Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 667–682

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:40:09

О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее

А. А. Злотник

Установлена параболичность по Петровскому квазигидродинамической системы уравнений движения совершенного политропного газа. Исследована задача устойчивости малых возмущений по постоянному фону, и для задачи Коши и начально-краевой задачи для соответствующей линеаризованной системы получены равномерные на бесконечном интервале времени оценки относительных возмущений. Соответствующие результаты выведены также в баротропном случае при общем уравнении состояния.

Библиография: 10 названий.

Квазигидродинамическая (КГДД) система уравнений и связанные с ней разностные методы применяются в расчетах различных сложных задач газо- и гидродинамики [1]–[3]. Ряд важных свойств КГДД системы также представлен в [1]–[3]. Однако математическая теория КГДД системы, являющейся достаточно сложной системой квазилинейных уравнений с частными производными 2-го порядка, пока не разработана.

В данной работе устанавливается параболичность по Петровскому КГДД системы с любым числом пространственных переменных для совершенного политропного газа. Точнее говоря, доказывается ее неравномерная параболичность и выводится необходимое и достаточное условие равномерной параболичности в произвольной области значений искомых функций (плотности, скорости и удельной внутренней энергии). В качестве следствия последнего приводится локальная по времени теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для КГДД системы.

Изучается также задача устойчивости малых возмущений по постоянному фону для КГДД системы. Рассматривается задача Коши во всем пространстве и начально-краевая задача в произвольной ограниченной области для линеаризованной КГДД системы. Главным результатом являются равномерные на бесконечном интервале времени оценки норм относительных возмущений искомых функций через нормы их начальных значений.

Соответствующие результаты выводятся и для баротропного варианта КГДД системы при общем уравнении состояния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-00187 и 07-01-00416).

Отметим, что для родственной квазигазодинамической системы (см. [2], [3] и [1]) исследования подобного плана были недавно выполнены в [4]–[6]. Здесь используются и совершенствуются элементы техники этих работ.

1. Параболичность квазигидродинамической системы уравнений. КГДД систему уравнений, включающую уравнение баланса массы, уравнения импульса и полной энергии, в декартовой системе координат можно записать в следующем дивергентном виде:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho u_i) = \partial_i(\rho w_i), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u_k) + \partial_i(\rho u_i u_k) + \partial_k p = \partial_i[\mu(\partial_i u_k + \partial_k u_i)] - \partial_k \left(\frac{2\mu}{3} \partial_i u_i \right) \\ + \partial_i(\rho w_k u_i + \rho w_i u_k) + \rho F_k, \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon \right) \right] + \partial_i \left\{ \left[\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon \right) + p \right] u_i \right\} \\ = \partial_i(\kappa \partial_i \theta) + \partial_i \left[\mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i) u_j - \frac{2\mu}{3} (\partial_j u_j) u_i \right] \\ + \partial_i \left\{ \left[\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon \right) + p \right] w_i + \rho w_j u_i u_j \right\} + \rho F_i(u_i - w_i) \end{aligned} \quad (3)$$

со вспомогательными функциями

$$w_i := \tau \left(u_j \partial_j u_i + \frac{1}{\rho} \partial_i p - F_i \right). \quad (4)$$

Здесь и ниже ∂_t и $\partial_i = \partial_{x_i}$ – частные производные по аргументам t и x_i , причем по повторяющимся индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n ; при этом $n \geq 1$. Искомые функции $\rho > 0$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\varepsilon > 0$ – плотность, скорость, удельная внутренняя энергия газа; кроме того, p и θ – давление и абсолютная температура. Используются уравнения состояния совершенного политропного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad \varepsilon = c_V \theta, \quad (5)$$

а также следующие равенства, связывающие параметр τ с коэффициентами динамической вязкости $\mu = \mu(\rho, \varepsilon) > 0$ и теплопроводности κ :

$$\tau = \frac{\mu}{\alpha_S p}, \quad \kappa = c_V \gamma \alpha_P \tau p. \quad (6)$$

Здесь $\gamma > 1$, $c_V > 0$, $\alpha_S > 0$, $\alpha_P > 0$ – физические постоянные (показатель адиабаты, коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, число Шмидта, отношение числа Шмидта к числу Прандтля соответственно). Наконец, $F = (F_1, \dots, F_n)$ – заданная массовая сила.

Будем рассматривать классические решения этой системы, определенные для аргументов $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ из некоторой области в $\mathbb{R}^{n+1}$, со значениями в какой-либо области $D \subset \mathbb{R}^{n+2} := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Предполагается, что $\mu \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$.

Сначала уравнение импульса (2) преобразуем с помощью уравнения баланса массы (1) к виду

$$\begin{aligned} \rho \partial_t u_k + \rho u_i \partial_i u_k + \partial_k p = \partial_i [\mu (\partial_i u_k + \partial_k u_i)] - \partial_k \left(\frac{2\mu}{3} \partial_i u_i \right) \\ + \partial_i (\rho w_k u_i) + \rho w_i \partial_i u_k + \rho F_k, \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (7)$$

а уравнение полной энергии (3) – с помощью равенства

$$\partial_t \left[\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon \right) \right] = \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon \right) \partial_t \rho + \rho u_j \partial_t u_j + \rho \partial_t \varepsilon$$

и уравнений (1) и (7) к виду

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \varepsilon + \rho u_i \partial_i \varepsilon + p \partial_i u_i = \partial_i (\kappa \partial_i \theta) + \partial_i (p w_i) + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \partial_i u_j - \frac{2\mu}{3} (\partial_j u_j) \partial_i u_i \\ + \left[\partial_i \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon \right) \right] \rho w_i + \rho (w_j u_i - w_i u_j) \partial_i u_j - \rho F_i w_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее уравнение баланса массы (1) и поделенные на ρ уравнения (7) и (8) перепишем с учетом (4) в недивергентном виде

$$\partial_t \rho = \tau (\rho u_j \partial_i \partial_j u_i + \partial_i \partial_i p) + b_0, \quad (9)$$

$$\partial_t u_k = \frac{\mu}{\rho} \left(\partial_i \partial_i u_k + \frac{1}{3} \partial_i \partial_k u_i \right) + \tau \left(u_i u_j \partial_i \partial_j u_k + \frac{u_i}{\rho} \partial_i \partial_k p \right) + b_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (10)$$

$$\partial_t \varepsilon = \frac{\kappa}{\rho} \partial_i \partial_i \theta + \tau \left(\frac{p u_j}{\rho} \partial_i \partial_j u_i + \frac{p}{\rho^2} \partial_i \partial_i p \right) + b_{n+1}. \quad (11)$$

Здесь и ниже величины $b_0, \dots, b_{n+1}$ (возможно, с дополнительными индексами) зависят от $\rho, \mathbf{u}, \varepsilon$ и $\nabla \rho, \nabla \mathbf{u}, \nabla \varepsilon$, где $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, и являются младшими слагаемыми.

