Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вей Хианглин, Динг Рен, О плоских точечных подмножествах с заданным числом внутренних точек, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 752–756

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:50:18

О плоских точечных подмножествах с заданным числом внутренних точек

Хианглин Вей, Рен Динг

Внутренней точкой конечного плоского точечного множества является любая точка множества, которая не лежит на границе выпуклой оболочки этого множества. Предположим, что для любого целого $k \geq 1$ $g(k)$ является наименьшим целым числом таким, что любое множество P точек на плоскости, которое содержит, по крайней мере, $g(k)$ внутренних точек, и никакие три точки этого множества не лежат на одной прямой, имеет подмножество, содержащее в точности k внутренних точек множества P . Доказано, что $g(k) \geq 3k$ при $k \geq 3$, что является улучшением известного результата: $g(k) \geq 3k - 1$ при $k \geq 3$.

Библиография: 9 названий.

Пусть P – множество точек на плоскости в общем положении, т.е. никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Через $V(P)$ обозначим множество вершин множества P , т.е. множество точек, принадлежащих границе множества $CH(P)$, которое является выпуклой оболочкой множества P . Точка, принадлежащая P , но не принадлежащая $V(P)$, называется *внутренней точкой* множества P . Через $I(P)$ обозначим множество внутренних точек множества P , $i(P) = |I(P)|$. В работе [1] авторы изучали вопрос, когда точечное множество P имеет подмножество, выпуклая оболочка которого содержит в точности k внутренних точек множества P .

Здесь нужно более точно объяснить, что означают слова “подмножество множества P , выпуклая оболочка которого содержит в точности k внутренних точек множества P ”. Пусть Q – подмножество множества P . Будем говорить, что Q содержит внутреннюю точку p множества P , если $p \in I(P) \cap \text{int } CH(Q)$. В том же самом смысле будем употреблять для краткости следующие выражения: “*подмножество с k внутренними точками множества P* ” или “*подмножество с k внутренними точками*”. Через $i^*(Q) = |I(P) \cap \text{int } CH(Q)|$ обозначим число внутренних точек множества P , содержащихся в Q . Легко привести пример, показывающий, что $i^*(Q)$ необязательно будет равно $i(Q)$.

Для любого целого $k \geq 1$ обозначим через $g(k)$ наименьшее целое число такое, что любое множество P точек плоскости, никакие три из которых не лежат на

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда естественных наук Китая (грант № 10571042), фонда NSF в Хэбеи (гранты №№ A2005000144, A2007000002) и фонда SF Хэбейского нормального университета (грант № L2004202). Также работа была частично поддержана университетом Обена, США.

одной прямой, и которое содержит, по крайней мере, $g(k)$ внутренних точек, имеет подмножество, содержащее в точности k внутренних точек множества P , т.е.

$$g(k) =: \min\{s : i(P) \geq s \Rightarrow \exists Q \subset P \ i^*(Q) = k\}.$$

В работе [1] доказано, что $g(1) = 1$, $g(2) = 4$, $g(3) \geq 8$ и $g(k) \geq k + 2$. В работе [2] Февенс доказал следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2]. *Имеем $g(k) \geq 3k - 1$ при $k \geq 3$.*

В данной статье, получен следующий результат, усиливающий предложение 1.

ТЕОРЕМА. *Имеем $g(k) \geq 3k$ при $k \geq 3$.*

Более подробный обзор результатов в этой области приводится в [3]–[9].

Чтобы оценить нижние грани числа $g(k)$, мы, как обычно, рассмотрим *дефектное точечное множество типа $P(m, s, k)$* . Будем говорить, что множество точек P является дефектным точечным множеством типа $P(m, s, k)$, которое будем обозначать $P = P(m, s, k)$, если P имеет m вершин и s внутренних точек, но не имеет никакого подмножества, содержащего в точности k внутренних точек. Следовательно, чтобы доказать неравенство $g(k) \geq s + 1$, достаточно доказать существование дефектного точечного множества P типа $P(m, s, k)$. Заметим, что из существования дефектного точечного множества типа $P(3, s, k)$ следует существование дефектного точечного множества типа $P(m, s, k)$ при всех $m \geq 3$, как это утверждает следующая лемма.

ЛЕММА О ПРОДОЛЖЕНИИ [1]. *Всякое дефектное точечное множество $P(m, s, k)$ может быть продолжено до дефектного точечного множества $P(m + 1, s, k)$.*

Следовательно, чтобы доказать наш результат $g(k) \geq 3k$, достаточно доказать существование дефектного точечного множества типа $P(3, 3k - 1, k)$. Теперь мы построим дефектное точечное множество $P = P(3, 3k - 1, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Построим дефектное точечное множество $P = P(3, 3k - 1, k)$ следующим образом (см. рис. 1 для случая $k = 3, 4, 5$).

(a) Дефектное точечное множество $P = P(3, 8, 3)$

- (b) Дефектное точечное множество $P = P(3, 11, 4)$, которое может быть получено соответствующим добавлением точек a_1, a_5, a_9 к множеству (a) с соответствующими изменениями индексов

- (c) Дефектное точечное множество $P = P(3, 14, 5)$, которое может быть получено соответствующим добавлением точек a_1, a_6, a_{12} к множеству (b) с соответствующими изменениями индексов

Рис. 1

Возьмем множество

$$P = \{v_1, v_2, v_3, a_1, a_2, \dots, a_{3k-3}, d_1, d_2\},$$

где

$$V(P) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

с вершинами v_1, v_2, v_3 , пронумерованными против часовой стрелки, и

$$I(P) = \{a_1, a_2, \dots, a_{3k-3}, d_1, d_2\}$$

с $a_0 = v_1, a_1, a_2, \dots, a_{3k-3}, a_{3k-2} = v_3$, пронумерованными против часовой стрелки.

