Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Ярмухамедов, Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 763–778

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:34:24

Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши

Ш. Ярмухамедов

В работе предлагается явная формула восстановления гармонической функции в области по ее известным значениям и значениям ее нормальной производной на части границы, т.е. дана явная формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Библиография: 6 названий.

Введение. В работе предлагается явная формула восстановления гармонической функции в области по ее известным значениям и значениям ее нормальной производной на части границы, т.е. дается явная формула продолжения решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, – вещественное двумерное и трехмерное евклидово пространство и

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha^2 = (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$

при $m = 2$ и

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3, \\ \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2 = |x - y|^2,$$

когда $m = 3$; D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^m$ с границей ∂D , состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ (при $m = 2$ отрезок $a_1 \leq y_2 \leq b_1$) и гладкого куска поверхности S (гладкой дуги кривой, когда $m = 2$) Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$ (при $m = 2$ полуплоскости $y_2 \geq 0$), $\overline{D} = D \cup \partial D$, $\partial D = S \cup T$; d/dn – оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂D . Относительно S будем предполагать, что каждый луч, выходящий из любой точки области $x \in D$, встречает эту поверхность (кривую) самое большее в k точках; $H(D)$ – совокупность вещественных функций класса $C^2(D)$, гармонических в D .

Решение задачи Коши будем строить в области D , когда данные Коши заданы на части S границы. Задача Коши для уравнения Лапласа относится к числу некорректно поставленных задач.

Будем предполагать, что решение задачи существует (тогда оно единственно) и принадлежит классу $H(D) \cap C'(\overline{D})$ и данные Коши заданы точно. В этих условиях

устанавливается явная формула продолжения, которая является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтера и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений (теорема 2.1). Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным отклонением в равномерной метрике, при этом если решение и его нормальная производная ограничены на части T границы заданным положительным числом, то предлагается явная формула регуляризации (теорема 2.2).

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на T , когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_m > 0$ ($m = 2, 3$) (теорема 1.1). Следуя М. М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем *функцией Карлемана* для полупространства [1]. После построения функции Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши, выписываются в виде разности обобщенных потенциалов простого и двойного слоев. Полученная в теореме 2.1 формула продолжения позволяет сформулировать критерий разрешимости задачи Коши (теорема 3.1).

1. Конструкция функции Карлемана. Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующими равенствами: если $m = 2$, то

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, \quad (1.1)$$

если $m = 3$, то

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_3} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3. \quad (1.2)$$

Если отделить мнимую часть, то $\Phi_\sigma(x, y)$ имеет следующий вид. Если $m = 2$, то

$$2\pi e^{+\sigma x_2^2 + \sigma \alpha^2 - \sigma y_2^2} \cdot \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(x, y, u)}{u^2 + r^2} u e^{-\sigma u^2} du, \quad (1.3)$$

где

$$\varphi_\sigma(u, x, y) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_2 - x_2) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_2. \quad (1.4)$$

Если $m = 3$, то

$$2\pi^2 e^{+\sigma x_3^2 + \sigma \alpha^2 - \sigma y_3^2} \cdot \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(u, x, u)}{u^2 + r^2} e^{-\sigma u^2} du, \quad (1.5)$$

где

$$\varphi_\sigma(u, x, y) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3. \quad (1.6)$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Функция, определенная равенствами (1.1) и (1.2) при $\alpha > 0$, представима в виде*

$$\Phi_\sigma(x, y) = F(r) + G_\sigma(x, y), \quad (1.7)$$

где $F(r) = 1/(2\pi) \ln(1/r)$ при $m = 2$ и $F(r) = 1/(4\pi r)$, когда $m = 3$; $G_\sigma(x, y)$ – функция, гармоническая по переменному y в $\mathbb{R}^m$, включая $y = x$.

Из теоремы 1.1 следует, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ для любого $\sigma > 0$ по переменному y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Поэтому для функции $U(y) \in H(D) \cap C'(\bar{D})$ и любого $x \in D$ справедлива следующая интегральная формула Грина:

$$U(x) = \int_{\partial D} \left[\Phi_\sigma(x, y) \frac{dU(y)}{dn} - U(y) \frac{d\Phi_\sigma(x, y)}{dn} \right] ds_y. \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Введем обозначения

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_m}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m, \quad m = 2, 3, \quad (1.9)$$

$$f(x, y) = \int_0^\infty \frac{K(w)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \Psi(u) du, \quad \bar{f}(x, y) = \int_0^\infty \frac{K(\bar{w})}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \Psi(u) du, \quad (1.10)$$

где $\Psi(u) = u$, $m = 2$ и $\Psi(u) = 1$, когда $m = 3$, $\bar{w} = -i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m$.

В этих обозначениях

$$C_m e^{\sigma x_m^2} \Phi_\sigma(x, y) = \frac{f(x, y) - \bar{f}(x, y)}{2i} = \int_0^\infty \operatorname{Im} K(w) \frac{\Psi(u) du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad (1.11)$$

$$C_2 = -2\pi, \quad C_3 = -2\pi^2.$$

Пусть $m = 2$, $s = (y_1 - x_1)^2 > 0$. Тогда из (1.10) имеем

$$f(s, y_2) = \int_0^\infty K(w) \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad f(x, y) \equiv f(s, y_2), \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_2. \quad (1.12)$$

Уравнение Лапласа $\partial^2 U / \partial y_1^2 + \partial^2 U / \partial y_2^2 = 0$ в координатах точки (s, y_2) имеет вид

$$4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 2 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_2^2} = 0. \quad (1.13)$$

Действительно, полагая $U(y) = f(s, y_2)$ и дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = \frac{df}{ds} \frac{ds}{dy_1} = 2(y_1 - x_1) \frac{df}{ds}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} = 2 \frac{df}{ds} + 4s \frac{d^2 f}{ds^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = \frac{d^2 f}{dy_2^2}.$$

Сложив последние два равенства, получим (1.13).