Воспользовавшись уравнениями состояния (5), формулами (6) для τ и κ и положив $\varepsilon_0 := (\gamma - 1)\varepsilon$, в итоге получим

$$\partial_t \rho = \hat{\mu} \left(\partial_i \partial_i \rho + \frac{\rho u_j}{\varepsilon_0} \partial_i \partial_j u_i + (\gamma - 1) \frac{\rho}{\varepsilon_0} \partial_i \partial_i \varepsilon \right) + \hat{b}_0, \quad (12)$$

$$\partial_t u_k = \hat{\mu} \left(\frac{u_i}{\rho} \partial_i \partial_k \rho + \alpha_S \partial_i \partial_i u_k + \frac{\alpha_S}{3} \partial_i \partial_k u_i + \frac{u_i u_j}{\varepsilon_0} \partial_i \partial_j u_k + (\gamma - 1) \frac{u_i}{\varepsilon_0} \partial_i \partial_k \varepsilon \right) + \hat{b}_k, \quad (13)$$

$$\partial_t \varepsilon = \hat{\mu} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\rho} \partial_i \partial_i \rho + u_j \partial_i \partial_j u_i + [\gamma(\alpha_P + 1) - 1] \partial_i \partial_i \varepsilon \right\} + \hat{b}_{n+1}, \quad (14)$$

где $1 \leq k \leq n$ и $\hat{\mu} := \mu / (\alpha_S \rho) = \tau \varepsilon_0$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$; здесь и в дальнейшем элементы $\mathbb{R}^n$ предполагаются векторами-столбцами. Согласно уравнениям (12)–(14) главный символ КГДД системы представляет собой матрицу

$$P^{(0)}(\rho, \mathbf{u}, \varepsilon, \lambda, \xi) = \lambda I_{n+2} + \hat{\mu} A(\rho, s, \varepsilon_0, \xi),$$

где I_m – единичная матрица порядка m , а матрица A имеет блочный вид

$$A(\rho, s, \varepsilon_0, \xi) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\rho s}{\varepsilon_0} \xi^T & (\gamma - 1) \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{s}{\rho} \xi & \left(\frac{s^2}{\varepsilon_0} + \alpha_S \right) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \xi \xi^T & (\gamma - 1) \frac{s}{\varepsilon_0} \xi \\ \frac{\varepsilon_0}{\rho} & s \xi^T & \gamma(\alpha_P + 1) - 1 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

где $s := u_i \xi_i$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и ξ . Отметим, что здесь и ниже главные символы зависят только от самих решений, но не зависят ни от их производных, ни от координат. Характеристические числа системы $\lambda = \lambda(\rho, \mathbf{u}, \varepsilon, \xi) \in \mathbb{C}$, для которых $\det P^{(0)}(\rho, \mathbf{u}, \varepsilon, \lambda, \xi) = 0$, очевидно, совпадают с $-\hat{\mu}\lambda[A]$; здесь и ниже через $\lambda[A]$ обозначаем собственные значения A . Тем самым, КГДД система является неравномерно или равномерно параболической по Петровскому в D [7], [8], если справедливы, соответственно, неравенства

$$\inf_{|\xi|=1} \operatorname{Re} \lambda[A] > 0 \quad \text{в } D, \quad (16)$$

$$\inf_D (\hat{\mu} \inf_{|\xi|=1} \operatorname{Re} \lambda[A]) > 0. \quad (17)$$

Введем локальное число Маха $M = M(\mathbf{u}, \varepsilon) := |\mathbf{u}| / \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1. КГДД система неравномерно параболическая по Петровскому в любой области D .

2. КГДД система равномерно параболическая по Петровскому в D тогда и только тогда, когда

$$\sup_D \frac{\rho}{\mu} (M^2 + 1) < \infty. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что условие (18) следует из более простых условий $\inf_D (\mu/\rho) > 0$, $\sup_D M < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем диагональную матрицу $(n + 2)$ -го порядка

$$P := \operatorname{diag}(d_0, d_1, \dots, d_1, d_2), \quad d_0 := \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon_0}} d_1, \quad d_1 \neq 0, \quad d_2 := \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\gamma - 1}} d_1. \quad (19)$$

Преобразование подобия

$$\hat{A} := P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 1 & \hat{s} \xi^T & \sqrt{\gamma - 1} \\ \hat{s} \xi & (\hat{s}^2 + \alpha_S) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \xi \xi^T & \sqrt{\gamma - 1} \hat{s} \xi \\ \sqrt{\gamma - 1} & \sqrt{\gamma - 1} \hat{s} \xi^T & \gamma(\alpha_P + 1) - 1 \end{vmatrix} \quad (20)$$

с $\hat{s} := s/\sqrt{\varepsilon_0} = u_i \xi_i / \sqrt{\varepsilon_0}$ симметризует матрицу A . Тем самым, $\lambda[A] = \lambda[\hat{A}]$ вещественны.

Введем матрицу

$$\hat{A}_1 := \begin{vmatrix} 1 & \hat{s} & \sqrt{\gamma - 1} \\ \hat{s} & \hat{s}^2 + \frac{4}{3} \alpha_S & \sqrt{\gamma - 1} \hat{s} \\ \sqrt{\gamma - 1} & \sqrt{\gamma - 1} \hat{s} & \gamma(\alpha_P + 1) - 1 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

При $n = 1$ в нее переходит матрица $\hat{A}$, если при этом $\hat{s}$ понимать как $\hat{s} = u_1/\sqrt{\varepsilon_0}$.

При $n \geq 2$ введем разложение $\mathbb{R}^{n+2}$ в ортогональную прямую сумму

$$\mathbb{R}^{n+2} = \mathcal{O}_\xi \oplus \mathcal{O}_\xi^\perp, \quad (22)$$

где $\mathcal{O}_\xi := \{(\alpha_0, \alpha_1 \xi, \alpha_2) : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{O}_\xi^\perp := \{(0, \zeta, 0) : \zeta \in \mathbb{R}^n, \zeta \perp \xi\}$. Нетрудно видеть, что подпространства $\mathcal{O}_\xi$ и $\mathcal{O}_\xi^\perp$ инвариантны относительно $\hat{A}$. Более того, преобразование координат $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ векторов $(\alpha_0, \alpha_1 \xi, \alpha_2) \in \mathcal{O}_\xi$ под действием $\hat{A}$ описывается матрицей $\hat{A}_1$, а на $\mathcal{O}_\xi^\perp$ оператор $\hat{A}_1$ действует просто как растяжение/сжатие с коэффициентом $\hat{s}^2 + \alpha_S$. Тем самым, при $n \geq 2$ спектр A таков: $\text{Sp } A = \text{Sp } \hat{A}_1 \cup \{\hat{s}^2 + \alpha_S\}$.

Взятый с обратным знаком характеристический многочлен $\hat{A}_1$ имеет вид

$$q_3(\lambda) = \lambda^3 - c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda - c_0,$$

где

$$c_2 = \hat{s}^2 + \frac{4}{3} \alpha_S + \gamma(\alpha_P + 1), \quad c_1 = \gamma \alpha_P (\hat{s}^2 + 1) + \frac{4}{3} \alpha_S \gamma (\alpha_P + 1), \quad c_0 = \frac{4}{3} \alpha_S \gamma \alpha_P.$$

По критерию Сильвестра (с учетом свойства $\det \hat{A}_1 = c_0 > 0$) заключаем, что $\hat{A}_1 > 0$. Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ – собственные значения $\hat{A}_1$. Поскольку

$$c_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \lambda_2 \lambda_3 \leq c_1 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \leq 3 \lambda_2 \lambda_3,$$

то

$$\frac{c_0}{c_1} \leq \lambda_1 \leq 3 \frac{c_0}{c_1}, \quad (23)$$

и для минимального собственного значения $\hat{A}_1$ верна двусторонняя оценка

$$\frac{1}{K_1(\hat{s}^2 + 1)} \leq \lambda_{\min}[\hat{A}_1] \leq \frac{K_2}{\hat{s}^2 + 1},$$

где K_1 и K_2 положительны и зависят только от γ , α_S , α_P .

