangleright$:

$$\frac{\frac{\frac{\wedge \Pi \rightarrow B}{\triangleright (\wedge \Pi \rightarrow B)}}{\wedge \Pi \rightarrow [\triangleright \wedge \Pi \rightarrow \triangleright B]}}{\wedge \{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright B}.$$

$(5) \Rightarrow (1)$ Допустим $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Возьмем конечное замкнутое множество $\Gamma := \text{Sb } \Pi \Sigma$. На $W_{\mathcal{L}}^\Gamma$ введем рефлексивное отношение

$$w \uparrow x \Leftrightarrow \forall C \in \mathbf{Fm}^\triangleright \quad \triangleright C \in \langle w | \Rightarrow \begin{cases} C \in \langle w | \Rightarrow C \in \langle x |, \\ C \in |w \rangle \Rightarrow C \in |x \rangle. \end{cases} \quad \langle 3_{\mathbf{T}}^\triangleright \rangle$$

Тогда $F_{\mathcal{L}}^\Gamma$ – конечная $\mathbf{T}$ -шкала, и остается проверить условие $\langle 2^\triangleright \rangle$.

ЛЕММА 4.2. *Имеет место импликация $\langle 3_{\mathbf{T}}^\triangleright \rangle \Rightarrow \langle 2^\triangleright \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность в $\langle 2^\triangleright \rangle$. Берем $w \in W_{\mathcal{L}}^\Gamma$ и $\triangleright B \in w$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\triangleright B \in \langle w |$. Ввиду замкнутости w возможны два случая:

- 1) $B \in \langle w |$, тогда $\forall x \downarrow w$ по $\langle 3_{\mathbf{T}}^\triangleright \rangle$ получаем $B \in \langle x |$;
- 2) $B \in |w \rangle$, аналогично $\forall x \downarrow w$ получаем $B \in |x \rangle$.

($\Leftarrow$) Пусть $\triangleright B \in |w\rangle$. Построим такие $x, y \downarrow w$, что $B \in \langle x, B \in |y\rangle$.
 Случай $B \in |w\rangle$. Выбор y очевиден: $y := w$. Положим

$$\Pi := \{C \in \langle w| \mid \triangleright C \in \langle w|\}, \quad \Lambda := \{C \in |w\rangle \mid \triangleright C \in \langle w|\}.$$

Тогда $\mathcal{L} \not\vdash B$, $\Pi \Rightarrow \Lambda$, ибо иначе по правилу ($\Rightarrow_{\mathbf{T}}^0$) получим $\mathcal{L} \vdash \Pi, \triangleright (\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright B$, откуда ослаблением $\mathcal{L} \vdash w$. По лемме о замыкании $\exists x \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} : \Pi \subseteq \langle x|, B \in \langle x|, \Lambda \subseteq |x\rangle$. Докажем, что $w \uparrow x$. Пусть $\triangleright C \in \langle w|$. Если $C \in \langle w|$, то $C \in \Pi \subseteq \langle x|$; если же $C \in |w\rangle$, то $C \in \Lambda \subseteq |x\rangle$.

Случай $B \in \langle w|$. Положив $x := w$ и используя ($\Rightarrow_{\mathbf{T}}^1$), аналогично строим искомый y (для остальных логик мы будем обычно рассматривать только первый случай). Лемма доказана.

Логика **S4**. (2) $\Rightarrow$ (3) Вывод в **S4** $^{\triangleright}$:

$$\frac{\frac{\frac{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow B}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow [\triangleright \Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright B]}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \triangleright \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright B}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright B}.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ введем рефлексивное транзитивное отношение

$$w \uparrow x \Leftarrow \forall C \in \mathbf{Fm}^{\triangleright} \quad \triangleright C \in \langle w| \Rightarrow \triangleright C \in \langle x| \& \begin{cases} C \in \langle w| \Rightarrow C \in \langle x|, \\ C \in |w\rangle \Rightarrow C \in |x\rangle. \end{cases} \quad \langle 3_{\mathbf{S4}}^{\triangleright} \rangle$$

В доказательстве $\langle 2^{\triangleright} \rangle$ имеем $\mathcal{L} \not\vdash B, \Pi, \triangleright (\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda$, иначе по правилу ($\Rightarrow_{\mathbf{S4}}^0$) получим $\mathcal{L} \vdash w$. Для $x \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ такого, что $\Pi, \triangleright (\Pi\Lambda) \subseteq \langle x|$ и $\Lambda \subseteq |x\rangle$, очевидно, что $w \uparrow x$.