Так как $d(\sqrt{u^2 + s})/ds = d(\sqrt{u^2 + s})/du^2$, из (1.12) дифференцированием получа-

ем

$$2 \frac{df}{ds} = 2 \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left(\frac{K(w)}{\sqrt{u^2 + s}} \right) u du = \int_0^\infty \frac{d}{du^2} \left(\frac{K(w)}{\sqrt{u^2 + s}} \right) du^2, \quad (1.14)$$

$$2 \frac{df}{ds} = \frac{K(w_0)}{\sqrt{s}}, \quad 4s \frac{d^2 f}{ds^2} = -iK'(w_0) + \frac{K(w_0)}{\sqrt{s}}, \quad w_0 = i\sqrt{s} + y_2.$$

Из (1.12) вычислим d^2f/dy_2^2 . Тогда получим

$$\frac{df}{dy_2} = \int_0^\infty \frac{K'(i\sqrt{u^2+s}+y_2)}{\sqrt{u^2+s}} u du = iK(w_0), \quad \frac{d^2f}{dy_2^2} = iK'(w_0). \quad (1.15)$$

Сложив равенства (1.14) и (1.15), получаем (1.13). Гармоничность $\Phi_\sigma(x, y)$ при $s > 0$ доказана.

Рассмотрим разность $\Phi_\sigma(x, y) - 1/(2\pi) \ln(1/r) = G_\sigma(s, y_2)$, где

$$\begin{aligned} 2\pi G(s, y_2) = & -\frac{1}{K_1(x_2)} \int_0^1 \operatorname{Im} \left[\frac{K_1(w) - K_1(x_2)}{w - x_2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2+s}} \\ & - \frac{1}{K_1(x_2)} \int_1^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K_1(w)}{w - x_2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2+s}} - \int_0^1 \operatorname{Im} \left[\frac{1}{w} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2+s}} - \ln \frac{1}{r}, \\ & K_1(w) = e^{\sigma w^2}, \quad w = i\sqrt{u^2+s} + y_2. \end{aligned}$$

Так как $K_2(w) = (K_1(w) - K_1(x_2))(w - x_2)^{-1}$ — целая функция, вещественная при вещественном w , то

$$\frac{\operatorname{Im} K_2(w)}{\sqrt{u^2+s}} = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{K_2^{2k+1}(y_2)}{(2k+1)!} (u^2+s)^k. \quad (1.16)$$

Из (1.16) видно, что первое и второе слагаемые в правой части полученного равенства представляют собой функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и являются функциями точки (s, y_2) . Последние два члена в сумме равны:

$$2^{-1} \ln \frac{1+r^2}{r^2} - \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Правая часть этого равенства также представляет собой функцию от (s, y_2) . Отсюда выводим представление

$$-K_1(x_2) \left[\ln \frac{1}{r} + 2\pi G(s, y_2) \right] = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K_1(w)}{w - x_2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2+s}},$$

где $G(s, y_2)$ как разность двух гармонических функций является также гармонической функцией при $s > 0$. Так как она гармонически продолжается на прямую $y_1 = x_1 (s = 0)$ то, обозначая через $G_\sigma(x, y)$ функцию $G(s, y_2)$, получаем утверждение теоремы 1.1, когда $m = 2$.

Пусть $m = 3$, $s = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$. Легко проверить, что оператор Лапласа в координатах точки (s, y_3) имеет вид

$$\begin{aligned} L(f) &= 4s \frac{d^2f}{ds^2} + 4 \frac{df}{ds} + \frac{d^2f}{dy_3^2}, \\ f(x, y) &\equiv f(s, y_3) = \int_0^\infty K(w) \frac{du}{\sqrt{u^2+s}}, \quad w = i\sqrt{u^2+s} + y_3. \end{aligned}$$

Покажем, что $L(f) = 0$, $s > 0$. Дифференцируя, приходим к равенствам

$$\frac{d^2f}{dy_3^2} = \int_0^\infty \frac{K''(w)}{\sqrt{u^2+s}} du, \quad w = i\sqrt{u^2+s} + y_3,$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \int_0^\infty \left[\frac{iK'}{2(u^2+s)} - \frac{K}{2(u^2+s)\sqrt{u^2+s}} \right] du, \\ \frac{d^2f}{ds^2} &= \int_0^\infty \left[-\frac{K''}{4(u^2+s)^{3/2}} - \frac{iK'}{2(u^2+s)^2} - \frac{iK'}{4(u^2+s)^2} + \frac{3K}{(u^2+s)^2\sqrt{u^2+s}} \right] du, \\ 4s \frac{d^2f}{ds^2} &= \int_0^\infty \left[-\frac{sK''}{4(u^2+s)^{3/2}} - \frac{3iK's}{(u^2+s)^2} + \frac{3Ks}{(u^2+s)^{5/2}} \right] du.\end{aligned}$$

Сложив полученные равенства, получим

$$L(f) = \int_0^\infty \frac{u^2 K''}{(u^2+s)^{3/2}} du + \int_0^\infty \frac{(2u^2-s)i}{(u^2+s)^2} K' du + \int_0^\infty \frac{(s-2u^2)i}{(u^2+s)^{5/2}} K du, \quad K = K(w).$$

Так как $-i dK' = uK'' du / \sqrt{u^2+s}$, интегрируя по частям первый интеграл, видим, что он равен

$$i \int_0^\infty \left(\frac{u}{u^2+s} \right)' K' du = \int_0^\infty \frac{iK' du}{u^2+s} - \int_0^\infty \frac{2iu^2 K' du}{(u^2+s)^2}.$$

Теперь объединим интегралы, содержащие K' . Поскольку

$$\frac{2u^2-s}{(u^2+s)^2} - \frac{2u^2}{(u^2+s)^2} + \frac{1}{u^2+s} = \frac{2u^2-s-2u^2+u^2+s}{(u^2+s)^2} = \frac{u^2}{(u^2+s)^2},$$

то

$$L(f) = \int_0^\infty \frac{s-2u^2}{(u^2+s)^{5/2}} K du + \int_0^\infty \frac{iu^2}{(u^2+s)^2} K' du.$$

Интегрируя второй интеграл по частям, заметим, что он равен первому с обратным знаком и $L(f) = 0$, $s > 0$. Гармоничность функции $f(s, y_3)$ доказана.