Как следствие верна двусторонняя оценка (как при $n \geq 2$, так и при $n = 1$)

$$\frac{1}{K_1(\gamma M^2 + 1)} \leq \inf_{|\xi|=1} \lambda_{\min}[\hat{A}_1] \leq \frac{K_2}{\gamma M^2 + 1}. \quad (24)$$

Тем самым, справедлив п. 1. Поскольку отсюда также следует, что

$$\left[K_1 \sup_D \frac{\gamma M^2 + 1}{\hat{\mu}} \right]^{-1} \leq \inf_D \left(\hat{\mu} \inf_{|\xi|=1} \lambda_{\min}[\hat{A}_1] \right) \leq K_2 \left[\sup_D \frac{\gamma M^2 + 1}{\hat{\mu}} \right]^{-1}$$

и $\inf_D (\hat{s}^2 + \alpha_S) \geq \alpha_S$, то справедлив и п. 2.

Доказанное утверждение играет важную роль: п. 1 будет использован в разделе 3, а с помощью п. 2 можно гарантировать локальную по времени разрешимость задачи Коши для КГДД системы. Именно, рассмотрим задачу Коши для КГДД системы уравнений (1)–(6) в слое $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$ с начальными условиями

$$\rho|_{t=0} = \rho^0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0, \quad \varepsilon|_{t=0} = \varepsilon^0. \quad (25)$$

Напомним необходимые пространства. Пусть $C_b(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\mathbb{R}^n$, а $C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, – пространство Гёльдера функций $w \in C_b(\mathbb{R}^n)$, имеющих $\partial_i w, \partial_i \partial_j w \in C_b(\mathbb{R}^n)$, причем $\partial_i \partial_j w$ удовлетворяют условию Гёльдера порядка α равномерно в $\mathbb{R}^n$ для всех i, j от 1 до n .

Пусть также $C_b(\bar{\Pi}_T)$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\bar{\Pi}_T$, а $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi}_T)$, $0 < \alpha < 1$, – пространство Гёльдера функций $w \in C_b(\bar{\Pi}_T)$, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка α по x и $\alpha/2$ по t равномерно в $\bar{\Pi}_T$. Через $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Pi}_T)$ обозначим пространство функций $y \in C_b(\bar{\Pi}_T)$, имеющих $\partial_i y \in C_b(\bar{\Pi}_T)$ и $\partial_i \partial_j y, \partial_t y \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi}_T)$ для всех i, j от 1 до n .

Как обычно, ниже вектор-функция принадлежит некоторому пространству, если каждая ее компонента принадлежит этому пространству.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\mu \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Пусть $\rho^0, \mathbf{u}^0, \varepsilon^0 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $F \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi}_T)$ с некоторым $0 < \alpha < 1$, причем $\inf_{\mathbb{R}^n} \rho^0 > 0$, $\inf_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^0 > 0$.

Тогда при достаточно малом $0 < T_0 \leq T$ задача Коши для КГДД системы (1)–(6) в слое Π_T с начальными условиями (25) имеет единственное классическое решение со свойствами $\rho, \mathbf{u}, \varepsilon \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Pi}_{T_0})$, причем $\inf_{\bar{\Pi}_{T_0}} \rho > 0$, $\inf_{\bar{\Pi}_{T_0}} \varepsilon > 0$.

Это утверждение следует из утверждения 1, п. 2 и общего результата о локальной по времени разрешимости задачи Коши для квазилинейных равномерно параболических по Петровскому систем [8; гл. 3, § 4, теорема 6.3].

2. Параболичность квазигидродинамической системы уравнений в баротропном случае. В баротропном случае ограничиваются замкнутыми системами уравнений для неизвестных $\rho, \mathbf{u}$, выбирая уравнение состояния в виде $p = p(\rho)$. Поэтому баротропная КГДД система уравнений имеет вид

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho u_i) = \partial_i(\rho w_i), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u_k) + \partial_i(\rho u_i u_k) + \partial_k p = \partial_i[\mu(\partial_i u_k + \partial_k u_i)] - \partial_k \left(\frac{2\mu}{3} \partial_i u_i \right) \\ + \partial_i(\rho w_k u_i + \rho w_i u_k) + \rho F_k, \quad 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (27)$$

$$w_i := \tau \left(u_j \partial_j u_i + \frac{1}{\rho} \partial_i p - F_i \right), \quad (28)$$

$$p = p(\rho) > 0, \quad \tau = \frac{\mu}{\alpha_S p}, \quad \mu = \mu(\rho). \quad (29)$$

Снова будем рассматривать классические решения системы, определенные для аргументов (x, t) из некоторой области в $\mathbb{R}^{n+1}$, со значениями в какой-либо области $D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Предполагается, что $\tau \in C^1(D)$, $p \in C^2(\mathbb{R}^+)$. Преобразование первых двух уравнений КГДД системы к виду (9), (10) в баротропном случае сохраняет силу. При $p = p(\rho)$ последние уравнения принимают вид

$$\partial_t \rho = \hat{\mu} \left(\Gamma \partial_i \partial_i \rho + \frac{\rho^2 u_j}{p} \partial_i \partial_j u_i \right) + \hat{b}_0, \quad (30)$$

$$\partial_t u_k = \hat{\mu} \left(\frac{p' u_i}{p} \partial_i \partial_k \rho + \alpha_S \partial_i \partial_i u_k + \frac{\alpha_S}{3} \partial_i \partial_k u_i + \frac{\rho u_i u_j}{p} \partial_i \partial_j u_k \right) + \hat{b}_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (31)$$

где

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\alpha_S \rho} = \frac{\tau p}{\rho}, \quad \Gamma(\rho) := \frac{\rho p'(\rho)}{p(\rho)}.$$

Величина Γ называется *первым адиабатическим показателем* уравнения состояния. Если оно имеет наиболее стандартный вид $p(\rho) = p_1 \rho^\gamma$ с $p_1 > 0$, $\gamma > 0$, то $\Gamma \equiv \gamma$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$. Согласно уравнениям (30), (31) главный символ баротропной КГДД системы представляет собой матрицу

$$P^{(0)}(\rho, \mathbf{u}, \lambda, \xi) = \lambda I_{n+1} + \hat{\mu} A(\rho, s, \xi),$$

где матрица A имеет блочный вид

$$A(\rho, s, \xi) = \begin{vmatrix} \Gamma & \frac{\rho^2 s}{p} \xi^T \\ \frac{p' s}{p} \xi & \left(\frac{\rho s^2}{p} + \alpha_S \right) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \xi \xi^T \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Баротропная КГДД система является неравномерно или равномерно параболической по Петровскому в D , если для собственных значений последней матрицы справедливы, соответственно, неравенства (16) или (17).