Логика **B**. (2) $\Rightarrow$ (3) Обозначая $\Omega := \neg \Sigma$ и используя выводимые в **B** $^{\triangleright}$ формулы $p \rightarrow (\triangleright p \rightarrow p)$ и $p \rightarrow \triangleright (\triangleright p \rightarrow p)$, строим вывод в **B** $^{\triangleright}$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Lambda \Pi \rightarrow \bigvee \{(\triangleright \Sigma \& \Sigma), B\}}{\Lambda\{\Pi, (\triangleright \Omega \rightarrow \Omega)\} \rightarrow B}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, (\triangleright \Omega \rightarrow \Omega), \triangleright (\triangleright \Omega \rightarrow \Omega)\} \rightarrow \triangleright B}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \Omega\} \rightarrow \triangleright B}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow \bigvee \{\Sigma, \triangleright B\}}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Выведем $\triangleright$ -перевод аксиомы ($A_{\mathbf{B}}^{\triangleright}$) в логике **B**. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \vdash p \longrightarrow \Box \Diamond p &\longleftrightarrow \Box [\Diamond p \& (\neg p \rightarrow \Diamond \neg p)] \\ &\longleftrightarrow \Box [p \vee (\Diamond p \& \Diamond \neg p)] \longleftrightarrow \Box (p \vee \neg \triangleright p) \longrightarrow \triangleright (\triangleright p \rightarrow p). \end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ сначала введем рефлексивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3_{\mathbf{T}}^{\triangleright} \rangle$, а затем возьмем его симметризацию:

$$w \uparrow x \Leftarrow (w \uparrow x) \& (x \uparrow w). \quad \langle 3_{\mathbf{B}}^{\triangleright} \rangle$$

Для доказательства $\langle 2^\triangleright \rangle$ берем Π и Λ как выше, а также

$$\Sigma := \{C \in |w| \mid \triangleright C \in |w|\}, \quad \Sigma' := \{C \in \langle w \mid \mid \triangleright C \in |w|\}.$$

Существует разбиение $\Sigma = \Phi\Psi$, $\Sigma' = \Phi'\Psi'$ такое, что $\mathcal{L} \not\vdash B, \Pi, \Phi' \Rightarrow \Phi, \triangleright (\Psi'\Psi), \Lambda$, иначе, исходя из всевозможных секвенций такого вида по правилу $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^0)$, мы бы вывели² секвенцию $\Pi, \triangleright (\Pi\Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \triangleright B$ и далее ослаблением $\mathcal{L} \vdash w$.

Осталось для $x \in W_{\mathcal{L}}^\Gamma$ такого, что $\Pi\Phi' \subseteq \langle x \mid$ и $\Phi, \triangleright (\Psi'\Psi), \Lambda \subseteq |x|$, проверить $w \uparrow x$. Заметим, что $x \subseteq w$. Условие $w \uparrow x$ проверяется как в случае логики **T**. Докажем $x \uparrow w$. Пусть $\triangleright C \in \langle x \mid$. Тогда $\triangleright C \in w$ ввиду $x \subseteq w$, и $C \in w$ в силу замкнутости w .

Далее, пусть $C \in \langle x \mid$. Если бы $C \in |w|$, то были бы возможны следующие случаи:

- 1) $\triangleright C \in \langle w \mid$, тогда $C \in \Lambda \subseteq |x|$, что неверно;
- 2) $\triangleright C \in |w|$, тогда $C \in \Sigma = \Phi\Psi$ и мы имеем: если $C \in \Phi$, то $C \in |x|$, что неверно; если же $C \in \Psi$, то $\triangleright C \in \triangleright \Psi \subseteq |x|$, что тоже неверно.

