Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гонцов, О решениях уравнения Шлезингера в окрестности Θ -дивизора Мальгранжа, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 779–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:47:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О решениях уравнения Шлезингера в окрестности Θ -дивизора Мальгранжа

Р. Р. Гонцов

Рассмотрим семейство

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y \quad (1)$$

фуксовых систем p линейных дифференциальных уравнений на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, голоморфно зависящее от параметра $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Условие того, что данное семейство голоморфно в бесконечности, равносильно выполнению соотношения $\sum_{i=1}^n B_i(a) = 0$.

Обозначим через $D(a^0)$ шар малого радиуса с центром в точке $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$ пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Говорят, что семейство (1) *изомонодромно*, если при всех $a \in D(a^0)$ монодромии

$$\chi_a: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow G = GL(p, \mathbb{C})$$

соответствующих систем одинаковы. (При малых изменениях параметра a имеется канонический изоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ и $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\})$, который порождает канонический изоморфизм

$$\text{Hom}(\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}), G)/G \cong \text{Hom}(\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}), G)/G$$

пространств классов сопряженности представлений этих фундаментальных групп, что позволяет сравнивать χ_a при разных $a \in D(a^0)$.)

Например, если матрицы $B_i(a)$ удовлетворяют уравнению Шлезингера

$$dB_i(a) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j),$$

то семейство (1) изомонодромно (в этом случае оно называется *изомонодромным семейством Шлезингера*). Известно, что для любых начальных условий $B_i(a^0) = B_i^0$ уравнение Шлезингера имеет единственное решение $\{B_1(a), \dots, B_n(a)\}$ в некотором шаре $D(a^0)$, причем матрицы $B_i(a)$ могут быть продолжены на все универсальное покрытие Z пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ как мероморфные функции (см. [1]).

Множество $\Theta \subset Z$ особенностей продолженных матричных функций $B_1(a), \dots, B_n(a)$ называется Θ -дивизором Мальгранжа (Θ зависит от начальных условий B_i^0). Это аналитическое подмножество множества Z коразмерности один (либо это пустое множество, что также возможно), т.е. локально возле точки $a^* \in \Theta$ оно задается уравнением

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6849.2006.1).

$\tau^*(a) = 0$, где $\tau^*(a)$ – голоморфная в окрестности точки a^* функция, называемая *локальной τ -функцией уравнения Шлезингера*¹. Согласно теореме Мивы [2] (см. также [3]) существует голоморфная на всем пространстве Z функция $\tau(a)$, множество нулей которой совпадает с Θ . В окрестности точки $a^* \in \Theta$ глобальная τ -функция отличается от локальной голоморфным сомножителем, не обращающимся в нуль, при этом

$$d \ln \tau(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\operatorname{tr}(B_i(a)B_j(a))}{a_i - a_j} d(a_i - a_j).$$

Дифференциальную форму $\sum_{i=1}^n (B_i^0/(z - a_i^0)) dz$ коэффициентов системы (1) при $a = a^0$ можно рассматривать как форму связности ∇^0 в тривиальном голоморфном векторном расслоении F^0 над $\mathbb{C}$. Согласно Мальгранжу [1] пара (F^0, ∇^0) может быть продолжена до расслоения F над $\overline{\mathbb{C}} \times Z$ со связностью ∇ такого, что

$$(F, \nabla)|_{\overline{\mathbb{C}} \times \{a^0\}} = (F^0, \nabla^0).$$

При такой интерпретации множество Θ состоит из тех точек $a^* \in Z$, для которых расслоение $F|_{\overline{\mathbb{C}} \times \{a^*\}}$ является голоморфно нетривиальным.

Далее мы опишем общий вид решений уравнения Шлезингера в окрестности Θ -дивизора, но сначала вкратце изложим способ вычисления локальной τ -функции, предложенный Болибрухом (подробно об этом см. в [3]).

Отметим, что ограничение расслоения F на $\overline{\mathbb{C}} \times \{a^0\}$ является голоморфно тривиальным и, стало быть, его степень равна нулю. Поскольку при изомонодромной деформации собственные значения матриц-вычетов формы связности не меняются (см. [4]), то расслоение F , ограниченное на $\overline{\mathbb{C}} \times \{a\}$, имеет нулевую степень для любой точки $a \in Z$ (степень такого расслоения равна сумме всех собственных значений матриц-вычетов формы связности по всем особым точкам).