Теперь для разности $\Phi_\sigma(x, y) - F(r) = G_\sigma(s, y_3)$ имеем

$$G_\sigma(s, y_3) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{K_1(x_3)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K_1(w) - K_1(x_3)}{w - x_3} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2+s}}, \quad K_1(w) = e^{\sigma w^2}.$$

Промежуток интегрирования разбиваем на две части: $[0, \infty) = [0, 1] \cup [1, \infty)$. Из разложения (1.16) видим, что первый интеграл по переменному y является функцией класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ясно, что этому классу принадлежит и функция, определенная вторым интегралом. Теорема 1.1 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Функция $\Psi_\sigma(x, y)$, при $y \neq x$ определенная формулой

$$\Psi_\sigma(x, y) = \frac{d\Phi_\sigma(x, y)}{d\sigma},$$

гармонична по переменному y всюду в $\mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, включая точку $y = x$.

Действительно, из (1.1), (1.2) при $y \neq x$ дифференцируя (законность дифференцирования под знаком интеграла обеспечивается присутствием множителя $e^{-\sigma u^2}$) по параметру σ получаем

$$c_m \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma} = \int_0^\infty \operatorname{Im} K_1(w) \frac{\Psi(u) du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad c_2 = -2\pi, \quad c_3 = -2\pi^2,$$

$$K_1(w) = e^{\sigma(w^2-x_m^2)}(w+x_m), \quad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_m,$$

$$\operatorname{Im} K_1(w) = e^{\sigma y_m^2 - \alpha x_m^2 - \sigma \alpha^2 - \sigma u^2} (\sqrt{u^2+\alpha^2} \cos \tau \sqrt{u^2+\alpha^2} + (y_m+x_m) \sin \tau \sqrt{u^2+\alpha^2}).$$

Подынтегральная функция по переменным x, y бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^m$ при любом $\sigma > 0$. Теперь гармоничность $\Psi_\sigma(x, y)$ по переменному y в $\mathbb{R}^m$ следует из теоремы 1.1, где в качестве $K(w)$ берется $K_1(w)$.

2. Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть функция $U(y)$ класса $H(D) \cap C^1(\bar{D})$ на S удовлетворяет условиям

$$U(y) = f(y), \quad \frac{dU}{dn}(y) = g(y), \quad y \in S, \quad (2.1)$$

где $f(y), g(y)$ – заданные функции класса $C^1(S)$, $C(S)$ соответственно. Пусть на части T границы ∂D выполнено неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{d}{dy_m} U(y) \right| \leq M, \quad y \in T, \quad m = 2, 3, \quad (2.2)$$

где M – заданное положительное число.

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[g(y) \Phi_\sigma(x, y) - f(y) \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(x, y) \right] ds_y. \quad (2.3)$$

Тогда для любого $x \in D$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \Psi_m(\sigma) M e^{-\sigma x_m^2}, \quad m = 2, 3, \quad (2.4)$$

где

$$\Psi_2(\sigma) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} \right), \quad \Psi_3(\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2 + \pi}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Грина (1.8) для любого $x \in D$ получаем

$$U(x) - U_\sigma(x) = I_\sigma(x), \quad I_\sigma(x) = \int_T \left[\frac{dU(y)}{dn} \Phi_\sigma(x, y) - U(y) \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(x, y) \right] ds_y, \quad (2.6)$$

при этом из (2.2) следует

$$|I_\sigma(x)| \leq M T_\sigma(x), \quad T_\sigma(x) = \int_T \left[|\Phi_\sigma(x, y)| + \left| \frac{d\Phi_\sigma}{dn} \right| \right] ds_y. \quad (2.7)$$

Пусть $m = 2$. Утверждение теоремы следует из неравенства

$$|T_\sigma(x)| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 0. \quad (2.8)$$

Докажем неравенство (2.8). Из (1.3), полагая $y_2 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} |\Phi_\sigma(x, y)| dy_1 &= \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_0^\infty \frac{ue^{-\sigma u^2}}{u^2 + r^2} du \right] e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2} dy_1 \\ &\leq \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2 + y_1^2)}}{\sqrt{u^2 + r^2}} du dy_1, \quad r^2 = y_1^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Введем полярные координаты; тогда кратный интеграл будет равен интегралу

$$2\pi \int_0^\infty \frac{te^{-\sigma t^2}}{\sqrt{t^2 + x_2^2}} \leq 2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} = \pi \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} \quad \text{и} \quad \int_{a_1}^{b_1} |\Phi_\sigma(x, y)| dy_1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} e^{-\sigma x_2^2}.$$

Далее из (1.11), (1.12) и (1.15) имеем

$$\begin{aligned} -2\pi e^{-\sigma x_2^2} \frac{d\Phi_\sigma}{dy_2} &= \operatorname{Im} \left[\frac{df}{dy_2} \right] = \operatorname{Im}(iK(w_0)) = \operatorname{Re} K(w_0), \\ \operatorname{Re} K(w_0) &= e^{-\sigma|y_1-x|^2 + \sigma y_2^2} \frac{(y_2 - x_2) \cos \tau (y_1 - x_1) + |y_1 - x_1| \sin \tau |y_1 - x_1|}{r^2}, \\ w_0 &= i|x_1 - y_1| + y_2, \quad \tau = 2\sigma y_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда, полагая $y_2 = 0$, будем иметь

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{d\Phi_\sigma}{dy_2} \right| dy_1 = \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_2 e^{-\sigma|y_1-x_1|^2} dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} \leq \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{x_2 dy_1}{y_1^2 + x_2^2} = \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{2}.$$

Неравенство (2.4) доказано при $m = 2$.