Теперь пусть $C \in |x|$. Если бы $C \in \langle w \mid$, то были бы возможны следующие случаи:

- 1) $\triangleright C \in \langle w \mid$, тогда $C \in \Pi \subseteq \langle x \mid$, что неверно;
- 2) $\triangleright C \in |w|$, тогда $C \in \Sigma' = \Phi'\Psi'$ и мы имеем: если $C \in \Phi'$, то $C \in \langle x \mid$, что неверно; если же $C \in \Psi'$, то $\triangleright C \in \triangleright \Psi' \subseteq |x|$, что тоже неверно.

Логика S5. (2) $\Rightarrow$ (3) Строим вывод в **S5** ^{$\triangleright$} :

$$\frac{\frac{\frac{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \neg \triangleright \Sigma\} \rightarrow B}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \neg \triangleright \Sigma\} \rightarrow [\triangleright \Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \neg \triangleright \Sigma\} \rightarrow \triangleright B]}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \neg \triangleright \Sigma, \triangleright \triangleright \Pi, \triangleright \neg \triangleright \Sigma\} \rightarrow \triangleright B}}{\Lambda\{\Pi, \triangleright \Pi, \neg \triangleright \Sigma\} \rightarrow \triangleright B.}$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W_{\mathcal{L}}^\Gamma$ сначала введем рефлексивное транзитивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3_{\mathbf{S4}}^\triangleright \rangle$, а затем возьмем его симметризацию:

$$w \uparrow x \Leftrightarrow (w \uparrow x) \& (x \uparrow w). \quad \langle 3_{\mathbf{S5}}^\triangleright \rangle$$

Для доказательства $\langle 2^\triangleright \rangle$ возьмем $\Sigma := \{C \mid \triangleright C \in |w|\}$, а также Π и Λ как выше. Если бы $\mathcal{L} \vdash B, \Pi, \triangleright (\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright \Sigma$, то по правилу $(\Rightarrow_{\mathbf{S5}}^0)$ мы бы вывели $\mathcal{L} \vdash w$. Осталось для такого $x \in W_{\mathcal{L}}^\Gamma$, что $\Pi, \triangleright (\Pi\Lambda) \subseteq \langle x \mid$ и $\Lambda, \triangleright \Sigma \subseteq |x|$, проверить $w \uparrow x$. Заметим, что $x \subseteq w$.

Докажем, что $w \uparrow x$. Если $\triangleright C \in \langle w \mid$, то $C \in \Pi\Lambda$ и $\triangleright C \in \langle x \mid$. Далее, если $C \in \langle w \mid$, то $C \in \Pi \subseteq \langle x \mid$. Если же $C \in |w|$, то $C \in \Lambda \subseteq |x|$.

Докажем, что $x \uparrow w$. Пусть $\triangleright C \in \langle x \mid$. Тогда $\triangleright C \in w$ ввиду $x \subseteq w$, и если бы $\triangleright C \in |w|$, то $C \in \Sigma$ и $\triangleright C \in |x|$, что неверно; значит, $\triangleright C \in \langle w \mid$. Далее, если $C \in \langle x \mid$, то $C \in w$, и если бы $C \in |w|$, то ввиду доказанного включения $\triangleright C \in \langle w \mid$ имеем $C \in \Lambda \subseteq |x|$, что неверно; поэтому $C \in \langle w \mid$. Если же $C \in |x|$, то $C \in w$, и если бы $C \in \langle w \mid$, то ввиду $\triangleright C \in \langle w \mid$ имеем $C \in \Pi \subseteq \langle x \mid$, что неверно; поэтому $C \in |w|$.

Логика Grz.

²Если в данном применении правила $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^0)$ мы могли бы ограничиться условием $\Sigma\Sigma' \subseteq \text{Sb}(\Pi\Lambda B)$, то попутно было бы установлено свойство подформульности для исчисления $[\mathbf{B}_2^\triangleright]$.