Рассмотрим точку $a^* \in \Theta$ и вспомогательную систему

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{{}^*B_i}{z - a_i^*} \right) y,$$

имеющую фуксову особенность и единичную матрицу монодромии в бесконечности и такую, что сумма $\sum_{i=1}^n {}^*B_i$ равна $K = \operatorname{diag}(k_1, \dots, k_p)$, где $k_1 \leq \dots \leq k_p$. Матрица K задает тип расщепления расслоения $F|_{\overline{\mathbb{C}} \times \{a^*\}}$ и $\operatorname{tr} K = 0$ (так как степень рассматриваемого расслоения равна нулю).

Используя теорему существования и единственности решения уравнения Шлезингера, включим построенную фуксову систему в изомонодромное семейство Шлезингера

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \quad {}^*B_i(a^*) = {}^*B_i, \quad \sum_{i=1}^n {}^*B_i(a) = K. \quad (2)$$

Оказывается, если $K \neq 0$, то для некоторой пары k_l, k_m диагональных элементов матрицы K таких, что $k_m - k_l > 1$, соответствующее выражение $b_1(a) := \sum_{i=1}^n {}^*B_i^{lm}(a)a_i$ отлично от тождественного нуля (где ${}^*B_i^{lm}(a)$ – элемент матрицы ${}^*B_i(a)$, расположенный на месте (l, m)). При этом существует калибровочное преобразование вида

$$y' = \Gamma_1(z, a)y, \quad \Gamma_1(z, a) = C(a)(I + \mathcal{E}_{ml}),$$

¹Формально a и a^* являются точками универсального накрытия Z , но поскольку нас интересуют локальные свойства решений уравнения Шлезингера в окрестности Θ -дивизора, биголоморфно эквивалентной шару в $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$, то в дальнейшем можно понимать под a и a^* соответственно координаты $(a_1, \dots, a_n)$ и $(a_1^*, \dots, a_n^*)$ этих точек.

такое, что

- i) $C(a)$ – голоморфно обратимая в $D(a^*)$ матрица, а $\mathcal{E}_{ml}$ – матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента с индексами m, l , который равен $(k_l - k_m + 1)z/b_1(a)$;
- ii) оно переводит семейство (2) в фуксово семейство с матрицами вычетов $B'_i(a)$, удовлетворяющими соотношению $\sum_{i=1}^n B'_i(a) = K'$, где

$$K' = \text{diag}(k'_1, \dots, k'_p), \quad k'_j = k_j \text{ при } j \neq l, m, \quad k'_l = k_l + 1, \quad k'_m = k_m - 1.$$

(Данное преобразование имеет место лишь вне некоторого аналитического подмножества Θ_1 коразмерности один, которое является множеством нулей функции $b_1(a)$.)

Обозначим через $|K|$ число $|K| = \sum_{i=1}^p (k_i)^2$. Тогда согласно приведенному построению $|K'| \leq |K| - 2$. Действительно,

$$|K'| - |K| = (k_l + 1)^2 + (k_m - 1)^2 - (k_l)^2 - (k_m)^2 = 2(1 + k_l - k_m) \leq -2.$$

Если $K' \neq 0$ (заметим, что $\text{tr } K' = 0$), то процедуру, описанную выше, можно применить еще раз. Через конечное число шагов s получим фуксово семейство с матрицами вычетов $B_i^s(a)$, голоморфное в бесконечности. Это итоговое семейство будет калибровочно эквивалентно исходному семейству (1) при помощи постоянного калибровочного преобразования, т.е. $B_i^s(a) = S^{-1} B_i(a) S$, $i = 1, \dots, n$, где S – постоянная невырожденная матрица.

Таким образом, особое множество Θ в окрестности точки a^* совпадает со множеством нулей функции

$$b_1(a) \cdots b_s(a), \tag{3}$$

где $b_j(a)$ появляется на j -м шаге процедуры Болибруха, описанной выше, таким же образом, как и функция $b_1(a)$.