Введем $D_0 := \{\rho : (\rho, \mathbf{u}) \in D \text{ для некоторого } \mathbf{u}\}$ – проекцию D на первую координатную ось в $\mathbb{R}^{n+1}$. Ясно, что D_0 – конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}^+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 1. *Баротропная КГДД система неравномерно параболическая по Петровскому в D тогда и только тогда, когда $p'(\rho) > 0$ в D_0 .*

2. *Баротропная КГДД система равномерно параболическая по Петровскому в D тогда и только тогда, когда*

$$p'(\rho) > 0 \quad \text{в } D_0, \quad \sup_D \frac{\rho}{\mu} \left(M^2 + 1 + \frac{1}{\Gamma} \right) < \infty, \quad (33)$$

где $M = M(\rho, \mathbf{u}) := |\mathbf{u}| / \sqrt{p'(\rho)}$ – локальное баротропное число Маха.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Второе из условий (33) заведомо следует из условий

$$\inf_{D_0} \frac{\mu}{\rho} > 0, \quad \inf_{D_0} \Gamma > 0, \quad \sup_D M < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем матрицу

$$A_1 = \begin{vmatrix} \Gamma & \frac{\rho^2 s}{p} \\ \frac{p' s}{p} & \frac{\rho s^2}{p} + \frac{4}{3} \alpha_S \end{vmatrix}.$$

При $n = 1$ в нее переходит матрица A вида (32), если s понимать как u_1 .

При $n \geq 2$ воспользуемся разложением $\mathbb{R}^{n+1} = \mathcal{O}_\xi \oplus \mathcal{O}_\xi^\perp$, получающимся из (22) исключением последних компонент всех векторов. Подпространства $\mathcal{O}_\xi$ и $\mathcal{O}_\xi^\perp$ инвариантны относительно A , причем преобразование координат (α_0, α_1) векторов $(\alpha_0, \alpha_1 \xi) \in \mathcal{O}_\xi$ под действием A описывается матрицей A_1 , а на $\mathcal{O}_\xi^\perp$ оператор A просто совпадает с $((\rho s^2)/p + \alpha_S) I_n$. Тем самым, при $n \geq 2$ имеем $\text{Sp } A = \text{Sp } A_1 \cup \{(\rho s^2)/p + \alpha_S\}$.

Характеристический многочлен A_1 имеет вид

$$q_2(\lambda) = \lambda^2 - c_1\lambda + c_0, \quad c_1 \equiv \operatorname{tr} A_1 = \frac{\rho s^2}{p} + \Gamma + \frac{4}{3}\alpha_S, \quad c_0 \equiv \det A_1 = \frac{4}{3}\alpha_S\Gamma.$$

Нетрудно видеть, что дискриминант q_2 положителен и, тем самым, $\lambda[A_1]$ вещественны.

Поскольку $q_2(0) = (4/3)\alpha_S\Gamma$, при $p'(\rho) \leq 0$ имеется собственное значение $\lambda[A_1] \leq 0$, и условие (16) нарушается.

При $p'(\rho) > 0$ имеем $\lambda[A_1] > 0$, причем верна аналогичная (23) двусторонняя оценка

$$\frac{c_0}{c_1} \leq \lambda_{\min}[A_1] \leq 2\frac{c_0}{c_1}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\Gamma}{K_1[\Gamma(M^2 + 1) + 1]} \leq \inf_{|\xi|=1} \lambda_{\min}[A_1] \leq K_2 \frac{\Gamma}{\Gamma(M^2 + 1) + 1},$$

где K_1 и K_2 положительны и зависят только от α_S (ср. с (24)). Отсюда и следует утверждение 3.

Отметим, что условию $p'(\rho) > 0$ не удовлетворяют немонотонные и нестрого монотонные уравнения состояния, которые обычно используются при описании фазовых переходов газ/жидкость.

Из утверждения 3, п. 2 вытекает следующий результат. Пусть $\mu \in C^2(\mathbb{R}^+)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $\rho^0, \mathbf{u}^0 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $F \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi}_T)$ с некоторым $0 < \alpha < 1$, причем $\inf_{\mathbb{R}^n} \rho^0 > 0$. Пусть также $p' > 0$ на каком-либо интервале, содержащем все значения ρ^0 . Тогда при достаточно малом $0 < T_0 \leq T$ задача Коши для баротропной КГДД системы (26)–(29) в слое Π_T с начальными условиями

$$\rho|_{t=0} = \rho^0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0$$

имеет единственное классическое решение со свойствами $\rho, \mathbf{u} \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Pi}_{T_0})$, причем $\inf_{\bar{\Pi}_{T_0}} \rho > 0$.

3. Устойчивость малых возмущений для КГДД систем на бесконечном интервале времени. Данный выше анализ типа КГДД систем учитывает только старшие производные (2-го порядка) по пространственным переменным и поэтому игнорирует газодинамические слагаемые с производными 1-го порядка в левых частях уравнений этих систем. При исследовании устойчивости малых возмущений эти слагаемые включаются в рассмотрение.

I. Рассмотрим сначала КГДД систему в теплопроводном случае и ее решения вида

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon, \quad (34)$$

где $\bar{\rho} > 0$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ – постоянные фоновые значения неизвестных, а $\delta\rho$, $\delta\mathbf{u}$, $\delta\varepsilon$ – их малые возмущения, при $F = 0$. Вернувшись к выводу системы (12)–(14), воспользовавшись постоянством фоновых значений неизвестных и отбросив слагаемые второго порядка малости относительно возмущений (и их производных), выведем

следующую линеаризованную КГДД систему для возмущений:

$$\partial_t \delta \rho + \bar{u}_i \partial_i \delta \rho + \bar{\rho} \partial_i \delta u_i = \hat{\mu} \left(\partial_i \partial_i \delta \rho + \frac{\bar{\rho} \bar{u}_j}{\bar{\varepsilon}_0} \partial_i \partial_j \delta u_i + (\gamma - 1) \frac{\bar{\rho}}{\bar{\varepsilon}_0} \partial_i \partial_i \delta \varepsilon \right), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \delta u_k + \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{\rho}} \partial_k \delta \rho + \bar{u}_i \partial_i \delta u_k + (\gamma - 1) \partial_k \delta \varepsilon \\ = \hat{\mu} \left(\frac{\bar{u}_i}{\bar{\rho}} \partial_i \partial_k \delta \rho + \alpha_S \partial_i \partial_i \delta u_k + \frac{\alpha_S}{3} \partial_i \partial_k \delta u_i \right. \\ \left. + \frac{\bar{u}_i \bar{u}_j}{\bar{\varepsilon}_0} \partial_i \partial_j \delta u_k + (\gamma - 1) \frac{\bar{u}_i}{\bar{\varepsilon}_0} \partial_i \partial_k \delta \varepsilon \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\partial_t \delta \varepsilon + \bar{\varepsilon}_0 \partial_i \delta u_i + \bar{u}_i \partial_i \delta \varepsilon = \hat{\mu} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{\rho}} \partial_i \partial_i \delta \rho + \bar{u}_j \partial_i \partial_j \delta u_i + [\gamma(\alpha_P + 1) - 1] \partial_i \partial_i \delta \varepsilon \right\}, \quad (37)$$

где $\hat{\mu} = \mu(\bar{\rho}, \bar{\varepsilon})/(\alpha_S \bar{\rho})$, $\bar{\varepsilon}_0 = (\gamma - 1)\bar{\varepsilon}$ и $1 \leq k \leq n$. Ниже будем опускать черту над фоновыми значениями величин (чтобы не загромождать обозначения).