(2) $\implies$ (3) Выводим в $\mathbf{Grz}^\triangleright$, используя аксиому $(A_4^\triangleright)$ на последнем шаге:

$$\frac{\frac{\frac{\bigwedge\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow (\triangleright (B \rightarrow \triangleright B) \rightarrow B)}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow [\triangleright \bigwedge\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright (\triangleright (B \rightarrow \triangleright B) \rightarrow B)]}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright \Pi, \triangleright \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright \Pi\} \rightarrow \triangleright B.}$$

(3) $\implies$ (4) Докажем $\triangleright$ -перевод аксиомы $(A_G^\triangleright)$ в $\mathbf{Grz}$. С одной стороны, $\mathbf{Grz} \vdash \Box p \rightarrow p$ и потому

$$\mathbf{Grz} \vdash (p \rightarrow \triangleright p) \longleftrightarrow (p \rightarrow \Box p).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{Grz} \vdash \Box \neg (p \rightarrow \triangleright p) &\longleftrightarrow \Box \neg (p \rightarrow \Box p) \\ &\longleftrightarrow [\Box p \& \Box \neg \Box p] \longleftrightarrow \neg [\Box p \rightarrow \Diamond \Box p] \longleftrightarrow \perp. \end{aligned}$$

Тогда выводим в $\mathbf{Grz}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\Box[\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p] \rightarrow p}{\Box[\Box(p \rightarrow \triangleright p) \vee \perp \rightarrow p] \rightarrow p} \\ &\frac{\Box[\Box(p \rightarrow \triangleright p) \vee \Box \neg (p \rightarrow \triangleright p) \rightarrow p] \rightarrow p}{\Box[\triangleright (p \rightarrow \triangleright p) \rightarrow p] \rightarrow p} \\ &\Box[\triangleright (p \rightarrow \triangleright p) \rightarrow p] \rightarrow \Box p. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{Grz} \vdash \Box \neg [\triangleright (p \rightarrow \triangleright p) \rightarrow p] \longleftrightarrow [\Box \triangleright (p \rightarrow \triangleright p) \& \Box \neg p] \longrightarrow \Box \neg p \longrightarrow \triangleright p.$$

(5) $\implies$ (1) Несколько модифицируем метод доказательства, описанный в п. 3. Допустим, $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Возьмем $\Gamma := \text{Sb } \Pi \Sigma$,

$$\hat{\Gamma} := \Gamma \cup \text{Sb}\{\triangleright (A \rightarrow \triangleright A), \triangleright (A \vee \triangleright A) \mid \triangleright A \in \Gamma\}.$$

Множество

$$W_{\mathcal{L}}^\Gamma := \{w \mid w - \text{замкнутая тонкая секвенция}, \langle w \mid \subseteq \hat{\Gamma}, |w\rangle \subseteq \Gamma, \mathcal{L} \not\vdash w\}$$

конечно.

ЛЕММА 4.3 (о замыкании). *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$ такую, что $\Pi \subseteq \hat{\Gamma}$ и $\Sigma \subseteq \Gamma$, можно расширить до секвенции из $W_{\mathcal{L}}^\Gamma$. Формально, если $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, причем $\Pi \subseteq \hat{\Gamma}$ и $\Sigma \subseteq \Gamma$, то $\exists w \in W_{\mathcal{L}}^\Gamma : \Pi \subseteq \langle w \mid, \Sigma \subseteq |w\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дополнение к доказательству леммы 3.2 надо проверить, что если в процессе замыкания секвенция $\Pi' \Rightarrow \Sigma'$, невыводимая в $\mathcal{L}$, получена из $\Pi \Rightarrow \Sigma$ добавлением формулы $A \in \text{Sb} \Pi \Sigma$, $A \notin \Pi \Sigma$, в антецедент или сукцедент, то $\Pi' \subseteq \hat{\Gamma}$ и $\Sigma' \subseteq \Gamma$. Первое включение очевидно. При $A \in \Gamma$ второе тоже очевидно. Если же $A \in (\hat{\Gamma} \setminus \Gamma)$, то ввиду $A \notin \Pi \Sigma$ формула A есть либо $(B \vee \triangleright B)$, либо $(B \rightarrow \triangleright B)$ для некоторой $\triangleright B \in \Pi \Sigma$, причем $\triangleright A \in \Pi$. В обоих случаях $\mathcal{L} \vdash \triangleright A \Rightarrow A$, что следует из леммы 2.3 (б, в), и, значит, $\mathcal{L} \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma A$. Поэтому формула A не могла быть добавлена в сукцедент секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ и, следовательно, $\Sigma' = \Sigma \subseteq \Gamma$.