Пусть, для определенности, $b_1(a), \dots, b_r(a)$ – различные функции из произведения (3), а $m_1, \dots, m_r$ – соответствующие кратности, с которыми они там встречаются ($m_1 + \dots + m_r = s$). Тогда

$$\tau^*(a) = b_1(a) \cdots b_r(a).$$

Рассмотрим один шаг процедуры Болибруха. Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \frac{B'_i(a)}{z - a_i} = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} \Gamma_1^{-1} + \Gamma_1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{*B_i(a)}{z - a_i} \right) \Gamma_1^{-1},$$

из вида матрицы $\Gamma_1(z, a)$ следует, что матрицы $b_1^{2m_1}(a) B_i^s(a)$ голоморфны в окрестности точки a^* . Поэтому, сделав все s шагов процедуры, получим, что матрицы

$$b_1^{2m_1}(a) \cdots b_r^{2m_r}(a) B_i^s(a),$$

а следовательно, и матрицы

$$b_1^{2m_1}(a) \cdots b_r^{2m_r}(a) B_i(a),$$

голоморфны в окрестности точки a^* .

Какова связь между числами $m_1, \dots, m_r$ и коэффициентами $k_1, \dots, k_p$ типа расщепления расслоения $F|_{\overline{\mathbb{C}} \times \{a^*\}}$? Ясно, что для того чтобы превратить матрицу K в нулевую матрицу при помощи процедуры Болибруха, нужно последовательно понизить до нуля все ее положительные элементы (тогда отрицательные элементы автоматически также станут нулями). Поэтому число s шагов процедуры равно сумме положительных элементов матрицы K или

$$2m_1 + \dots + 2m_r = 2s = \sum_{j=1}^p |k_j|.$$

Оценим последнюю сумму, обозначив через Δ максимальную из разностей $k_{j+1} - k_j$. Пусть $k_{l+1}, \dots, k_p$ – все положительные элементы матрицы K , $1 \leq l \leq p-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p |k_j| &\leq \sum_{j=1}^l (k_{l+1} - k_j) + \sum_{j=l+2}^p (k_j - k_l) \\ &\leq \frac{l(l+1)}{2} \Delta + \frac{(p-l-1)(p-l+2)}{2} \Delta \leq \frac{p(p-1)}{2} \Delta. \end{aligned}$$

Если представление монодромии изомонодромного семейства Шлезингера (1) неприводимо, то $k_{j+1} - k_j \leq n-2$, $j = 1, \dots, p-1$ (см. [5]). В общем случае эти разности могут быть оценены следующим образом.

Пусть собственные значения β_i^j матрицы $B_i(a^0)$ удовлетворяют условию

$$\mu_i \leq \operatorname{Re} \beta_i^j \leq M_i, \quad \mu_i, M_i \in \mathbb{Z}, \quad \mu_i < M_i.$$

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству предложения 1 из [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для типа расщепления $(k_1, \dots, k_p)$ расслоения $F|_{\overline{\mathbb{C}} \times \{a\}}$, $a \in \Theta$, имеют место следующие неравенства:

$$k_{j+1} - k_j \leq \sum_{i=1}^n (M_i - \mu_i), \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Таким образом, мы получаем утверждение о виде решения уравнения Шлезингера в окрестности Θ -дивизора.

ТЕОРЕМА 1. В окрестности $D(a^*)$ точки $a^* \in \Theta$ матрицы $B_i(a)$, являющиеся решениями уравнения Шлезингера, имеют вид

$$B_i(a) = \frac{H_i(a)}{b_1^{2m_1}(a) \cdots b_r^{2m_r}(a)},$$

где $\Theta \cap D(a^*) = \{b_1(a) \cdots b_r(a) = 0\}$, $H_i(a)$ – голоморфные в $D(a^*)$ матрицы и

$$2m_1 + \cdots + 2m_r \leq \frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n (M_i - \mu_i).$$

(Если монодромия изомонодромного семейства Шлезингера неприводима, то $2m_1 + \cdots + 2m_r \leq p(p-1)(n-2)/2$.)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Malgrange, *Mathematics and physics* (Paris, 1979/1982), Progr. Math., **37**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 401–426. [2] M. Jimbo, T. Miwa, *Phys. D*, **2:3** (1981), 407–448. [3] А. А. Болибрух, *Матем. заметки*, **74:2** (2003), 184–191. [4] А. А. Болибрух, *Локальные и глобальные задачи теории особенностей*, Тр. МИАН, **221**, 1998, 127–142. [5] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, Современные лекционные курсы, МЦНМО, М., 2000. [6] И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов, *Матем. сб.*, **197:12** (2006), 43–64.

Р. Р. Гонцов

Институт проблем передачи информации РАН

E-mail: gontsovrr@mpei.ru

Поступило

15.10.2007