Пусть $P_0 = P \setminus \{v_2\}$. Построим

$$V(P_0) = \{a_0 = v_1, a_1, a_2, \dots, a_{3k-3}, a_{3k-2} = v_3\}, \quad I(P_0) = \{d_1, d_2\}.$$

Для любых точек $x, y \in V(P_0)$ прямая линия, являющаяся продолжением отрезка xy , рассекает плоскость на две открытые полуплоскости. Полуплоскость, содержащая v_2 , называется *внешней стороной* линии (или, для краткости, отрезка xy), а другая полуплоскость называется *внутренней стороной* линии (или, для краткости, отрезка xy).

Точки d_1, d_2 расположены следующим образом. Точка d_1 лежит в конусе, образованном двумя лучами v_2a_{k-1} и v_2a_k . Точка d_2 лежит в конусе, образованном двумя лучами v_2a_{2k-2} и v_2a_{2k-1} . Кроме того, d_1 лежит на внутренней стороне отрезков $a_0a_k, a_1a_{k+1}, a_2a_{k+2}, \dots, a_{k-2}a_{2k-2}, a_{k-1}a_{2k-1}, a_{k-1}a_{2k}$ и на внешней стороне отрезков $a_0a_{k+1}, a_1a_{k+2}, \dots, a_{k-3}a_{2k-2}, a_{k-2}a_{2k-1}$. Точка d_2 лежит на внутренней стороне отрезков $a_{3k-2}a_{2k-2}, a_{3k-3}a_{2k-3}, \dots, a_{2k}a_k, a_{2k-1}a_{k-1}, a_{2k-1}a_{k-2}$ и на внешней стороне отрезков $a_{3k-2}a_{2k-3}, a_{3k-3}a_{2k-4}, \dots, a_{2k+1}a_k, a_{2k}a_{k-1}$.

Построение закончено. Как показано на рис. 1, множество $P(3, 3k-1, k)$ можно получить, добавляя соответствующим образом $a_1, a_{\lfloor (3k-2)/2 \rfloor}, a_{3k-3}$ к множеству $P(3, 3(k-1)-1, k-1)$ с соответствующими изменениями индексов.

Теперь покажем, что $P = P(3, 3k-1, k)$, где $k \geq 3$.

Пусть Q – произвольное подмножество множества P . Достаточно показать, что $i^*(Q) \neq k$.

Случай I: $v_2 \notin Q$. Тогда, так как $I(P \setminus \{v_2\}) = \{d_1, d_2\}$, имеем $i^*(Q) \leq 2$ и, следовательно, $i^*(Q) \neq k \geq 3$.

Случай II: $v_2 \in Q$.

- $d_1 \in \text{int } CH(Q)$ или $d_2 \in \text{int } CH(Q)$. Не ограничивая общности, предположим, что $d_1 \in \text{int } CH(Q)$; тогда треугольник $v_2a_i a_{i+k+1}$ содержится в $CH(Q)$ и, следовательно, $i^*(Q) \geq k+1$.
- $d_1 \notin \text{int } CH(Q)$ и $d_2 \notin \text{int } CH(Q)$. Тогда $CH(Q)$ содержит по крайней мере один треугольник $v_2a_i a_{i+k}$ и, следовательно, $i^*(Q) \leq k-1$.

Итак, $i^*(Q) \neq k$ для любого $Q \subset P$ и, следовательно, $g(k) \geq 3k$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Avis, K. Hosono, M. Urabe, “On the existence of a point subset with a specified number of interior points”, *Discrete Math.*, **241**:1–3 (2001), 33–40.
- [2] T. Fevens, “A note on point subsets with a specified number of interior points”, *Discrete and computational geometry*, Lecture Notes in Comput. Sci., **2866**, Springer, Berlin, 2003, 152–158.
- [3] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.
- [4] J. Horton, “Sets with no empty 7-gons”, *Canad. Math. Bull.*, **26**:4 (1983), 482–484.
- [5] K. Hosono, G. Károlyi, M. Urabe, “On the existence of a convex polygon with a specified number of interior points”, *Discrete Geometry*, In Honor of W. Kuperberg’s 60th Birthday, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **253**, Marcel Dekker, New York, 2003, 351–358.
- [6] T. Bisztriczky, K. Hosono, G. Károlyi, M. Urabe, “Constructions from empty polygons”, *Period. Math. Hungar.*, **49**:2 (2004), 1–8.

- [7] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [8] J.D. Kalbfleisch, J.G. Kalbfleisch, R.G. Santon, “A combinatorial problem on convex n -gons”, *Proc. Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Louisiana State Univ., Baton Rouge, LA, 1970, 180–188.
- [9] W. Morris, V. Soltan, “The Erdős–Szekeres problem on points in convex position – a survey”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **37**:4 (2000), 437–458.

Хианглин Вей

Хэбейский нормальный университет, КНР

E-mail: wxlhebtu@126.com

Поступило

14.03.2007

Рен Динг

Хэбейский нормальный университет, КНР

E-mail: rending@hebtu.edu.cn