Как и ранее, для любых $w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ и $p \in \mathbb{P}$ положим $w \models p \Leftarrow p \in \langle w |$. Формулировка и доказательство лемм 3.3 и 3.4 переносятся на наш случай без существенных изменений. На $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ введем сначала транзитивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3_{\mathbf{S4}}^{\triangleright} \rangle$, далее иррефлексивное транзитивное отношение

$$w \prec x \Leftarrow (w \uparrow x) \& (\exists C \in \mathbf{Fm}^{\triangleright} \triangleright C \notin \langle w | \& \triangleright C \in \langle x |) \quad \langle 3_{\mathbf{Grz}}^{\triangleright} \rangle$$

и, наконец, рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение, т.е. частичный порядок $w \preceq x \Leftarrow (w \prec x) \vee (w = x)$. Построена конечная **Grz**-шкала $F_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := (W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}, \preceq)$. Осталось проверить условие $\langle 2^{\triangleright} \rangle$, имеющее теперь вид

$$\forall w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} \forall \triangleright B \in w \quad \triangleright B \in \langle w | \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \succ w & B \in \langle x |, \\ \forall x \succ w & B \in \langle x |. \end{cases} \quad \langle 2^{\triangleright} \rangle$$

ЛЕММА 4.4. *Имеет место импликация $\langle 3_{\mathbf{Grz}}^{\triangleright} \rangle \Rightarrow \langle 2^{\triangleright} \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентность в $\langle 2^{\triangleright} \rangle$. Возьмем любые $w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ и $\triangleright B \in w$.

($\Rightarrow$) Пусть $\triangleright B \in \langle w |$. Возможны следующие два случая:

- 1) $B \in \langle w |$, тогда $\forall x \succ w$ имеем: либо $w \prec x$, $w \uparrow x$ и $B \in \langle x |$ по $\langle 3_{\mathbf{S4}}^{\triangleright} \rangle$, либо $x = w$ и $B \in \langle w | = \langle x |$;
- 2) $B \in |w\rangle$, аналогично $\forall x \succ w$ получаем $B \in \langle x |$.

($\Leftarrow$) Пусть $\triangleright B \in |w\rangle$. Возьмем Π, Λ как в доказательстве леммы 4.2.

Случай $B \in |w\rangle$. Положим $y := w$. Далее имеем

$$\mathcal{L} \not\vdash B, \triangleright (B \vee \triangleright B), \Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda,$$

иначе по правилу ($\Rightarrow_{\mathbf{Grz}}^{\triangleright 0}$) и правилам ослабления получим $\mathcal{L} \vdash w$. Поскольку $\triangleright B \in |w\rangle \subseteq \Gamma$, антецедент выписанной секвенции содержится в $\hat{\Gamma}$, а сукцедент в Γ . По лемме о замыкании эту секвенцию можно погрузить в некоторую секвенцию $x \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. Остается проверить, что $w \prec x$. Условие $w \uparrow x$ проверяется как в случае логики **S4**. Далее, $\triangleright (B \vee \triangleright B) \in \langle x |$. Но $\triangleright (B \vee \triangleright B) \notin \langle w |$, иначе, учитывая $B, \triangleright B \in |w\rangle$, мы в силу леммы 2.3 (в) получим даже $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^{-} \vdash w$.

Случай $B \in \langle w |$. Теперь $x := w$ и аналогично имеем

$$\mathcal{L} \not\vdash \triangleright (B \rightarrow \triangleright B), \Pi, \triangleright (\Pi \Lambda) \Rightarrow \Lambda, B.$$

Как и выше, погружаем эту секвенцию в некоторый $y \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. Очевидно, $w \uparrow y$. Наконец, $w \prec y$, поскольку $\triangleright (B \rightarrow \triangleright B) \in \langle y |$, но $\triangleright (B \rightarrow \triangleright B) \notin \langle w |$ ввиду леммы 2.3 (б).

Теорема полностью доказана.