Пусть $m = 3$. Вычислим $\Phi_\sigma(x, y)$, $d\Phi_\sigma(x, y)/dy_3$ по формуле (1.15) и положим $y_3 = 0$. Тогда для $T_\sigma(x)$, определенного равенством (2.7), получаем

$$\begin{aligned} T_\sigma(x) &= \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2} \left[\int_T \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} du}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} \right) e^{-\sigma x^2} dy_1 dy_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_T \left(\int_0^\infty \left(\frac{2\sigma x_3}{u^2 + x^2 + x_3^2} + \frac{x_3}{(u^2 + x^2 + x_3^2)^2} \right) e^{-\sigma u^2} du \right) e^{-\sigma x^2} dy_1 dy_2 \right]. \end{aligned}$$

Область T заменим в интеграле пространством $\mathbb{R}^2$ и полученные повторные интегралы преобразуем в трехкратный по всему $\mathbb{R}^3$ и затем интегралы преобразуем, введя сферические координаты; тогда будем иметь

$$\begin{aligned} T_\sigma(x) &\leq \frac{e^{-\sigma x_2^2}}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{t^2 e^{-\sigma x^2}}{t^2 + x_3^2} + \int_0^\infty \left(\frac{2\sigma x_3}{t^2 + x_3^2} + \frac{x_3}{(t^2 + x_3^2)^2} \right) t^2 e^{-\sigma t^2} dt \right] \\ &\leq \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{\pi} \left[\int_0^\infty e^{-\sigma x^2} dt + \int_0^\infty \sigma t e^{-\sigma x^2} dt + \int_0^\infty \frac{x_3 t^2}{(t^2 + x_3^2)^2} dt \right] \\ &\leq \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{2 + \pi}{2} \right), \quad \frac{2x_3 t}{t^2 + x_3^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для любого $x \in D$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad (2.10)$$

причем предел достигается равномерно на компактах из D .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть функция $U(y)$ класса $H(D) \cap C^1(\overline{D})$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы их приближения $f_\sigma(y)$, $g_\sigma(y)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $\delta > 0$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| < \delta, \quad \max_S |g(y) - g_\delta(y)| < \delta. \quad (2.11)$$

Предположим, что поверхность S (или кривая при $m = 2$) задана уравнением $y_3 = h(y_1, y_2)$, $(y_1, y_2) \in T$, при $m = 2$ $y_2 = h(y_1)$, $y_1 \in [a_1, b_1]$, где h однозначная функция, удовлетворяющая условиям Ляпунова, при этом

$$\max_T h = a, \quad b = \max \left[1 + \left(\frac{dh}{dy_1} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dy_2} \right)^2 \right]^{1/2};$$

если $m = 2$, то $b = \sqrt{1 + c^2}$, $\max |h'(y_1)| = c$.

Обозначим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_T \left[g_\sigma(y) \Phi_\sigma(x, y) - f_\delta(y) \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(x, y) \right] ds_y. \quad (2.12)$$

Тогда для любого $x \in D$ справедливо неравенство

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq 2\Psi^m(\sigma) M^{1-x_m^2/a^2} \delta^{x_m^2/a^2}, \quad m = 2, 3, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{a^2} \ln \frac{M}{\delta}, \quad \delta < M, \\ \Psi^2(\sigma) &= k + 3b \left[\frac{c}{2\pi} (2 - e^{-\sigma(x_1 - a_1)^2} - e^{-\sigma(b_1 - x_1)^2}) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\sigma(x_1 - a_1)^2}) \ln(1 + 2a\sigma(x_1 - a_1)) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\sigma(b_1 - x_1)^2}) \ln(1 + 2a\sigma(b_1 - x_1)) + \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}} \right], \\ \Psi^3(\sigma) &= \frac{1}{\pi} \left[k\pi + 2(1 + b) + a(3 + 5b)\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma} + \frac{\sqrt{\pi}b}{\sqrt{\sigma}} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для любого $x \in D$ справедливо равенство

$$U(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} U_{\sigma\delta}(x),$$

и предельное равенство имеет место равномерно на компактах из D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Грина для любого $x \in D$ получаем

$$U(x) - U_{\sigma\delta}(x) = I_\sigma(x) + \int_{-S} \left[(g_\sigma(y) - g_\sigma(y)) \frac{\Phi_\sigma}{dn}(x, y) - (f(y) - f_\delta(y)) \frac{\Phi_\sigma}{dn}(x, y) \right] ds_y,$$

где $I_\sigma(x)$ определяется формулой (2.6). Из (1.11), (2.8) и (2.7) выводим неравенство

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq M\Psi_m(\sigma) e^{-\sigma x_m^2} + \delta \int_{-S} \left(|\Phi_\sigma| + \left| \frac{d\Phi_\sigma}{dn} \right| \right) ds_y, \quad (2.15)$$

где $\Psi_m(\sigma)$ определяется из (2.5).

Утверждение теоремы следует из неравенства

$$\int_{-S} \left(|\Phi_\sigma| + \left| \frac{d\Phi_\sigma}{dn} \right| \right) ds \leq \Psi^m(\sigma) e^{\sigma a^2 - \sigma x_m^2}, \quad \sigma > 0, \quad x_m \geq 0, \quad m = 2, 3, \quad (2.16)$$

где $\Psi^m(\sigma)$ определяется из (2.14). Действительно, из (2.16), (2.15) получаем

$$\begin{aligned} |U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| &\leq M\Psi_m(\sigma)e^{-\sigma x_m^2} + \Psi^m(\sigma)\delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} \\ &= (M + \delta e^{\sigma a^2})\Psi^m(\delta)e^{-\sigma x_m^2}, \quad m = 2, 3, \end{aligned}$$

где $\Psi^m(\sigma) \geq \Psi_m(\sigma)$. Выберем σ из условия $M = \delta e^{\sigma a^2}$; тогда получим неравенство (2.13). Докажем неравенство (2.16). Пусть $m = 2$. Из формулы (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \int_S |\Phi_\sigma| dS_y &\leq \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_0^\infty \left(1 + |y_2 - x_2| \frac{|\sin \tau| |y_1 - x_1|}{\sqrt{u^2 + |y_1 - x_1|^2}} \frac{ue^{-\sigma u^2} du}{u^2 + r^2} \right) \right] \\ &\quad \times e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2} dy_1 \\ &\leq \frac{3be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_0^\infty \frac{3e^{-\sigma u^2} du}{2\sqrt{u^2 + (y_1 - x)^2}} \right) e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2} dy_1 \\ &\leq \frac{3be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{8\pi} \iint_{R^2} \frac{e^{-\sigma(u^2 + y_1^2)}}{\sqrt{u^2 + y_1^2}} du dy_1, \\ \frac{|y_2 - x_2|u}{u^2 + r^2} &\leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{u^2 + r^2} \leq \frac{1}{u^2 + (y_1 - x_1)^2}. \end{aligned}$$