Изучим сначала задачу Коши для линеаризованной КГДД системы (35)–(37) в полупространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ с начальными условиями

$$\delta \rho|_{t=0} = \delta \rho^0, \quad \delta \mathbf{u}|_{t=0} = \delta \mathbf{u}^0, \quad \delta \varepsilon|_{t=0} = \delta \varepsilon^0. \quad (38)$$

Ее можно решить с помощью интегрального преобразования Фурье (подробнее см. доказательство следующего утверждения).

Пусть $\delta \mathbf{z} := (\delta \rho, \delta \mathbf{u}, \delta \varepsilon)$ и $\delta \mathbf{z}^0 := (\delta \rho^0, \delta \mathbf{u}^0, \delta \varepsilon^0)$ – векторы-столбцы возмущений и их начальных значений. Введем следующие их обезразмеренные варианты:

$$\delta \hat{\mathbf{z}} := \left(\frac{\delta \rho}{\bar{\rho}}, \sqrt{\gamma} \frac{\delta \mathbf{u}}{c_b}, \frac{1}{\sqrt{\gamma - 1}} \frac{\delta \varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right), \quad \delta \hat{\mathbf{z}}^0 := \left(\frac{\delta \rho^0}{\bar{\rho}}, \sqrt{\gamma} \frac{\delta \mathbf{u}^0}{c_b}, \frac{1}{\sqrt{\gamma - 1}} \frac{\delta \varepsilon^0}{\bar{\varepsilon}} \right). \quad (39)$$

Вектор $\delta \hat{\mathbf{z}}$ содержит относительные возмущения плотности и удельной внутренней энергии и возмущение скорости, отнесенное к фоновой скорости звука $c_b := \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\bar{\varepsilon}}$, с коэффициентами, зависящими лишь от γ . Положим

$$\underline{\lambda} := \min_{|\xi|=1} \lambda_{\min}[A], \quad \bar{\lambda} := \max_{|\xi|=1} \lambda_{\max}[A],$$

где $\lambda_{\min}[A]$ и $\lambda_{\max}[A]$ – минимальное и максимальное значения $\lambda[A]$.

Будем использовать комплексные пространства Лебега $L^2(G)$ и Соболева $H^1(G)$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ (включая $G = \mathbb{R}^n$). Положим $\|y\|_{L^2(G)} := \|y\|_{L^2(G)}$ для вектор-функции $y = (y_1, \dots, y_m) \in L^2(G)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\delta \mathbf{z}^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для решения методом Фурье задачи Коши для линеаризованной КГДД системы справедливы глобальные по t оценки

$$\sup_{t \geq 0} \|\delta \hat{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\delta \hat{\mathbf{z}}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (40)$$

$$\sqrt{2\bar{\mu}\bar{\lambda}} \|\nabla \delta \hat{\mathbf{z}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \leq \|\delta \hat{\mathbf{z}}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (41)$$

Если $\delta \mathbf{z}^0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, то справедливы также глобальные по t оценки

$$\sup_{t \geq 0} \|\nabla \delta \hat{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla \delta \hat{\mathbf{z}}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (42)$$

$$\sqrt{2\hat{\mu}\hat{\lambda}}\|\partial^2\delta\hat{\mathbf{z}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)}\leq\|\nabla\delta\hat{\mathbf{z}}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (43)$$

где $\partial^2 = \{\partial_i\partial_j\}_{i,j=1}^n$ – набор вторых производных по пространственным переменным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ – прямое и обратное интегральные преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$. Применим $\mathcal{F}$ к уравнениям и начальным условиям задачи и для $Z(\zeta, t) := (\mathcal{F}\delta\mathbf{z}(\cdot, t))(\zeta)$; получим задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial_t Z + (|\zeta|^2\hat{\mu}A + \mathbf{i}|\zeta|\sqrt{\varepsilon_0}B)Z = 0, \quad Z|_{t=0} = \mathcal{F}\delta\mathbf{z}^0. \quad (44)$$

Здесь $\zeta \in \mathbb{R}^n$ – параметр, матрица $A = A(\rho, s, \varepsilon_0, \xi)$ была введена в (15), а матрица B имеет блочный вид

$$B(\rho, s, \varepsilon_0, \xi) := \begin{vmatrix} \frac{s}{\sqrt{\varepsilon_0}} & \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon_0}}\xi^T & 0 \\ \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\rho}\xi & \frac{s}{\sqrt{\varepsilon_0}}I_n & (\gamma-1)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\xi \\ 0 & \sqrt{\varepsilon_0}\xi^T & \frac{s}{\sqrt{\varepsilon_0}} \end{vmatrix};$$

кроме того, $\mathbf{i}$ – мнимая единица, а $\xi = \zeta/|\zeta|$ при $\zeta \neq 0$.

Преобразование подобия с матрицей P вида (19) симметризует не только матрицу A , см. (20), но и матрицу B :

$$\hat{B} := P^{-1}BP = \begin{vmatrix} \hat{s} & \xi^T & 0 \\ \xi & \hat{s}I_n & \sqrt{\gamma-1}\xi \\ 0 & \sqrt{\gamma-1}\xi^T & \hat{s} \end{vmatrix}.$$

Поэтому задача (44) переписывается в симметризованном виде для функции $\hat{Z} := P^{-1}Z$:

$$\partial_t \hat{Z} + (|\zeta|^2\hat{\mu}\hat{A} + \mathbf{i}|\zeta|\sqrt{\varepsilon_0}\hat{B})\hat{Z} = 0, \quad \hat{Z}|_{t=0} = \hat{Z}^0 := P^{-1}\mathcal{F}\delta\mathbf{z}^0. \quad (45)$$

Положим $d_1 := \sqrt{\varepsilon_0}$ в определении P ; тогда

$$\delta\hat{\mathbf{z}} = P^{-1}\delta\mathbf{z} = \mathcal{F}^{-1}\hat{Z}, \quad \delta\hat{\mathbf{z}}^0 = P^{-1}\delta\mathbf{z}^0 = \mathcal{F}^{-1}\hat{Z}^0, \quad (46)$$

причем $\delta\hat{\mathbf{z}}$ и $\delta\hat{\mathbf{z}}^0$ задаются формулами (39).