Напомним, что в присутствии рефлексивности оператор $\Box$ выражается через $\triangleright$ посредством равенства $\Box p = p \& \triangleright p$. Исходя из этого, введем перевод $\text{Tr}: \mathbf{Fm}^\Box \rightarrow \mathbf{Fm}^\triangleright$, сохраняющий переменные и булевы связки, а на формулах вида $\Box A$ действующий следующим образом:

$$\text{Tr}(\Box A) = \text{Tr}(A) \& \triangleright \text{Tr}(A).$$

Далее, для произвольной $\triangleright$ -логики M обозначим

$$M^\Box := \{A \in \mathbf{Fm}^\Box \mid \text{Tr}(A) \in M\} = \text{Tr}^{-1}(M).$$

Легко видеть что переводы tr и Tr взаимно обратны в следующем смысле: $\mathbf{T} \vdash \text{tr}(\text{Tr}(\Box p)) \leftrightarrow \Box p$ и $\mathbf{T}^\triangleright \vdash \text{Tr}(\text{tr}(\triangleright p)) \leftrightarrow \triangleright p$. Как следствие, $(L^\triangleright)^\Box = L$ для любой $\Box$ -логики L , содержащей аксиому $(A_1^\triangleright)$, а также $(M^\Box)^\triangleright = M$ для любой $\triangleright$ -логики M , содержащей аксиому $(A_1^\triangleright)$. Отсюда вытекает, что условие $L^\triangleright = M$ равносильно конъюнкции условий $[M \subseteq L^\triangleright \text{ и } L \subseteq M^\Box]$. Последнее утверждение позволяет строить аксиоматику логики разрешимости над любой нормальной логикой, содержащей $\mathbf{T}$.

ЛЕММА 4.5. Пусть нормальная логика L аксиоматизирована над $\mathbf{T}$ множеством аксиом $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}^\Box$. Тогда логика разрешимости над L имеет следующую аксиоматику:

$$L^\triangleright = \mathbf{T}^\triangleright + \text{Tr}(\Gamma), \quad \text{где } \text{Tr}(\Gamma) := \{\text{Tr}(A) \mid A \in \Gamma\}.$$

Применяя эту лемму, легко проверить, что $\mathbf{S4.1}^\triangleright = \mathbf{S4}^\triangleright + (A_1^\triangleright)$, где $(A_1^\triangleright)$ есть аксиома $\triangleright \triangleright p \rightarrow \triangleright p$. Наконец, покажем, что переход $L \mapsto L^\triangleright$ является инъективным гомоморфизмом решетки расширений логики $\mathbf{T}$.

ЛЕММА 4.6. Если $\Box$ -логики L, M содержат $\mathbf{T}$, то

$$L \subseteq M \Leftrightarrow L^\triangleright \subseteq M^\triangleright.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить сохранение нестрогого включения. Из $L \subseteq M$ следует $L^\triangleright \subseteq M^\triangleright$. Обратно, если $L^\triangleright \subseteq M^\triangleright$, то $L = (L^\triangleright)^\Box \subseteq (M^\triangleright)^\Box = M$.

5. Неустранимость сечения и интерполяция. Здесь мы установим, что во всех построенных в п. 2 секвенциальных исчислениях $[L_k^\triangleright]$, $k = 1, 2$, сечение не устранимо, но в то же время логики $L^\triangleright$ обладают интерполяционным свойством Крейга.

ТЕОРЕМА 5.1. В исчислениях $[L_k^\triangleright]$, где $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}, \mathbf{B}, \mathbf{Grz}\}$, $k = 1, 2$, сечение не устранимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Секвенция $\triangleright (p \rightarrow \triangleright p)$, $p \Rightarrow \triangleright p$ выводима в $[\mathbf{T}_2^\triangleright]^-$ (см. лемму 2.3 (б)), а значит, и во всех рассматриваемых исчислениях $[L_k^\triangleright]$. Покажем, что она не выводима без сечения в $[\mathbf{B}_1^\triangleright]$ и в $[L_k^\triangleright]$ при $L \neq \mathbf{B}$.