Вычислим двойной интеграл. Тогда получим

$$\int_{-S} |\Phi_\sigma| ds_y \leq \frac{3b\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma}} e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}. \quad (2.17)$$

Вычислим нормальную производную $d\Phi_\sigma/dn$. Из формул (1.14), (1.12), (1.11), где $df/dy_1 = (df/ds)(ds/dy_1) = 2(y_1 - x_1)df/ds = (y_1 - x_1)K(w_0)/\sqrt{s}$, отделяя мнимую часть будем иметь

$$\frac{d\Phi_\sigma}{dy_1} = -\frac{e^{\sigma y_2^2 - \sigma x_2^2 - \sigma(y_1 - x_1)^2}}{2\pi} \frac{(y_1 - x_1) \cos \tau(y_1 - x_1) - (y_2 - x_2) \sin \tau(y_1 - x_1)}{r^2}. \quad (2.18)$$

Пусть $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$ координаты единичной внешней нормали n в точке S , $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$. Из (2.18) и (2.19) выводим формулу

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_\sigma}{dy_1} &= \frac{e^{\sigma y_2^2 - \sigma x_2^2 - \sigma(y_1 - x_1)^2}}{2\pi} \\ &\quad \times \left[\frac{\cos \theta}{r} \cos \tau(y_1 - x_1) \frac{(y_2 - x_2) \cos \alpha_1 (y_1 - x_1) \cos \alpha_2}{r^2} \sin \tau(y_1 - x_1) \right], \\ \cos \theta &= \frac{y_1 - x_1}{r} \cos \alpha_1 + \frac{y_2 - x_2}{r} \cos \alpha_2 = \frac{dr}{dn}, \end{aligned}$$

при этом

$$\left| \frac{d\Phi_\sigma}{dn} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{|\cos \theta|}{r} + \frac{3}{2} \left| \frac{\sin \tau(y_1 - x_1)}{y_1 - x_1} \right| \right) e^{\sigma y_2^2 - \sigma x_2^2 - \sigma(y_1 - x_1)^2},$$

так как $|\sin x| \leq 2x/(1+x)$, $x \geq 0$, и $\int_S |\cos \theta| r ds_y \leq 2\pi k$, отсюда выводим неравенство

$$\int_S \left| \frac{d\Phi_\sigma}{dn} \right| ds_y \leq \frac{1}{2\pi} (2\pi k + 3bI_\sigma) e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2},$$

где

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{2\sigma h(y_1)e^{-\sigma(y_1-x_1)^2}}{1+2\sigma h(y_1)|y_1-x_1|} dy_1 \\ &= \int_0^{x_1-a_1} \frac{2\sigma h(x_1-t)e^{-\sigma t^2}}{1+2\sigma th(x_1-t)} dt + \int_0^{b_1-x_1} \frac{2\sigma h(t-x_1)e^{-\sigma t^2}}{1+2\sigma th(t+x_1)} dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь первый интеграл справа равен

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_1-a_1} e^{-\sigma t^2} d\ln[1+2\sigma th(x_1-t)] + \int_0^{x_1-a_1} \frac{2\sigma th'(x_1-t)e^{-\sigma t^2}}{1+2\sigma th(x_1-t)} dt \\ &= \int_0^{x_1-a_1} 2\sigma te^{-\sigma t^2} \ln[1+2\sigma th(x_1-t)] dt + \int_0^{x_1-a_1} \frac{2\sigma th'(x_1-t)e^{-\sigma t^2}}{1+2\sigma th(x_1-t)} dt \\ &\leq (1-e^{-\sigma(x_1-a_1)^2}) \ln(1+2a\sigma(x_1-a_1)) + c(1-e^{-\sigma(x_1-a_1)^2}), \quad h(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично второй интеграл не превосходит величину

$$(1-e^{-\sigma(b_1-x_1)^2}) \ln(1+2a\sigma(b_1-x_1)) + c(1-e^{-\sigma(b_1-x_1)^2}), \quad h(b_1) = 0.$$

Теперь неравенство (2.16) следует из (2.19) и (2.17).

Пусть теперь $m = 3$. Докажем неравенства

$$\begin{aligned} \int_S |\Phi_\sigma| ds_y &\leq \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_3^2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}}, \\ \int_S \left| \frac{\Phi_\sigma}{dn} \right| ds_y &\leq \frac{e^{\sigma a^2 - \sigma x_3^2}}{\pi} [k\pi + 2(1+b) + \sqrt{\pi}a(3+5b)\sqrt{\sigma}], \quad \sigma > 0, \quad x_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

из которых следует (2.16).

Поверхностный интеграл преобразуем в двумерный по области T , где $ds \leq b dy_1 dy_2$, и при оценке полученных повторных интегралов повторяем рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.1. Тогда из (1.5) и (1.6) получаем

$$\begin{aligned} \int_S |\Phi_\sigma| ds_y &\leq \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_3^2}}{2\pi^2} \int_T \left[\int_0^\infty \left(1 + |y_3 - x_3| \frac{|\sin \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}|}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) \frac{e^{-\sigma u^2}}{u^2 + r^2} du \right] dy_1 dy_2 \\ &\leq \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_3^2}}{2\pi^2} \int_{R^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 = \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_3^2}}{2\pi^2} \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}. \end{aligned}$$

Первое неравенство из (2.20) доказано. Для нормальной производной из (1.5) выведем формулу

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2} \frac{d\Phi_\sigma}{dn} = T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1(x, y, \sigma) = 2\sigma e^{\sigma y_3^2 - \sigma a^2} \left(y_3 \frac{dy_3}{dn} - \alpha \frac{d\alpha}{dn} \right) \int_0^\infty \varphi_\sigma \frac{e^{-\sigma u^2}}{u^2 + r^2} du, \\ T_2 &= T_2(x, y, \sigma) = e^{\sigma y_3^2 - \sigma a^2} \int_0^\infty \frac{d\varphi_\sigma}{dn} \frac{e^{-\sigma u^2}}{u^2 + r^2} du, \\ T_3 &= T_3(x, y, \sigma) = -e^{\sigma y_3^2 - \sigma a^2} 2r \cos \theta \int_0^\infty \varphi_\sigma \frac{e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + r^2)^2} du, \end{aligned}$$