Умножение уравнения задачи (45) скалярно в $\mathbb{C}^{n+2}$ на $\hat{Z}$ и отделение вещественной части результата приводит к равенству

$$\frac{1}{2}\partial_t(|\hat{Z}|^2) + |\zeta|^2\hat{\mu}(\hat{A}\hat{Z}, \hat{Z}) = 0 \quad (47)$$

в силу симметричности $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Поскольку $\lambda[\hat{A}] = \lambda[A]$, то

$$\underline{\lambda}|Z|^2 \leq (\hat{A}\hat{Z}, \hat{Z}) \leq \bar{\lambda}|Z|^2. \quad (48)$$

Интегрирование равенства (47) по t влечет оценки

$$|\hat{Z}|^2 \leq |\hat{Z}^0|^2, \quad 2\hat{\mu}\underline{\lambda}|\zeta|^2 \int_{\mathbb{R}^+} |\hat{Z}|^2 dt \leq |\hat{Z}^0|^2. \quad (49)$$

Их интегрирование по $\zeta \in \mathbb{R}^n$ дает

$$\sup_{t \geq 0} \|\widehat{Z}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\widehat{Z}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \sqrt{2\widehat{\mu}\widehat{\lambda}} \|\zeta|\widehat{Z}(\zeta, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} \leq \|\widehat{Z}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Применение формул (46) и классических свойств преобразования Фурье функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $H^1(\mathbb{R}^n)$ гарантирует, что $\delta\widehat{\mathbf{z}}(\cdot, t)$ и $\nabla\delta\widehat{\mathbf{z}}$ определены корректно и для них верны оценки (40) и (41).

При $\delta\mathbf{z}^0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ оценки (49) дают также оценки норм

$$\begin{aligned} \|\zeta|\widehat{Z}(\zeta, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\zeta|\widehat{Z}^0(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \\ \sqrt{2\widehat{\mu}\widehat{\lambda}} \|\zeta|^2\widehat{Z}(\zeta, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} &\leq \|\zeta|\widehat{Z}^0(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

что приводит к оценкам (42) и (43).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\delta\mathbf{z}^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\partial^m\delta\mathbf{z}^0 \equiv \partial_1^{m_1} \dots \partial_n^{m_n}\delta\mathbf{z}^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ с $m = (m_1, \dots, m_n)$ при некоторых целых $m_1 \geq 0, \dots, m_n \geq 0$, то справедлива более общая, чем (40) и (42), оценка

$$\sup_{t \geq 0} \|\partial^m\delta\widehat{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial^m\delta\mathbf{z}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для начальной задачи с условием $X = (X_1, \dots, X_n)$ -периодичности по x начальных данных и решений справедливо аналогичное утверждение с заменой $\mathbb{R}^n$ на параллелепипед $(0, X_1) \times \dots \times (0, X_n)$; здесь $X_1 > 0, \dots, X_n > 0$. Его доказательство аналогичным образом использует разложения в комплексный ряд Фурье вместо интегрального преобразования Фурье.

В линеаризованной КГДД системе (35)–(37) можно симметризовать запись всех слагаемых со смешанными производными $\partial_i\partial_j$ и перейти к матричной форме записи

$$\partial_t\delta\mathbf{z} + \sqrt{\varepsilon_0}B^{(i)}\partial_i\delta\mathbf{z} - \widehat{\mu}A^{(ij)}\partial_i\partial_j\delta\mathbf{z} = 0. \quad (50)$$

Матрицы $A^{(ij)}$ и $B^{(i)}$ имеют следующий блочный вид:

$$\begin{aligned} A^{(kk)} &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{\rho u_k}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_k^T & (\gamma - 1) \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{u_k}{\rho} \mathbf{e}_k & \left(\frac{u_k^2}{\varepsilon_0} + \alpha_S \right) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T & (\gamma - 1) \frac{u_k^2}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_k \\ \frac{\varepsilon_0}{\rho} & u_k \mathbf{e}_k^T & \gamma(\alpha_P + 1) - 1 \end{vmatrix}, \\ A^{(ij)} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\rho \mathbf{u}_{ij}^T}{\varepsilon_0} & 0 \\ \frac{\mathbf{u}_{ij}}{\rho} & 2 \frac{u_i u_j}{\varepsilon_0} I_n + \frac{\alpha_S}{3} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T) & (\gamma - 1) \frac{\mathbf{u}_{ij}}{\varepsilon_0} \\ 0 & \mathbf{u}_{ij}^T & 0 \end{vmatrix}, \\ B^{(i)} &= \begin{vmatrix} \frac{u_i}{\sqrt{\varepsilon_0}} & \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon_0}} \mathbf{e}_i^T & 0 \\ \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\rho} \mathbf{e}_i & \frac{u_i}{\sqrt{\varepsilon_0}} I_n & (\gamma - 1) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \mathbf{e}_i \\ 0 & \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{e}_i^T & \frac{u_i}{\sqrt{\varepsilon_0}} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

при всех k и всех $i \neq j$, причем $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – векторы-столбцы канонического базиса в $\mathbb{R}^n$, а $\mathbf{u}_{ij} := u_j \mathbf{e}_i + u_i \mathbf{e}_j$. Эти матрицы связаны с введенными выше посредством равенств

$$\xi_i \xi_j A^{(ij)} = A, \quad \xi_i B^{(i)} = B.$$

Пусть теперь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (50) в цилиндре $Q_T := \Omega \times (0, T)$ с любым $T > 0$ с краевым условием

$$\delta \mathbf{z}|_{\partial \Omega \times (0, T)} = 0 \quad (51)$$

и начальными условиями (38). Ее обобщенные решения из энергетического класса определяются в соответствии с [9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $\delta \mathbf{z}^0 \in L^2(\Omega)$. Тогда начально-краевая задача для линейаризованной КГДД системы имеет единственное обобщенное решение из энергетического класса при любом $T > 0$, и справедливы глобальные по t оценки

$$\sup_{t \geq 0} \|\delta \widehat{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\delta \widehat{\mathbf{z}}^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (52)$$

$$\sqrt{2\widehat{\mu}\widehat{\lambda}} \|\nabla \delta \widehat{\mathbf{z}}\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)} \leq \|\delta \widehat{\mathbf{z}}^0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование подобия вида (19) с диагональной матрицей P одновременно симметризует матрицы $A^{(kk)}$, $A^{(ij)}$ и $B^{(i)}$ при всех k и всех $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \widehat{A}^{(kk)} &= P^{-1} A^{(kk)} P = \begin{vmatrix} 1 & \widehat{u}_k \mathbf{e}_k^T & \sqrt{\gamma-1} \\ \widehat{u}_k \mathbf{e}_k & (\widehat{u}_k^2 + \alpha_S) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T & \sqrt{\gamma-1} \widehat{u}_k \mathbf{e}_k \\ \sqrt{\gamma-1} & \sqrt{\gamma-1} \widehat{u}_k \mathbf{e}_k^T & \gamma(\alpha_P + 1) - 1 \end{vmatrix}, \\ \widehat{A}^{(ij)} &= P^{-1} A^{(ij)} P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \widehat{\mathbf{u}}_{ij}^T & 0 \\ \widehat{\mathbf{u}}_{ij} & 2\widehat{u}_i \widehat{u}_j I_n + \frac{\alpha_S}{3} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T) & \sqrt{\gamma-1} \widehat{\mathbf{u}}_{ij} \\ 0 & \sqrt{\gamma-1} \widehat{\mathbf{u}}_{ij}^T & 0 \end{vmatrix}, \\ \widehat{B}^{(i)} &:= P^{-1} B^{(i)} P = \begin{vmatrix} \widehat{u}_i & \mathbf{e}_i^T & 0 \\ \mathbf{e}_i & \widehat{u}_i I_n & \sqrt{\gamma-1} \mathbf{e}_i \\ 0 & \sqrt{\gamma-1} \mathbf{e}_i^T & \widehat{u}_i \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $\widehat{u}_i := u_i / \sqrt{\varepsilon_0}$ и $\widehat{\mathbf{u}}_{ij} := \widehat{u}_i \mathbf{e}_j + \widehat{u}_j \mathbf{e}_i$. При этом справедливы равенства

$$\xi_i \xi_j \widehat{A}^{(ij)} = \widehat{A}, \quad \xi_i \widehat{B}^{(i)} = \widehat{B}.$$