Допустим, существует ее вывод без сечений в одном из этих исчислений. Последним применением неструктурного правила в этом выводе могло быть только применение одного из правил $(\triangleright \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \triangleright)$, $(\Rightarrow \triangleright^r)$ или $(\Rightarrow \triangleright^r)$, при этом первые два исключаются сразу, ибо формулы вида $\triangleright \neg A$ наследуются в выводах без сечений, а в нашей секвенции нет таких формул или подформул. Заключение этого применения должно иметь вид

$$[\triangleright (p \rightarrow \triangleright p)]^l, [p]^m \Rightarrow [\triangleright p]^n, \quad l, m, n \geq 0,$$

поскольку далее в этом выводе применялись лишь правила ослабления и сокращения. Легко видеть, что при $L \neq \mathbf{B}$ заключения правил $(\Rightarrow_L^{\triangleright})$ и $(\Rightarrow_L^{\triangleright r})$ могут иметь данный вид лишь при $l = m = 0$ и $n > 0$. Однако из семантических соображений (используя доказанную теорему о полноте) ясно, что секвенция $\Rightarrow [\triangleright p]^n$ не выводима в рассматриваемых исчислениях.

2) Покажем, что секвенция $\triangleright p \Rightarrow \triangleright \neg p$ выводима даже в $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^-$, но не выводима в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$ без сечений. Имеем вывод в $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^-$:

$$\frac{\frac{\frac{p \Rightarrow p}{\Rightarrow p, \neg p} \quad \frac{p \Rightarrow p}{p, \neg p \Rightarrow}}{\triangleright p \Rightarrow p, \triangleright \neg p} \quad \frac{p, \triangleright p \Rightarrow \triangleright \neg p}{\triangleright p \Rightarrow \triangleright \neg p}.$$

Допустим, существует ее вывод без сечений в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$. Последним применением неструктурного правила в этом выводе могло быть только применение правила $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^{\triangleright r})$. Его заключение имеет вид: $[\triangleright p]^m \Rightarrow [\triangleright \neg p]^n$, где $m, n \geq 0$. Сопоставляя эту секвенцию с обозначениями из формулировки правила $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^{\triangleright r})$, имеем: $\Pi = \Lambda = \emptyset$, $\Sigma' = [\triangleright p]^m$, $\Sigma = [\triangleright \neg p]^{n-1}$. Посылка этого применения, отвечающая разбиению $\Phi = \Phi' = \emptyset$, $\Psi = \Sigma$ и $\Psi' = \Sigma'$, будет иметь вид

$$p^{\bar{r}} \Rightarrow p^r, [\triangleright \triangleright p]^m, [\triangleright \triangleright \neg p]^n, \quad \text{где } r \in \{0, 1\}.$$

Покажем, что последняя секвенция не выводима в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$. В противном случае по теореме о полноте $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash p^{\bar{r}} \rightarrow (p^r \vee \triangleright \triangleright p \vee \triangleright \triangleright \neg p)$. Пусть $r = 0$ (случай $r = 1$ рассматривается аналогично). Тогда по аксиоме $(A_{\neg}^{\triangleright})$ и правилу (RE) получаем $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash p \rightarrow \triangleright \triangleright p$. Подставив $\neg p$ вместо p , мы выведем $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash \neg p \rightarrow \triangleright \triangleright p$. Отсюда $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash \triangleright \triangleright p$, т.е. $\mathbf{B}^{\triangleright} = \mathbf{S5}^{\triangleright}$, но по лемме 4.5 включение $\mathbf{B}^{\triangleright} \subseteq \mathbf{S5}^{\triangleright}$ является строгим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Логика L обладает (интерполяционным) свойством Крейга, если из $L \vdash A \rightarrow C$ следует существование такой формулы B (интерполянта), что

$$L \vdash A \rightarrow B, \quad L \vdash B \rightarrow C \quad \text{и} \quad \text{Var } B \subseteq (\text{Var } A \cap \text{Var } C).$$