$\varphi_\sigma = \varphi_\sigma(x, y, \sigma)$ определяется формулой (1.6) и $dr/dn = \cos \theta$, θ – угол между радиус-вектором $\bar{r}$ и нормалью в точке $y \in S$, $x \in D$, при этом $\int_S |\cos \theta|/(r^2) ds_y \leq 4\pi k$. Теперь получаем неравенство

$$\int_S \left| \frac{\Phi_\sigma}{dn} \right| ds_y \leq \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2} (I_1 + I_2 + I_3);$$

здесь

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1(x, y, \sigma) = \int_S |T_1| ds_y, & I_2 &= I_2(x, y, \sigma) = \int_S |T_2| ds_y, \\ I_3 &= I_3(x, y, \sigma) = \int_S |T_3| ds_y. \end{aligned}$$

Второе неравенство из (2.20) следует из оценок

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq 4\pi(b + \sqrt{\pi}a\sqrt{\sigma})e^{\sigma a^2}, & I_2 &\leq 2\pi[2 + \sqrt{\pi}a\sqrt{\sigma}(1 + 3b)]e^{\sigma a^2}, \\ |I_3| &\leq (2\pi^2 k + 4\pi\sqrt{\pi}ab\sqrt{\sigma})e^{\sigma a^2}, & \sigma &> 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Докажем неравенства (2.21). Для I_1 имеем

$$|I_1| \leq 2\sigma e^{\sigma a^2} \left[a \int_{R^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 + b \int_{R^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 \right].$$

Вычислим интегралы; тогда получим первое неравенство из (2.21). Далее, по формуле (1.6) вычислим нормальную производную

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_\sigma}{dn} &= -\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} \left(2\sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} \frac{dy_3}{dn} + \frac{2\sigma y_3 \alpha}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \frac{d\alpha}{dn} \right) - \frac{dy_3}{dn} \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \\ &\quad - (y_3 - x_3) \left[-\frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} \cdot 2\alpha}{2\sqrt{u^2 + \alpha^2}(u^2 + \alpha^2)} \frac{d\alpha}{dn} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \left(2\sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} \frac{dy_3}{dn} + \frac{2\sigma y_3 \alpha}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \frac{d\alpha}{dn} \right) \right], \quad \tau = 2\sigma y_3. \end{aligned}$$

Собираем члены, содержащие dy_3/dn , а затем, учитывая $|\sin x| < |x|$, оценим правую часть; тогда получим

$$\left| \frac{d\varphi_\sigma}{dn} \right| \leq 2\sigma \left[(y_3 + \sqrt{u^2 + \alpha^2} + (y_3 - x_3)) \left| \frac{dy_3}{dn} \right| + \left(1 + \frac{2|y_3 - x_3|}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) y_3 \right].$$

Теперь для I_2 выводим неравенство

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sigma e^{\sigma a^2} \left[\int_{R^3} \left(\frac{a}{u^2 + \alpha^2} + \frac{2}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)} dy_1 dy_2 du \right. \\ &\quad \left. + 3ab \int_{R^3} \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{u^2 + \alpha^2} du dy_1 dy_2 \right] \\ &= 4\pi \sigma e^{\sigma a^2} \left[\int_0^\infty \left(\frac{a}{t^2} + \frac{2}{t} \right) t^2 e^{-\sigma t^2} dt + 3ab \int_0^\infty e^{-\sigma t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы; тогда получим второе неравенство из (2.20). Наконец, для I_3 из (1.6) получаем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq e^{\sigma a^2} \int_S e^{-\sigma \alpha^2} 2r |\cos \theta| \left[\int_0^\infty \left(1 + |y_3 - x_3| \frac{|\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}|}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) \frac{e^{-\sigma u^2}}{(u^2 + r^2)^2} du \right] ds_y \\ &\leq e^{\sigma a^2} \left[\int_S 2r |\cos \theta| \left(\int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + r^2)^2} \right) ds_y \right. \\ &\quad \left. + \int_S 2r e^{-\sigma a^2} \left(\int_0^\infty \frac{2\sigma y_3 r}{(u^2 + r^2)^2} e^{-\sigma u^2} du \right) ds_y \right] \\ &= e^{\sigma a^2} \left[\frac{\pi}{2} \int_S \frac{|\cos \theta|}{r^2} ds_y + 4ab\sigma \cdot 2\pi \int_0^\infty e^{-\sigma t^2} dt \right] = [2\pi^2 k + 4\sqrt{\pi} ab \sqrt{\sigma}] e^{\sigma a^2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство из (2.21) и вместе с ним теорема 2.2 полностью доказаны.

Построенный функционал $U_{\sigma\delta}(x) = U_{\sigma\delta}(x, f_\delta, g_\delta)$, определенный на множестве пар (f_δ, g_δ) , где $f_\delta(x), g_\delta(x) \in C(S)$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$, называется *регуляризацией по Лаврентьеву* решения задачи Коши.