Положив $\delta \widehat{\mathbf{z}} = P^{-1} \delta \mathbf{z}$, перепишем систему (50) в симметризованном виде

$$\partial_t \delta \widehat{\mathbf{z}} + \sqrt{\varepsilon_0} \widehat{B}^{(i)} \partial_i \delta \widehat{\mathbf{z}} - \widehat{\mu} \widehat{A}^{(ij)} \partial_i \partial_j \delta \widehat{\mathbf{z}} = 0. \quad (54)$$

Опустим доказательство существования и единственности решений из энергетического класса (оно достаточно стандартно) и сосредоточимся на выводе глобальных по t оценок.

Пусть $H_0^1(\Omega)$ – замыкание гладких финитных в Ω функций в норме $H^1(\Omega)$, а w – это $(n+2)$ -мерный вектор-столбец с компонентами из $H_0^1(\Omega)$. Справедливы соотношения

$$\lambda \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{L}_\Omega(w, w) := (\hat{A}^{(ij)} \partial_j w, \partial_i w)_{L^2(\Omega)} \leq \bar{\lambda} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (55)$$

$$\operatorname{Re}(\hat{B}^{(i)} \partial_i w, w)_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (56)$$

Для их доказательства введем $\overset{\circ}{w}$ – продолжение w нулем с Ω на $\mathbb{R}^n$ и $W := \mathcal{F} \overset{\circ}{w}$. В силу того, что $\overset{\circ}{w} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, имеем

$$\mathcal{L}_\Omega(w, w) = (\hat{A}^{(ij)} \partial_j \overset{\circ}{w}, \partial_i \overset{\circ}{w})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (|\zeta|^2 \hat{A} W, W)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

С помощью неравенств (48) приходим к (55).

Проинтегрировав по частям и воспользовавшись симметричностью $\hat{B}^{(i)}$, выведем

$$(\hat{B}^{(i)} \partial_i w, w)_{L^2(\Omega)} = -(\hat{B}^{(i)} w, \partial_i w)_{L^2(\Omega)} = -(w, \hat{B}^{(i)} \partial_i w)_{L^2(\Omega)},$$

откуда следует (56).

С учетом симметризованной записи (54) системы получим, что решение начально-краевой задачи удовлетворяет “энергетическому” равенству

$$\frac{1}{2} \partial_t (\|\delta \hat{\mathbf{z}}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \hat{\mu} \mathcal{L}_\Omega(\delta \hat{\mathbf{z}}, \delta \hat{\mathbf{z}}) = 0,$$

где использовано равенство (56), ср. с (47). Оценки (52), (53) вытекают из него при помощи неравенств (55). Утверждение доказано.

При $n = 1$, $\bar{\mathbf{u}} = 0$ оценка, аналогичная (52), доказана иным образом в [10].

2. Обратимся теперь к баротропному случаю и рассмотрим решения вида (34), отбросив неизвестную функцию ε , при $F = 0$. Вернувшись к выводу системы (30), (31), опять воспользовавшись постоянством фоновых значений неизвестных и отбросив слагаемые второго порядка малости относительно возмущений (и их производных), выведем следующую линеаризованную баротропную КГДД систему для возмущений:

$$\partial_t \delta \rho + \bar{u}_i \partial_i \delta \rho + \bar{\rho} \partial_i \delta u_i = \hat{\mu} \left(\bar{\Gamma} \partial_i \partial_i \delta \rho + \frac{\bar{\rho}^2 \bar{u}_j}{\bar{p}} \partial_i \partial_j \delta u_i \right), \quad (57)$$

$$\partial_t \delta u_k + \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}} \partial_k \delta \rho + \bar{u}_i \partial_i \delta u_k = \hat{\mu} \left(\frac{\bar{p}' \bar{u}_i}{\bar{p}} \partial_i \partial_k \delta \rho + \alpha_S \partial_i \partial_i \delta u_k + \frac{\alpha_S}{3} \partial_i \partial_k \delta u_i + \frac{\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\bar{p}} \partial_i \partial_j \delta u_k \right), \quad (58)$$

где $\hat{\mu} = \mu(\bar{\rho})/(\alpha_S \bar{\rho})$, $\bar{p}' = p'(\bar{\rho})$, $\bar{\Gamma} = \Gamma(\bar{\rho})$, $1 \leq k \leq n$. Будем снова опускать черту над фоновыми значениями величин.

Для этой системы рассмотрим задачу Коши в полупространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ с начальными условиями (38), а также начально-краевую задачу в Q_T с любым $T > 0$ с краевым условием (51) и аналогичными начальными условиями. Здесь и ниже мы отбрасываем последние компоненты введенных выше векторов $\delta \mathbf{z}$ и $\delta \mathbf{z}^0$.

В предположении, что $p'(\rho) > 0$, введем безразмерные векторы-столбцы возмущений и их начальных значений

$$\delta \widehat{\mathbf{z}} := \left(\frac{\delta \rho}{\rho}, \frac{\delta \mathbf{u}}{c_b} \right), \quad \delta \widehat{\mathbf{z}}^0 := \left(\frac{\delta \rho^0}{\rho}, \frac{\delta \mathbf{u}^0}{c_b} \right), \quad (59)$$

где $c_b := \sqrt{p'(\rho)}$ – баротропная фоновая скорость звука.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $p'(\rho) > 0$. Тогда для баротропной КГДД системы сохраняют силу результаты утверждений 5 и 6 (с $\delta \widehat{\mathbf{z}}$ и $\delta \widehat{\mathbf{z}}^0$ вида (59)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $p' > 0$. Рассмотрим сначала задачу Коши. Применим к ее уравнениям и начальным условиям преобразование Фурье и для $Z(\zeta, t) := (\mathcal{F} \delta \mathbf{z}(\cdot, t))(\zeta)$ получим задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial_t Z + (|\zeta|^2 \widehat{\mu} A + \mathbf{i} |\zeta| \sqrt{p'} B) Z = 0, \quad Z|_{t=0} = \mathcal{F} \delta \mathbf{z}^0. \quad (60)$$

Здесь $\zeta \in \mathbb{R}^n$ – параметр, матрица $A(\rho, s, \xi)$ была введена в (32), а матрица B имеет блочный вид

$$B(\rho, s, \xi) := \begin{vmatrix} \frac{s}{\sqrt{p'}} & \frac{\rho}{\sqrt{p'}} \xi^T \\ \frac{\sqrt{p'}}{\rho} \xi & \frac{s}{\sqrt{p'}} I_n \end{vmatrix},$$

где опять $\xi = \zeta/|\zeta|$ при $\zeta \neq 0$.