ЛЕММА 5.3. Логика $L \subseteq \mathbf{Fm}^{\square}$, содержащая $\mathbf{T}$, обладает свойством Крейга тогда и только тогда, когда логика $L^{\triangleright}$ обладает им.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(\Rightarrow)$ Воспользуемся очевидной выводимостью $\mathbf{T} \vdash A \leftrightarrow \text{tr}(\text{Tr}(A))$ для всякой $\square$ -формулы A . Пусть $L^{\triangleright} \vdash A \rightarrow C$, т.е. $L \vdash \text{tr}(A) \rightarrow \text{tr}(C)$. По свойству Крейга для L имеем

$$\exists B \in \mathbf{Fm}^{\square}: \text{Var } B \subseteq (\text{Var } A \cap \text{Var } C), \quad L \vdash \text{tr}(A) \rightarrow B, \quad B \rightarrow \text{tr}(C).$$

Тогда $L \vdash \text{tr}(A) \rightarrow \text{tr}(\text{Tr}(B))$, $\text{tr}(\text{Tr}(B)) \rightarrow \text{tr}(C)$. Отсюда $L^{\triangleright} \vdash A \rightarrow \text{Tr}(B)$, $\text{Tr}(B) \rightarrow C$. Таким образом, $\text{Tr}(B)$ является интерполянтом $A \rightarrow C$ в $L^{\triangleright}$.

$(\Leftarrow)$ Провести те же рассуждения, поменяв ролями переводы Tr и tr .

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Логики $L^\triangleright$, $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}, \mathbf{S4.1}\}$, обладают интерполяционным свойством Крейга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из известного (см. [17], [14]) свойства Крейга для L и леммы 5.3.

Автор благодарит проф. С.Н. Артёмова за помощь при изучении данной темы, а также В.Б. Шехтмана за интерес к работе и полезные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brogan A. P. Aristotle's logic of statements about contingency // *Mind*. 1967. V. 76. P. 49–81.
- [2] Montgomery H., Routley R. Contingency and non-contingency bases for normal modal logics // *Logique et Analyse*. 1966. V. 9. P. 318–328.
- [3] Montgomery H., Routley R. Noncontingency axioms for $S4$ and $S5$ // *Logique et Analyse*. 1968. V. 11. P. 422–424.
- [4] Montgomery H., Routley R. Modalities in a sequence of normal non-contingency modal systems // *Logique et Analyse*. 1969. V. 12. P. 225–227.
- [5] Mortensen C. A sequence of normal modal systems with non-contingency bases // *Logique et Analyse*. 1976. V. 19. P. 341–344.
- [6] Cresswell M. J. Necessity and contingency // *Studia Logica*. 1988. V. 47. P. 145–149.
- [7] Humberstone I. L. The logic of non-contingency // *Notre Dame J. Formal Logic*. 1995. V. 36. № 2. P. 214–229.
- [8] Kuhn S. T. Minimal non-contingency logic // *Notre Dame J. Formal Logic*. 1995. V. 36. № 2. P. 230–234.
- [9] Zolin E. Epistemic non-contingency logic // *Notre Dame J. Formal Logic*. 1999. V. 40. № 4. P. 533–547.
- [10] Золин Е. Секвенциальная логика арифметической разрешимости // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 2001. № 6. С. 43–48.
- [11] Минц Г. Е. Системы Льюиса и система T (1965–1973) // Р. Фейс, Модальная логика. М.: Наука, 1974. С. 423–509.
- [12] Ohnishi M., Matsumoto K. Gentzen method in modal calculi // *Osaka Math. J.* 1957. V. 9. № 2. P. 113–130; Correction // *Osaka Math. J.* 1958. V. 10. № 1. P. 147.
- [13] Ohnishi M., Matsumoto K. Gentzen method in modal calculi II // *Osaka Math. J.* 1959. V. 11. № 2. P. 115–120.
- [14] Takano M. Subformula property as a substitute for cut elimination in modal propositional logics // *Math. Japonica*. 1992. V. 37. № 6. P. 1129–1145.
- [15] Smullyan R. M. Analytic cut // *J. Symbolic Logic*. 1968. V. 33. P. 560–564.
- [16] Boolos G. The Logic of Provability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [17] Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic: Oxford Sci. Publ., 1997.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: zolin@lpcs.math.msu.ru, zolin@mccme.ru

Поступило
26.10.2000