3. Критерий разрешимости задачи. Формула (2.10) позволяет сформулировать удобный и простой критерий разрешимости задачи Коши. С этой целью в (1.1), (1.2) функцию $e^{\sigma w^2}$, $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m$, заменим функцией

$$e^{\sigma w_1^2}, \quad \text{где } w_1 = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m - x_m + a, \quad a = \max_D y_m,$$

при этом

$$w_1^2 = -u^2 - \alpha^2 + 2i(y_m - x_m + a)\sqrt{u^2 + \alpha^2} + (y_m - x_m + a)^2, \quad m = 2, 3.$$

Вновь определенную функцию $\Phi_\sigma(x, y)$, которая теперь зависит от разности $y - x$, обозначим через $\Phi_\sigma(y - x)$. Из теоремы 1.1 заключаем, что функция $\Phi_\sigma(y - x)$ является гармонической функцией для всех x, y , $y \neq x$, и для нее справедливо представление (1.7), в котором $G_\sigma(x, y) = G_\sigma(y - x)$. Формулы (1.3), (1.4) для $\Phi_\sigma(y - x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} c_m \Phi_\sigma(y - x) &= e^{-\sigma a^2 - \sigma \alpha^2 + \sigma(y_m - x_m + a)^2} \int_0^\infty \varphi_\sigma(x, y, u) \frac{\Psi(u) du}{u^2 + r^2}, \\ c_2 &= 2\pi, \quad c_3 = 2\pi^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_\sigma(y - x, u) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_m - x_m) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma(y_m - x_m + a).$$

Ясно, что $\Phi_\sigma(y - x)$ является фундаментальным решением и для функции $U(y)$ класса $H(D) \cap C^1(\bar{D})$ справедлива формула Грина (1.8), где в качестве $\Phi_\sigma(x, y)$ присутствует функция $\Phi_\sigma(y - x)$, определенная формулой (3.1).

Пусть $|y - x| = r \geq \delta_0 > 0$, где

$$0 \leq y_m \leq a \quad \text{и} \quad 0 < x_m < 2a. \quad (3.2)$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ выводим очевидное неравенство

$$|\Phi_\sigma(x-y)| + |\text{grad } \Phi_\sigma(x-y)| = C_{\delta_0} \sigma e^{\sigma(y_m - x_m + a)^2 - \sigma a^2 - \sigma \alpha^2}, \quad (3.3)$$

где постоянная C_{δ_0} не зависит от σ, x, y . Теперь из (3.3) и равенства

$$(y_m - x_m + a)^2 - a^2 = (y_m - x_m)(y_m - x_m + 2a) \quad (3.4)$$

закключаем, что $\Phi_\sigma(x-y)$ и ее градиент стремятся к нулю для всех $x \in \mathbb{R}^m$ с условием (3.2), когда $y_m = 0$ и $\sigma \rightarrow \infty$, т.е. $\Phi_\sigma(x-y)$ является функцией Карлемана, когда полюс лежит в слое (полосе при $m = 2$) (3.2).

Пусть $U(y) \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$ и $U(y) = f(y)$, $dU(y)/dn = g(y)$, где $f(y)$, $g(y)$ – заданные функции класса $C^1(S)$, $C(S)$ соответственно. Определим функцию $U_\sigma(x)$ равенством

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[\Phi_\sigma(x-y)g(y) - f(y) \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(x-y) \right] dS_y. \quad (3.5)$$

Из формулы Грина (1.8), где Φ_σ определяется из (3.1), заключаем, что для любого $x \in D$ справедливо предельное равенство

$$U(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x), \quad (3.6)$$

которое согласно формуле Ньютона–Лейбница можно написать в эквивалентном виде

$$U(x) = \int_t^\infty \frac{dU_\sigma}{d\sigma}(x) d\sigma + U_t(x), \quad (3.7)$$

$$U_1(x) = \int_S \left[\Phi_1(x-y)g(y) - f(y) \frac{d\Phi_1}{dn}(x-y) \right] dS_y, \quad \Phi_1 = \Phi_\sigma|_{\sigma=1}. \quad (3.8)$$

Обозначим

$$I(\sigma, x) \equiv \frac{dU_\sigma}{d\sigma}(x) = \int_S \left[\Psi_\sigma(x-y)g(y) - f(y) \frac{d\Psi_\sigma}{dn}(x-y) \right] dS_y, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_\sigma(x-y) &\equiv \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x) = -\frac{1}{c_m} \int_0^\infty \text{Im}[e^{\sigma w_1^2 - \sigma a^2}(w_1 + a)] \frac{\Psi(u) du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \sigma > 0, \\ w_1 &= i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m - x_m + a, \quad (u) = u, \quad m = 2; \quad (u) = 1, \quad m = 3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Функция $\Phi_\sigma(x-y)$ гармонична при $x, y \in \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, включая точку $x = y$ (следствие 1.1), поэтому функция $I(\sigma, x)$ также гармонична в $\mathbb{R}^m$ при $\sigma > 0$. В этих обозначениях формула (3.7) для $x \in D$ принимает вид

$$U(x) = \int_t^\infty I(\sigma, x) d\sigma + U_1(x), \quad (3.11)$$

которую, используя представление (1.7), где $\Phi_\sigma(x, y) = \Phi_\sigma(x-y) = F(r) + G_\sigma(x-y)$, $x \in D$, $\sigma = 1$, можно переписать в виде

$$U(x) = \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma + E(x) + \int_S \left[F(r)g(y) - f(y) \frac{dF}{dn}(r) \right] dS_y, \quad (3.12)$$

где гармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция $E(x)$ определяется формулой

$$E(x) = \int_S \left[G_1(x-y)g(y) - f(y) \frac{dG_1(x-y)}{dn} \right] dS_y.$$

Из (3.12) видим, что решение задачи Коши представляется в виде суммы гармонической функции и разности потенциалов простого и двойного слоев.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $S \subset C^2$, $f(y) \in C^1(S_0) \cap L(S)$, $g(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, где S_0 – внутренние точки S (S – без края). Тогда для существования функции $U(y) \in H(D) \cap C^1(D \cup S_0)$ такой, что

$$U(y) = f(y), \quad \frac{dU}{dn}(y) = g(y), \quad y \in S_0, \quad (3.13)$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ с условием $0 < x_m < 2a$, сходилась (равномерно при $\delta < x_m \leq 2a - \delta$, $0 < \delta < a$) несобственный интеграл

$$\left| \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma \right| < \infty, \quad (3.14)$$

где $I(\sigma, x)$ определяется формулой (3.9).