Введем диагональную матрицу порядка $n+1$

$$P = \text{diag}(d_0, d_1, \dots, d_1), \quad d_0 := \frac{\rho}{\sqrt{p'}} d_1, \quad d_1 \neq 0. \quad (61)$$

Преобразование подобия с этой матрицей

$$\widehat{A} := P^{-1} A P = \begin{vmatrix} \Gamma & \Gamma \widehat{s} \xi^T \\ \Gamma \widehat{s} \xi & (\Gamma \widehat{s}^2 + \alpha_S) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \xi \xi^T \end{vmatrix}, \quad \widehat{B} := P^{-1} B P = \begin{vmatrix} \widehat{s} & \xi^T \\ \xi & \widehat{s} I_n \end{vmatrix},$$

где $\widehat{s} := s/\sqrt{p'}$, симметризует обе матрицы A и B . Поэтому задача (60) преобразуется к симметризованному виду для функции $\widehat{Z} := P^{-1} Z$:

$$\partial_t \widehat{Z} + (|\zeta|^2 \widehat{\mu} \widehat{A} + \mathbf{i} |\zeta| \sqrt{p'} \widehat{B}) \widehat{Z} = 0, \quad \widehat{Z}|_{t=0} = \widehat{Z}^0 := P^{-1} \mathcal{F} \delta \mathbf{z}^0.$$

Выбрав $d_1 := \sqrt{p'}$, получим равенства

$$\delta \widehat{\mathbf{z}} = P^{-1} \delta \mathbf{z} = \mathcal{F}^{-1} \widehat{Z}, \quad \delta \widehat{\mathbf{z}}^0 = P^{-1} \delta \mathbf{z}^0 = \mathcal{F}^{-1} \widehat{Z}^0,$$

где $\delta \widehat{\mathbf{z}}$ и $\delta \widehat{\mathbf{z}}^0$ задаются формулами (59). Дальнейшие рассуждения повторяют проведенные в доказательстве утверждения 5.

2. В случае начально-краевой задачи снова запишем линеаризованную систему (57), (58) в матричной форме

$$\partial_t \delta \mathbf{z} + \sqrt{p'} B^{(i)} \partial_i \delta \mathbf{z} - \widehat{\mu} A^{(ij)} \partial_i \partial_j \delta \mathbf{z} = 0. \quad (62)$$

Матрицы $A^{(ij)}$ и $B^{(i)}$ имеют блочный вид

$$A^{(kk)} = \begin{vmatrix} \Gamma & \frac{\rho^2 u_k}{p} \mathbf{e}_k^T \\ \frac{p' u_k}{p} \mathbf{e}_k & \left(\frac{\rho u_k^2}{p} + \alpha_S \right) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \end{vmatrix},$$

$$A^{(ij)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\rho^2 \mathbf{u}_{ij}^T}{p} \\ \frac{p' \mathbf{u}_{ij}}{p} & 2 \frac{\rho u_i u_j}{p} I_n + \frac{\alpha_S}{3} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T) \end{vmatrix}, \quad B^{(i)} = \begin{vmatrix} \frac{u_i}{\sqrt{p'}} & \frac{\rho}{\sqrt{p'}} \mathbf{e}_i^T \\ \frac{\sqrt{p'}}{\rho} \mathbf{e}_i & \frac{u_i}{\sqrt{p'}} I_n \end{vmatrix}$$

при всех k и всех $i \neq j$, и справедливы равенства $A^{(ij)} = A^{(ji)}$ и

$$\xi_i \xi_j A^{(ij)} = A, \quad \xi_i B^{(i)} = B.$$

Преобразование подобия с диагональной матрицей P вида (61) одновременно симметризует матрицы $A^{(kk)}$, $A^{(ij)}$ и $B^{(i)}$ при всех k и всех $i \neq j$:

$$\hat{A}^{(kk)} := P^{-1} A^{(kk)} P = \begin{vmatrix} \Gamma & \Gamma \hat{u}_k \mathbf{e}_k^T \\ \Gamma \hat{u}_k \mathbf{e}_k & (\Gamma \hat{u}_k^2 + \alpha_S) I_n + \frac{\alpha_S}{3} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \end{vmatrix},$$

$$\hat{A}^{(ij)} := P^{-1} A^{(ij)} P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{ij}^T \\ \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{ij} & 2 \Gamma \hat{u}_i \hat{u}_j I_n + \frac{\alpha_S}{3} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T) \end{vmatrix},$$

$$\hat{B}^{(i)} := P^{-1} B^{(i)} P = \begin{vmatrix} \hat{u}_i & \mathbf{e}_i^T \\ \mathbf{e}_i & \hat{u}_i I_n \end{vmatrix},$$

где $\hat{u}_i := u_i / \sqrt{p'}$ и $\hat{\mathbf{u}}_{ij} := \hat{u}_i \mathbf{e}_j + \hat{u}_j \mathbf{e}_i$. Справедливы равенства $\hat{A}^{(ij)} = \hat{A}^{(ji)}$ и

$$\xi_i \xi_j \hat{A}^{(ij)} = \hat{A}, \quad \xi_i \hat{B}^{(i)} = \hat{B}.$$

Тем самым, систему (62) можно переписать в симметризованном виде для $\delta \hat{\mathbf{z}} = P^{-1} \delta \mathbf{z}$:

$$\partial_t \delta \hat{\mathbf{z}} + \sqrt{p'} \hat{B}^{(i)} \partial_i \delta \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mu} \hat{A}^{(ij)} \partial_i \partial_j \delta \hat{\mathbf{z}} = 0.$$

Доказательство завершается так же, как и в случае утверждения 6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Шеретов, *Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений*, Изд-во ТвГУ, Тверь, 2000.
- [2] Б. Н. Четверушкин, *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*, Прикладная математика и информатика, МАКС Пресс, М., 2004.
- [3] Т. Г. Елизарова, *Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа*, Физ. ф-т МГУ, М., 2005.
- [4] А. А. Злотник, “Классификация некоторых модификаций системы уравнений Эйлера”, *Докл. РАН*, **407:6** (2006), 747–751.

- [5] Л. В. Дородницын, “Об устойчивости малых колебаний в квазигазодинамической системе уравнений”, *ЖВМ и МФ*, **44**:7 (2004), 1299–1305.
- [6] А. А. Злотник, И. А. Злотник, “Критерий устойчивости малых возмущений для квазигазодинамической системы уравнений”, *ЖВМ и МФ*, **46**:2 (2006), 262–269.
- [7] И. Г. Петровский, *Избранные труды: Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия*, Наука, М., 1986.
- [8] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, М., 1964.
- [9] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [10] Ю. В. Шеретов, “Анализ задачи о распространении звука для линеаризованных КГДД-систем”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Сб. науч. трудов, Изд-во ТвГУ, Тверь, 2001, 178–191.

А. А. Злотник

Российский государственный социальный университет

E-mail: azlotnik2007@mail.ru

Поступило

27.07.2007