Если условие (3.14) выполнено, то гармоническое продолжение осуществляется эквивалентными формулами (3.12) и (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $U(y) \in H(D) \cap C^1(D \cup S_0)$ удовлетворяет на S_0 условиям (3.13), где $f(y), g(y) \in L(S)$ и пусть ε произвольное: $0 < \varepsilon < a$. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y : y_m = \varepsilon\} \cap D, \quad S_\varepsilon^+ = S \cap \{y : y_m \geq \varepsilon\}, \quad m = 2, 3.$$

Так как функция $\Psi_\sigma(x-y)$, определенная формулой (3.10), гармонична в $\mathbb{R}^m$, то согласно формуле Грина, применяемой в области с границей $S_\varepsilon \cup S_\varepsilon^+$, получаем

$$\int_{S_\varepsilon^+} \left[g(y)\Psi_\sigma(x-y) - f(y) \frac{d\Psi_\sigma(x-y)}{dn} \right] dS_y = \int_{S_\varepsilon} \left[g(y)\Psi_\sigma(x-y) - f(y) \frac{d\Psi_\sigma(x-y)}{dn} \right] dS_y,$$

где направление нормалей к S_ε и S_ε^+ согласованы. Используя это равенство для $I(\sigma, x)$, имеем

$$\begin{aligned} I(\sigma, x) &= \int_{S \setminus S_\varepsilon^+} \left[g(y)\Psi_\sigma(x-y) - f(y) \frac{d\Psi_\sigma(x-y)}{dn} \right] dS_y \\ &\quad + \int_{S_\varepsilon} \left[g(y)\Psi_\sigma(x-y) - f(y) \frac{d\Psi_\sigma(x-y)}{dn} \right] dS_y. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Оценим интегралы. Элементарный расчет показывает, что для $x \in \mathbb{R}^m$ с условием (3.2) ($0 \leq y_m \leq a$) при $\sigma \geq 1$ справедливо неравенство

$$|\Psi_\sigma(x-y)| + |\text{grad } \Psi_\sigma(x-y)| \leq \text{const} \cdot \sigma^{m-2} e^{\sigma(y_m - x_m + a)^2 - \sigma a^2 - \sigma \alpha^2}, \quad (3.16)$$

где постоянная не зависит от σ, x, y . Так как $y_m \leq \varepsilon$ при $y \in S \setminus S_\varepsilon^+$, $y_m = \varepsilon$, когда $y \in S_\varepsilon$ и $f(y), g(y) \in L(S)$, то из (3.15), (3.4) выводим неравенство

$$|I(\sigma, x)| \leq C_\varepsilon \sigma^{m-2} e^{(\varepsilon - \delta)\delta\sigma}, \quad \sigma \geq 1, \quad \delta \leq x_m \leq 2a - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{a}{2}.$$

Поскольку ε произвольно, выбирая $\delta > \varepsilon$, доказываем (3.14).

Достаточность. По заданным $f(y), g(y)$ определим функцию $U(x)$ формулой (3.12) для всех $x \in \mathbb{R}^m$ с условием (3.2). Из (3.14) заключаем, что первые два слагаемых в сумме представляют функцию, гармоническую для всех $x \in \mathbb{R}^m$ с условием (3.2). Третье слагаемое, как разность потенциалов простого и двойного слоев, определяет одну гармоническую функцию в D и другую в

$$D_1 = \{\mathbb{R}^m \setminus \overline{D}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^m : 0 < x_m < 2a\}.$$

Поэтому правая часть (3.12) определяет две различные гармонические функции $U^+(x)$ и $U^-(x)$ в D и D_1 соответственно. Если x_1 и x_2 две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно x , то

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} [U^+(x_1) - U^-(x_2)] = f(x), \quad \lim_{x_1 \rightarrow x} \left[\frac{dU^+}{dn}(x_1) - \frac{dU^-}{dn}(x_2) \right] = g(x),$$

притом предельные соотношения выполняются равномерно относительно x из каждой компактной части S_0 . Пусть $a < x_m < 2a$ ($y_m \leq a$); тогда учитывая (3.10), (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma &= \int_1^\infty \left[\int_S \left(g(y) \Psi_\sigma(x-y) - f(y) \frac{d\Psi_\sigma(x-y)}{dn} \right) dS_y \right] d\sigma \\ &= \int_S \left[\int_1^\infty \left(\frac{d\Phi_\sigma(x-y)}{d\sigma} g(y) - \frac{d}{d\sigma} \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(x-y) f(y) \right) d\sigma \right] dS_y \\ &= - \int_S \left[\Phi_1(x-y) g(y) - \frac{d\Phi_1}{dn}(x-y) f(y) \right] dS_y = -U_1(\sigma), \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Phi_\sigma(x-y) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(x-y) = 0,$$

$U_1(x)$ определяется формулой (3.8) (законность перестановочности интегралов следует из оценки (3.3) и равенства (3.4)). Теперь из (3.11) видим, что $U^-(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$ с условием $a < x_m < 2a$; согласно теореме единственности $U^-(x) \equiv 0$ для всех $x \in D_1$. Ясно, что $U^-(x)$ непрерывно дифференцируемо продолжается на $D_1 \cup S_0$. Поэтому $U^+(x)$ также гладко продолжается на $D \cup S_0$ (см. [2]). Следовательно,

$$U^+(x) = f(x), \quad \frac{dU^+(x)}{dn} = g(x), \quad x \in S_0.$$

Положим $U(x) = U^+(x)$, $x \in D \cup S_0$. Теорема доказана.

Плоскую задачу Коши для уравнения Лапласа для области специального вида впервые исследовал Карлеман в 1926 г. [3]. Когда число переменных два и три и данные Коши заданы приближенно, то регуляризация для решения впервые была построена Лаврентьевым в 1956 г. [4].

Функция Карлемана для более общей области в многомерном пространстве в явном виде построена в [5]. В этой статье приведена также обширная библиография.

Построенное фундаментальное решение нашло применение в теории обратных задач [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
- [2] А. А. Шляпунов, “О задаче Коши для уравнения Лапласа”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 205–215.
- [3] Т. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [4] М. М. Лаврентьев, “О задаче Коши для уравнения Лапласа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **20**:6 (1956), 819–842.
- [5] Ш. Ярмухамедов, “Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:3 (2004), 702–719.
- [6] М. Ikehata, “Inverse conductivity problem in the infinite slab”, *Inverse Problems*, **17**:3 (2001), 437–454.

Ш. Ярмухамедов

Самаркандский государственный университет

E-mail: yarmuxamedov@mail.ru

Поступило

08.08.2005